

**Transmission optique**

*Proposition de corrigé. Vous pouvez me signaler toute erreur ou autre suggestion à marc.cavelier@ac-rennes.fr*

## I. Propagation guidée

### A. Lois de Descartes

- 1 Rayons lumineux indépendants : ils n'interfèrent pas.
- 2 Lois de Descartes :
  - les rayons réfléchi et réfracté appartiennent au plan d'incidence.
  - angle de réflexion = angle d'incidence
  - à la réfraction :  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$
- 3 Il y a réflexion totale quand  $n_1 > n_2$  et si  $n_1 \sin i_1 > n_2$ .

### B. Fibre à saut d'indice

- 1 Il faut  $n_1 \sin i > n_2$  soit  $n_1 \cos \theta > n_2$  ou encore  $\theta < \arccos \frac{n_2}{n_1}$ .
- 2 Courber la fibre diminue localement  $i$  et un rayon réfracté passe dans la gaine.
- 3 a On a  $ON = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \theta_c} = n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}$ . D'où le résultat.
- b On trouve  $ON \simeq \sqrt{2n_2 \delta n}$ .
- c A.N. :  $ON \approx \sqrt{2 \times 1,50 \times 3 \cdot 10^{-2}} = 0,3$ .
- d Propagation si  $\theta_0 < ON$ .

### C. Modes de propagation

- 1 Équations de Maxwell dans le vide ( $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = \vec{0}$ ) :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 0 \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad \operatorname{rot}(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- 2 On calcule  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = -\Delta \vec{E}$  et, d'autre part,  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = -\frac{\partial \operatorname{rot}(\vec{B})}{\partial t}$  après permutation des opérateurs  $\operatorname{rot}()$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$ . D'où l'équation de propagation  $\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ .

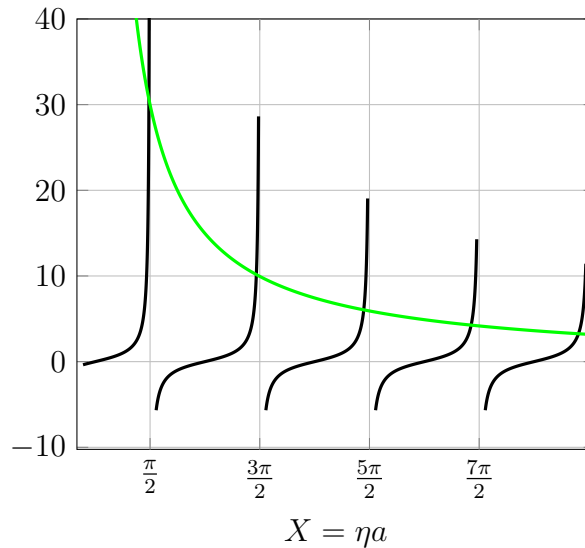
Par identification :  $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ .

- 3 On sait que la vitesse de propagation dans un milieu transparent vaut  $v = c/n$ .

- 4 On part de l'équation de Maxwell-Faraday. Il vient  $\vec{B} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{\omega} E(x) \\ 0 \\ \frac{jE'(x)}{\omega} \end{pmatrix} e^{j(\omega t - kz)}$ .
- 5 Il y a continuité du champ électrique à la traversée des interfaces en  $x = \pm a$ . La continuité du champ magnétique implique aussi la continuité de  $E'(x)$  en  $x = \pm a$ .
- 6 a Équation de propagation dans la gaine :  $\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{n_2^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ .
- b Il vient  $\frac{d^2 E}{dx^2} + \left( \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(x) = 0$ , où  $\frac{n_2 \omega}{c} = n_2 k_0$ .
- c Si  $n_2 k_0 > k$ , la solution est une combinaison de sinus et de cosinus : la propagation y est autorisée.
- Si  $n_2 k_0 < k$ , la solution est une combinaison d'exponentielles. Alors on a une onde évanescente. C'est la situation où l'onde est guidée dans le cœur.
- d Forme générale des solutions :

| $x < -a$                                          | $x > a$                                           |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $E(x) = K_1 \exp(-x/\delta) + K_2 \exp(x/\delta)$ | $E(x) = K_3 \exp(-x/\delta) + K_4 \exp(x/\delta)$ |

