

Corrigé de l'épreuve de Physique 2 Mines-Ponts 2013 PC

Francis BROUCHIER

5 mai 2013

I. – Forme des gouttes

I.A – Rôle de la tension superficielle

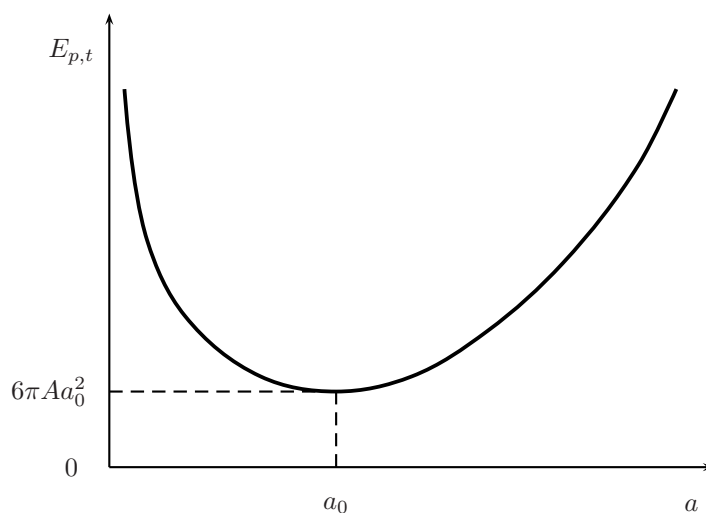
■ 1 – – La surface totale du cylindre est la somme de la surface latérale $2\pi ae$ et du double de la surface de base $2\pi a^2$. $S = 2\pi ae + 2\pi a^2$

Le volume est le produit de la surface de base par la hauteur : $V = \pi a^2 e$. Soit $e = V/\pi a^2$. La surface s'écrit alors $S = 2\pi a^2 + 2\pi a V/\pi a^2 = 2\pi a^2 + 2V/a$. Avec la formule de l'énoncé il vient :

$$E_{p,t} = 2\pi a^2 A + \frac{2AV}{a}$$

■ 2 – – A et V sont fixés : $E_{p,t} = 2A(\pi a^2 + V/a)$. La dérivée du terme entre parenthèses vaut $2\pi a - V/a^2$ et s'annule pour $a = a_0 = [V/2\pi]^{1/3}$. Par ailleurs pour $a = 0$ ou $a \rightarrow \infty$, $E_{p,t} \rightarrow \infty$, l'extremum est un minimum. En ce point $V = 2\pi a_0^3 = \pi a_0^2 e_0$, ce qui donne $e_0 = 2a_0$. Le cylindre a une hauteur égale à son diamètre, ce qui peut passer comme vaguement équivalent à une sphère. Avec ces valeurs on peut écrire :

$$[E_{p,t}]_{min} = 2A(\pi a_0^2 + 2\pi \frac{a_0^3}{a_0}) = 6\pi A a_0^2 \quad [E_{p,t}]_{min} = 6\pi A a_0^2$$



■ 3 – – $E_{p,t} = 2A(\pi a^2 + V/a)$ $dE_{p,t}/da = 2A(2\pi a - V/a^2)$

$$\frac{d^2 E_{p,t}}{da^2} = 2A(2\pi + \frac{2V}{a^3}) \quad \frac{d^2 E_{p,t}}{da^2} \Big|_{a=a_0} = 12\pi A$$

Énergie potentielle élastique d'un ressort.

Le ressort a une longueur à vide l_0 . On va l'étirer jusqu'à une longueur a en passant par la longueur variable x . La force extérieure exercée sur le ressort vaut $f = k(x - l_0)$. La différentielle de l'énergie potentielle est alors

$dE_p = f \cdot dx = k(x - l_0)dx$. en intégrant entre l_0 et a on obtient $E_p = k[a^2/2 - l_0 \cdot a + l_0^2/2]$. En dérivant deux fois par rapport à a on obtient $d^2 E_p / da^2 = k$. La dérivée première s'annule pour $l_0 = a_0$ donnant le minimum de E_p . Ainsi par analogie de formule on peut écrire $k = 12\pi A$ et $l_0 = a_0$. Pour le ressort l'énergie potentielle minimum est nulle, alors que pour le cylindre elle vaut $6\pi A a_0^2$. Cette valeur est celle de la constante "près" indiquée dans l'énoncé.