- 7 a Équation de propagation dans le cœur :  $\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{n_1^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ .
- b Il vient  $\frac{d^2 E}{dx^2} + (n_1^2 k_0^2 - k^2) E(x) = 0$ .
- c Solution sinusoïdale si  $n_1 k_0 > k$ .
- d Solution de la forme  $E(x) = K_5 \cos(\eta x) + K_6 \sin(\eta x)$ .
- 8 Solution paire ( $\implies K_6 = 0$ ) :  $E(x) = E_m \cos(\eta x)$ .
- Évitons des divergences en  $\infty$  et en  $-\infty$  :  $K_1 = 0$  et  $K_4 = 0$ .
- 9  $E(x) = E_m \cos \frac{3\pi x}{a}$ . Dessin à venir.
- 10 La continuité de  $E(x)$  et de  $E'(x)$  en  $x = a$  et  $x = -a$  donnent les relations  $E_m \cos(\eta a) = K_2 = K_3$   $\eta E_m \sin(\eta a) = \frac{K_2}{\delta}$ .
- Par conséquent,  $\eta \tan(\eta a) = \frac{1}{\delta}$ . Après toilettage, on trouve le résultat de l'énoncé.
- Remarque : il faut partir du résultat de l'énoncé pour vérifier que ça marche.
- 11 Représenter la fonction  $\tan(X)$  et la fonction  $g(X) = \sqrt{\frac{k_0^2 \text{ON}^2 a^2}{X^2} - 1}$  avec  $X = \eta a$ . Les points d'intersection sont les modes autorisés.



- 12** Il faut que la racine existe :  $\eta < k_0 \text{ON} \implies X < \frac{2\pi a}{\lambda_0} \text{ON}$ . Entre  $X = 0$  et  $X_{\max} = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \text{ON}$ , la fonction  $g(X)$  varie de  $+\infty$  à 0. Il y a une première solution entre 0 et  $\pi$  puis une autre tous les  $2\pi$ . Donc le nombre de modes vaut  $N = 1 + E\left(\frac{X}{2\pi}\right)$ .

- 13**  $N = 1 + E(15\pi) = 48$ .

- 14** Fibre monomode :  $\frac{2\pi a}{\lambda_0} \text{ON} < 1 \implies a < \frac{\lambda_0}{2\pi} \text{ON}$  Soit  $a_{\max} \simeq 0,5 \mu\text{m}$ .

*Remarque : 2 chiffres significatifs !!!! sans indication numérique dans l'énoncé ? !!*

## II. Absorption et dispersion

### A. Absorption

- 1 a**  $\lambda_0$  est dans le domaine des rayonnements infrarouge.
- b** Les vibrations moléculaires ou du réseau sont souvent responsables de l'absorption dans le domaine infrarouge. C'est ce qui chauffe quand on est au Soleil alors que ce sont les ultraviolets qui font bronzer.
- 2** Puissance de sortie :  $\mathcal{P}_s = \mathcal{P}_e \exp(-\alpha L)$ .
- 3** Pertes relatives :  $\frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}} = 1 - \exp(-\alpha L)$ .
- 4** On a  $A = 10 \log(e^{\alpha L}) = \frac{10\alpha L}{2,3}$  soit  $\alpha = \frac{2,3A}{10L} = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ .
- 5** Pertes relatives  $\simeq \alpha L$ . Pour  $L = 10 \text{ m}$ ,  $\frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}} \approx 4,6 \cdot 10^{-4}$  et pour  $L = 1 \text{ km}$ ,  $\frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}} \approx 4,6 \cdot 10^{-2}$ .