Application numérique : Valeur de k obtenue par l'analogie $k = 2,64 \text{ N.m}^{-1}$. Bien que l'énoncé ne le précise pas, on suppose que le ressort est vertical sur la Terre et soumis à la pesanteur terrestre : $\Delta l = 10^{-2} \cdot m \cdot g = 0,98 \text{ N}$, ce qui donne $k' = 98 \text{ N.m}^{-1}$. L'énergie potentielle du ressort est supérieure à l'énergie potentielle du cylindre.

I.B. – Influence de la pesanteur

■ 4 – – Le cylindre a ses génératrices verticales. L'accélération de la pesanteur est constante. Pour calculer l'énergie potentielle de l'eau dans le cylindre on découpe une tranche entre l'altitude z et $z + dz$ dont le poids est $\mu_e \pi a^2 g dz$, l'énergie potentielle élémentaire de cette tranche est $dE_{p,g} = \mu_e \pi a^2 g z dz$. En intégrant entre 0 et e on obtient $E_{p,g} = \mu_e \pi a^2 g e^2 / 2$. en supposant que la relation entre V et a_0 reste vraie, soit $V = \pi a^2 e = 2\pi a_0^3$, $e = a_0^3 / a^2$. Finalement on trouve bien la formule de l'énoncé :

$$E_{p,g} = \frac{2\pi\mu_e g a_0^6}{a^2}$$

■ 5 – – On écrit l'énergie potentielle totale :

$$[E_p]_{\text{totale}} = \frac{2\pi\mu_e g a_0^6}{a^2} + 2\pi A a^2 + \frac{2AV}{a} \quad \frac{dE_t}{da} = 2\frac{2\pi\mu_e g a_0^6}{a^3} + 2 \cdot 2\pi A a_1 - \frac{2AV}{a^2} = 0$$

Avec $a_1 = a_0(1 + \varepsilon)$ et $V = 2\pi a_0^3$ et en développant les calculs à l'ordre 1 on obtient :

$$4\pi\mu_e g a_0^3(1 - 3\varepsilon) + 4\pi A a_0(1 + \varepsilon) - 4\pi A a_0(1 - 2\varepsilon) = 0 \quad \mu_e g a_0^3 + a_0 \cdot 3 \cdot \varepsilon = 0 \quad \varepsilon = \frac{\mu_e g a_0^2}{3A}$$

Comme on a ajouté une énergie potentielle, le minimum de l'énergie totale correspond à une valeur plus faible de la variable a dans les conditions précisées par l'énoncé. L'application numérique donne : $\varepsilon = -0,046$. Compte tenu du modèle choisi qui assimile un cylindre à une sphère cela est suffisamment petit devant 1.

FIN DE LA PARTIE I

II. – Modèle mécanique du rebond

II.A. – Étude de la chute

■ 6 – – Le patin, le ressort et l'amortisseur ont une masse supposée nulle. Les forces liées à l'air sont aussi nulles. A l'instant $t = 0$ la masse m est au repos le ressort a donc sa longueur à vide e_0 . La seule force qui s'exerce sur le système est le poids de la masse m . Comme $\dot{e}(t = 0) = 0$ et comme aucune force ne s'exerce entre la masse et le reste du système $e(t)$ reste constant et égal à e_0 .

■ 7 – – D'après ce qu'on a vu le système reste un solide de masse m dans le vide. Son mouvement est un mouvement de chute libre dans le vide sous l'action de la pesanteur avec une vitesse initiale nulle.

$$z = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + h \quad \dot{z}(t) = -g \cdot t \quad z = 0 \rightarrow h = \frac{1}{2}g \cdot t_0^2 \quad \dot{z}(t_0) = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

II.B. – Étude du choc sur la plaque

■ 8 – – La plaque est fixe, il faut donc étudier le mouvement de la masse m dont on néglige le poids. $\varepsilon(t) = e(t) - e_0$. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse m s'écrit :

$$m \cdot \ddot{\varepsilon}(t) = -k\varepsilon(t) - f \cdot \dot{\varepsilon}(t) = \quad \ddot{\varepsilon} + \frac{f}{m} \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{k}{m} \varepsilon \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{f}$$