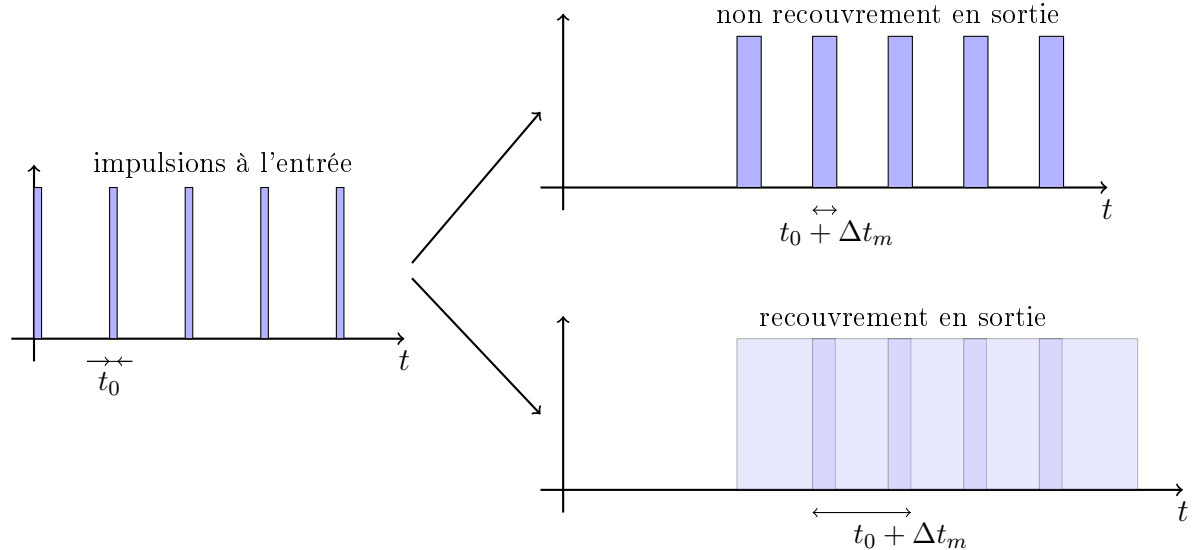
*Remarque : les valeurs sont suffisamment faibles pour justifier le DL.*

### B. Dispersion intermodale

- 1 Tout se passe comme si le rayon incliné parcourait l'hypoténuse d'un triangle rectangle dans lequel le côté adjacent à l'angle  $\theta_c$  est de longueur  $L$ . La longueur parcourue vaut  $\frac{L}{\cos \theta_c}$ .

D'où la différence de temps de parcours :  $\Delta t_m = \frac{n_1 L}{c} \left( \frac{1}{\cos \theta_c} - 1 \right) = \frac{n_1 L}{c} \frac{n_1 - n_2}{n_2}$ .

- 2 Chaque impulsion initiale s'étale pour donner un pavé de taille  $\Delta t_m$ .

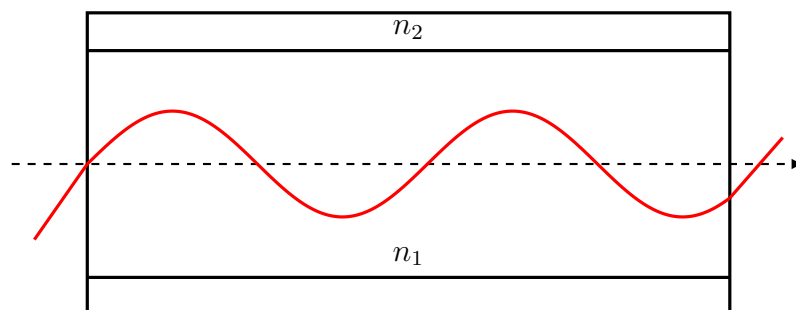


- 3 La valeur minimale de la période vaut  $\Delta t_m$  donc la fréquence à ne pas dépasser sous peine de mélange infâme est  $BP_m = 1/\Delta t_m = \frac{c}{n_1 L} \frac{n_2}{n_1 - n_2}$ .
- 4 A.N. Pour  $L = 10$  m,  $BP_m \simeq 1$  GHz. Pour  $L = 1$  km,  $BP_m \simeq 0,01$  GHz.

C'est ennuyeux pour les très longues distances de communication : le débit diminue dramatiquement.

Une solution est d'utiliser une fibre monomode : il n'y a pas de dispersion intermodale donc pas d'étalement des dates d'arrivée des impulsions à la sortie de la fibre.

- 5 Pour ramener les rayons lumineux vers l'axe, il faut que  $n(r)$  soit une fonction décroissante de  $r$ . Le dessin suivant montre l'allure d'un rayon dans une fibre à gradient d'indice :



### C. Dispersion chromatique

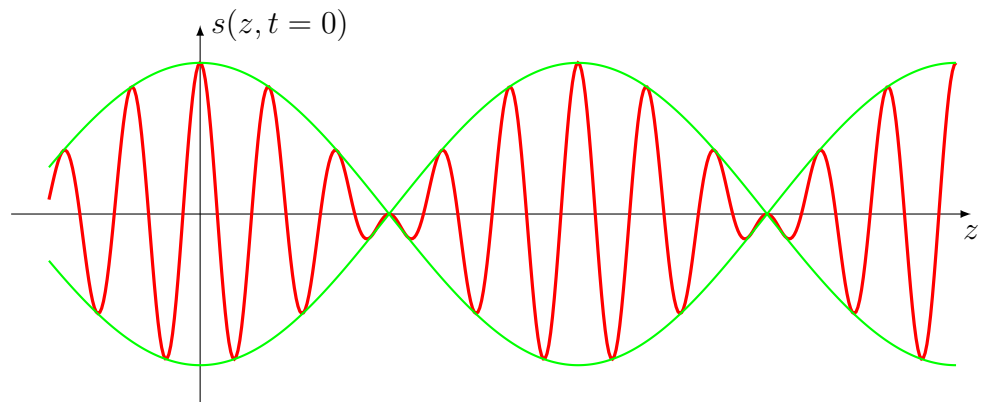
- 1 Il y a un étalement car les vitesses de propagation dépendent de l'indice même si la longueur parcourue est la même : le *chemin optique* change.

- 2 a Transformation somme  $\rightarrow$  produit :

$$s(z, t) = 2S_0 \cos \left[ \left( \omega + \frac{\delta\omega}{2} \right) t - \left( k + \frac{\delta k}{2} \right) z \right] \cos \left[ \frac{\delta\omega}{2} t - \frac{\delta k}{2} z \right]$$

*Remarque : franchement, le sujet aurait pu symétriser les expressions*

- b Le premier terme en cos, de période  $\simeq 1/\omega$ , varie beaucoup plus rapidement que le second, de période  $1/\delta\omega$ . Idem pour la périodicité spatiale.
- c Allure de  $s(z, t = 0)$  : on a exagéré l'écart  $\delta k$ . En rouge, le signal vrai et, en vert, l'enveloppe.



- d L'enveloppe se comporte comme une OPM, de célérité  $v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$ . Pour parcourir une longueur de 1 m (longueur unité dans le jargon de l'énoncé), il faudra à l'enveloppe une durée  $\tau_g = \frac{\delta k}{\delta\omega}$ .
- 3 L'étalement temporel dû à la dispersion chromatique vaut ici  $D(\lambda) \Delta\lambda L = 10$  ps. La période de répétition des impulsions est nécessairement plus grande donc  $BP_c = 1 \cdot 10^2$  GHz. Il semble que la dispersion intermodale soit beaucoup plus gênante que la dispersion chromatique.

### III. Émission / Réception

#### A. Émission

- 1 Théorème de Malus : après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde.
- 2 Sur la voie 2, on a substitué une longueur  $d$  de milieu d'indice  $n_1$  par la même longueur d'un milieu d'indice  $n$ . Donc  $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n - n_0)d$ .

- 3** Intensité :  $I = g_0^2 + g_0^2 \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi) \rangle$  car la moyenne d'un  $\cos^2$  vaut  $1/2$ . En développant  $\cos(\omega t + \phi)$  et après moyennage temporel, il vient  $I = g_0^2 (1 + \cos \phi)$ .
- 4 a** L'intervalle de variation de  $\phi$  doit être au moins de  $\pi$ . D'où  $\Delta n = \frac{\lambda}{2d}$ .
- b** A.N.  $\Delta n = 1,5 \cdot 10^{-3}$ .