■ 9 – – L'équation caractéristique de l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants et sans second membre vaut et on en tire aisément les racines ainsi que la simplification par $1/Q^2$:

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \quad r = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}}{2} \quad r \sim -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0$$

On en tire donc la relation demandée :

$$\varepsilon(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)[B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t)]$$

En $t = 0$ $\varepsilon(0) = 0 = 1[B.1 + 0.C]$ d'où $B = 0$. On dérive ensuite $\varepsilon(t)$ en ne conservant que la constante C :

$$\dot{\varepsilon}(0) = -\frac{\omega_0}{2Q} \exp\left(-\frac{\omega_0.0}{2Q}\right)[C.0] + \exp\left(-\frac{\omega_0.0}{2Q}\right)C\omega_0 \cos(\omega_0.0) = v_0$$

Les deux constantes demandées sont : $B = 0$ et $C = v_0/\omega_0$

■ 10 – – Pour déterminer les extrema on écrit que la dérivée première $\varepsilon(t)$ est nulle. ce qui donne :

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\frac{\omega_0}{2Q} \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) v_0 \cos(\omega_0 t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) [v_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{v_0}{2Q} \sin(\omega_0 t)]$$

Les extrema sont obtenus pour $\tan(\omega_0 t) = 2.Q$. Considérons l'angle α compris entre 0 et $\pi/2$ tel que $\tan \alpha = 2.Q$. Comme Q est assez grand cet angle est plutôt compris entre $\pi/4$ et $\pi/2$. On en déduit :

$$T_n = \frac{\alpha}{\omega_0} + n \frac{\pi}{\omega_0} \quad T_0 = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

$$|\varepsilon(T_n)| = \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \exp\left(-\frac{\omega_0 T_n}{2Q}\right) \cdot |\sin(\omega_0 T_n)| \quad |\sin[\omega_0(\frac{\alpha}{\omega_0} + \frac{n\pi}{\omega_0})]| = \sin[\alpha]$$

$$|\varepsilon(T_n)| = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{\omega_0} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{2Q}\right) \cdot \exp\left(-\frac{n\pi}{2Q}\right) \quad |\varepsilon(T_0)| = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{\omega_0} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{2Q}\right)$$

Faisons maintenant le rapport $|\varepsilon(T_n)|/|\varepsilon(T_0)|$:

$$\frac{|\varepsilon(T_n)|}{|\varepsilon(T_0)|} = \frac{\exp(-\alpha/2Q) \cdot \exp(-n\pi/2Q)}{\exp(-\alpha/2Q)} = \exp(-n\pi/2Q) = 0,1 \quad -n\pi/2Q = \ln(0,1) = -2,32$$

$$n = 1,46.Q \text{ pour } Q = 5 \quad n = 7 \text{ oscillations}$$

II.C.– Décollement de la Goutte

■ 11 – – La force exercée par la plaque fixe sur le patin est l'opposé de la force du ressort $-k\varepsilon$ et de la force de l'amortisseur $-f\dot{\varepsilon}$. soit $R = k\varepsilon + f\dot{\varepsilon}$

■ 12 – – Avec l'expression donnée de R à $t = 0$ $R > 0$. Le patin va décoller lorsque $R = 0$. Ce qui donne $\tan(\omega_0 \tau) = -1/Q$. Posons $\tan(\beta) = -1/Q$. Comme $1/Q \ll 1$ $\tan(\beta) \sim \beta$. $\omega_0 \tau = \pi - 1/Q$, et enfin :

$$\tau = \frac{\pi - 1/Q}{\omega_0}$$

En conservant $Q = 5$ et avec les valeurs numériques de la fin de l'énoncé on trouve $\tau = 4,6.10^{-3} \text{ s}$ avec
 erreur relative 6,3%

Le début de l'énoncé parle de quelques millisecondes pour le temps de décollage, ce qui semble en accord avec les observations.