## B. Réception

- 1 a** Intensité  $i_0$  = nombre d'électrons créés par seconde  $\times e$ . Pour une puissance incidente  $\mathcal{P}_s$ , le flux de photons est de  $\frac{\lambda \mathcal{P}_s}{hc}$  d'où  $i_0 = re \frac{\lambda \mathcal{P}_s}{hc}$ .
- b** A.N.  $i_0 = 0,8 \times 5 \cdot 10^{-19} \frac{1,5 \cdot 10^{-6} \times 10 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8} = 0,01 \text{ A}$ .
- 2** AO idéal et en régime linéaire  $\Rightarrow V_- = V_+ = 0 \text{ V}$ . D'où  $V_0 = R_f i_0$ .
- 3** D'après la loi des nœuds,  $\frac{v_0 + \varepsilon}{R_f} = i_0 - jC_s \Omega \varepsilon$  soit  $\left( \frac{G+1}{R_f} + jC_d \Omega \right) \varepsilon = i_0$ . Or  $\varepsilon = v_0/G$  et  $G \gg 1$ , d'où  $\frac{v_0}{i_0} \approx \frac{R_f}{1 + j \frac{R_f C_d \Omega}{G}}$ .
- 4** Pulsation de coupure :  $\Omega_c = \frac{G}{R_f C_d}$ .
- 5** Pour rester dans la bande passante, on souhaite  $\Omega < \Omega_c$ , donc  $R_f < 2\pi \cdot 10^8 \Omega$ . En fait,  $\Omega < \Omega_c/10$  serait préférable.
- D'autre part,  $|v_0| < V_{\text{sat}}$  impose  $R_f < \frac{15}{0,01} = 1,5 \text{ k}\Omega$ . Cette dernière valeur semble convenir.
- 6 a** Le montage fonctionne en comparateur : si  $v_0 > V_{\text{ref}}$ ,  $s = -V_{\text{sat}}$  ; si  $v_0 < V_{\text{ref}}$ ,  $s = V_{\text{sat}}$ . On recrée ainsi un signal « binaire » à partir du signal bruité à condition de bien choisir  $V_{\text{ref}}$ .
- b** Si le signal est trop bruité, on ne peut pas reconstruire correctement les états haut et bas. Par exemple, si, à cause du bruit,  $v_0(t) > V_{\text{ref}}$  alors le comparateur donnera un état haut au lieu de l'état bas attendu en l'absence de bruit.

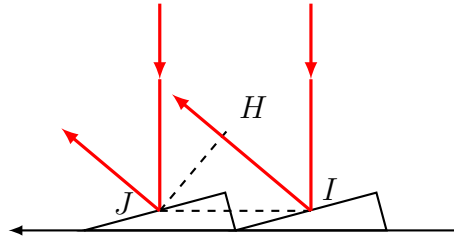
## IV. Multiplexage / Démultiplexage

- 1. a** Principe de Huygens - Fresnel : tout point  $P$  d'une surface atteinte par une onde se comporte comme une source secondaire qui réémet une ondelette sphérique dont l'amplitude est proportionnelle à l'état vibratoire de l'onde incidente en  $P$  et à l'élément de surface entourant  $P$ . Toutes ces sources secondaires sont cohérentes entre elles.

*Remarque : ce dernier point n'est valable que si la distance entre deux sources secondaires est inférieure à la longueur de cohérence de la source initiale.*

- b** Diffraction de Fraunhofer = diffraction à l'infini. En pratique l'observation se fait dans le plan focal image d'une lentille convergente.

**2.** Un schéma :



La différence de chemin optique vaut  $(IH)$  car les durées de parcours de la lumière sur les trajets  $(JM)$  et  $(HM)$  sont identiques. Or l'angle entre  $JJ'$  et  $JH$  vaut  $i + \alpha$  (regarder de combien la normale a tourné au fur et à mesure). D'où  $\delta = b \sin(i + \alpha)$ .

Finalement, le déphasage entre les deux rayons vaut  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin(i + \alpha)$ .

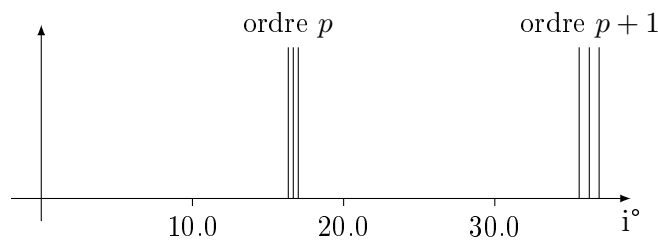
- 3.** Pour obtenir des maxima, il faut qu'il y ait interférences constructives entre les rayons issus des centres de deux motifs consécutifs :  $\phi = p \times 2\pi$  avec  $p$  entier soit  $b \sin(i + \alpha) = p\lambda$ .

- 4.** En dérivant la relation par rapport à  $\lambda$ , il vient  $-b \cos(i + \alpha) \frac{di}{d\lambda} = p$  d'où  $\frac{di}{d\lambda} = \frac{-p}{\cos(i + \alpha)}$ . On a donc intérêt à choisir l'ordre d'interférences le plus grand possible.

- 5. a** Pour  $p > 0$ , si  $\lambda$  croît, alors  $i$  croît également. Notons  $i_p(\lambda)$  l'angle pour lequel la longueur d'onde  $\lambda$  donne un maximum d'intensité dans l'ordre  $p$ . Par le calcul,  $i_p(\lambda) = \arcsin\left(\frac{p\lambda}{b}\right) - \alpha$  et  $i_{p+1} = \arcsin\left(\frac{p\lambda}{b}\right) - \alpha$ .

Il y aura recouvrement des spectres quand  $i_p(\lambda_{m3}) > i_{p+1}(\lambda_{m1})$ . Alors  $(p+1)\lambda_{m1} < p\lambda_{m1}$ . D'où  $p > p_{\min} = \frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m3} - \lambda_{m1}} = 52$ . D'autre part, le nombre maximal d'ordres visibles vaut  $p_{\max} = b/\lambda$ . Donc un recouvrement de spectres n'est réellement visible que si  $p_{\min} < b/\lambda$ .

Allure des spectres dans les ordres  $p$  et  $p+1$  :



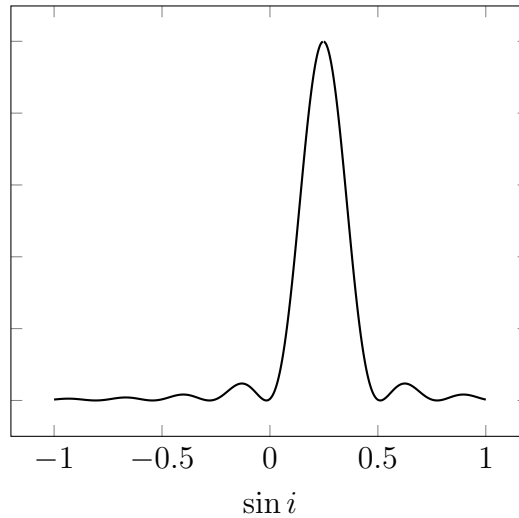
- 6. a** D'après le cours, l'amplitude diffractée s'écrit  $\underline{a}_d = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{O'M}} dX'$ , où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde associé à l'onde plane diffractée dans la direction  $i$  et  $\vec{k}_0$  le vecteur d'onde de l'onde plane incidente.

On a  $\overrightarrow{O'M} = X' \vec{e}_{X'}$ , donc  $(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \overrightarrow{O'M} = \frac{2\pi}{\lambda}(\sin i - \sin \alpha)$ . Après intégration, il vient  $\underline{a}_d = \ell \text{sinc} \left( \frac{\pi \ell}{\lambda}(\sin i - \sin \alpha) \right)$ .

En prenant le module au carré, on en déduit le résultat de l'énoncé, effectivement à un coefficient multiplicatif près.

**b** Maximum de  $I_M$  quand  $\sin i = \sin \alpha$  donc quand  $i = \alpha$  : on retrouve la loi de Descartes de la réflexion.

**c** Allure de  $I(M)$  :



**7.** Comme  $i = \alpha$ , il vient  $b \sin(2\alpha) = p\lambda$ . Dans un réseau classique par transmission, la tache centrale de diffraction coïncide avec l'ordre  $p = 0$  pour lequel il n'y a pas de dispersion. Ici, on peut décaler la tache centrale de diffraction et la faire coïncider avec un ordre  $p \neq 0$ . La figure sera plus lumineuse.

**8. a** Le sinus cardinal s'annule pour  $\frac{\pi \ell}{\lambda}(\sin i - \sin \alpha) = \pm \pi$ . Comme les angles sont petits,  $\sin i \simeq i$  et  $\sin \alpha \simeq \alpha$ . La largeur angulaire de la tache de diffraction due à un motif vaut donc  $\Delta i = 2 \frac{\lambda}{\ell}$ .

**b** On veut 
$$\begin{cases} b(i_{p+1} + \alpha) = (p+1)\lambda \\ i_{p+1} = \alpha + \frac{\lambda}{\ell} \end{cases} \implies b \left( \frac{\lambda}{\ell} + \alpha \right) = 2b\alpha + \lambda. \text{ D'où } \frac{b\lambda}{\ell} = \lambda \text{ ce qui}$$
 donne le résultat de l'énoncé.

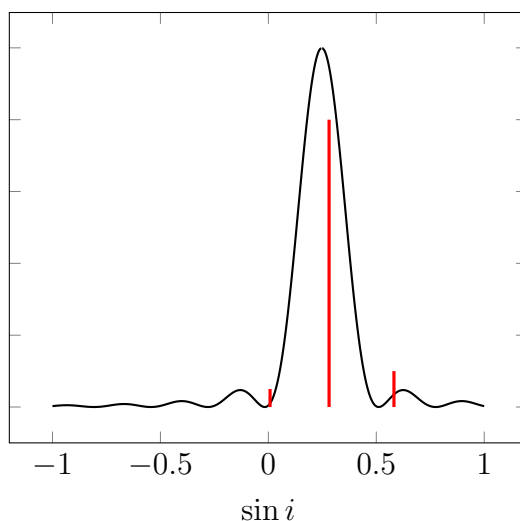
Pourquoi cette relation n'est qu'approximative : tout d'abord, cela impose un angle  $\alpha$  assez faible pour pouvoir écrire  $\cos \alpha \approx 1$  et nous avons assimilé  $\sin(i + \alpha) \approx i + \alpha$ . Enfin, cette condition n'est respectée que pour une seule longueur d'onde.

*Remarque : je ne comprends pas ce que veut dire « recherche de l'ordre le plus élevé »...*

9. L'ordre dit  $p_0$  correspond à l'ordre dans lequel on a le maximum d'intensité (tache centrale de diffraction) :  $p_0 = \frac{b}{\lambda} \times \sin(2\alpha) \approx 2$  pour les trois longueurs d'onde proposées. Donc  $p_0 = 2$  (c'est un peu approximatif!).

La condition  $\cos \alpha \approx 1$  est bien respectée donc l'ordre 1 est à peu près éteint (cf simulation suivante). Le spectre dans l'ordre  $p_0 = 2$  ne se recouvre pas avec le spectre dans l'ordre 3. D'ailleurs, si on s'appuie sur la question IV.5, aucun recouvrement ne peut se produire ici : l'ordre maximal observable pour  $i > 0$  est  $p = 3$ .

Intensité diffractée et ordres d'interférences



10. Pour les trois longueurs d'onde proposées,  $\lambda/b < 1$  donc  $i$  existe.
11. Il y a deux intérêts : faire coïncider le maximum d'intensité de la figure de diffraction par un miroir avec un ordre d'interférences et éteindre (ou presque) l'ordre voisin en le faisant coïncider avec le premier zéro de la figure de diffraction.