■ 13 – – Reproduisons le graphique de l'énoncé après avoir rectifié une petite erreur. En effet l'échelle log-log forme un carré, ce qui est normal. Or la valeur 10^{-3} sur l'axe des a_0 devrait être décalée vers la droite pour

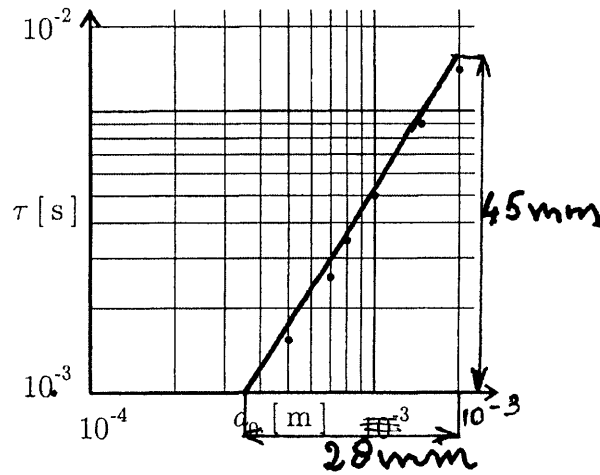


FIGURE 3 – τ fonction de a_0

respecter la forme carrée.

$1/Q$ devant π . $\tau \sim \pi/\omega_0 \sim \pi\sqrt{m/k}$. Avec $k = 12\pi A$ et $m = \mu_e \cdot 2\pi a_0^3$ il vient :

Pour simplifier les calculs négligeons

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{\mu_e}{6A}} \cdot a_0^{3/2} \quad \lg(\tau) = \lg\left(\pi \sqrt{\frac{\mu_e}{6A}}\right) + \frac{3}{2} \lg(a_0)$$

Les points expérimentaux sont à très peu près alignés. $\lg(\tau)$ est une fonction affine de $\lg(a_0)$. La pente de la droite devrait valoir 1,5). Calculons la en faisant le rapport de $45/28 = 1,6$. L'erreur $(1,6 - 1,5)/1,5 = 7\%$. Elle est un peu supérieure aux erreurs précédentes et le modèle doit être amélioré.

FIN DE LA PARTIE II

III. – Modèle ondulatoire du rebond

III.A. – Équation d'onde

■ 14 – – L'allongement du ressort vers le haut est $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$. La force exercée par le ressort sur la masse en z_n vaut $K(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)$. De la même façon la force exercée par le ressort du bas vaut $-K(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})$. La relation fondamentale de la dynamique permet donc d'écrire :

$$M \frac{d^2 \varepsilon_n}{dt^2} = -K(2\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n-1})$$

■ 15 – – Avec d_0 infiniment petit on peut écrire :

$$\varepsilon(z = nd_0, t) - \varepsilon(z = (n+1)d_0, t) = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} d_0 \quad \text{pour} \quad (n-1)d_0 \quad + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$$

La différence facteur de K est donc nulle, il faut donc dériver à l'ordre 2 pour obtenir un résultat exploitable. L'équation a donc pour expression :

$$M \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial t^2} = -2Kd_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial z^2} \quad \text{posons} \quad c = \sqrt{\frac{2Kd_0^2}{M}} \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial t^2}$$

On obtient donc bien une équation de D'ALEMBERT, permettant d'obtenir une propagation d'une onde sans affaiblissement à une dimension d'espace.

Nous avons déjà vu que la force exercée par la partie basse de la chaîne était :

$$-Kd_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \quad \text{soit} \quad \vec{F}(z, t) = -Kd_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \hat{u}_z$$

■ 16 – – En utilisant la solution fournie par l'énoncé, on la dérive deux fois par rapport à z puis à t et on réécrit l'équation de D'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} = -\alpha^2 \varepsilon_M \sin(\alpha z - \varphi) \cos(\omega t - \psi) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = -\omega^2 \varepsilon_M \sin(\alpha z - \varphi) (\cos(\omega t - \psi)) \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{\omega}{c}$$

III.B. – Conditions aux limites- conditions initiales

■ 17 – – Le bas du cylindre est fixe, sa vitesse est nulle : $v(z) = 0$ soit $-\omega \varepsilon_M \sin(-\varphi) \cos(\omega t - \psi) = 0$ d'où $\varphi = 0$.

■ 18 – – Au dessus du cylindre il n'y a plus de ressort. La force exercée par le ressort "inexistant" du haut est nulle : $F(2a_0, t) = 0$ soit :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \Big|_{z=2a_0} = 0 \quad \cos(\alpha 2a_0) \cos(\omega_i t - \psi) = 0 \quad \cos(\alpha 2a_0) = 0 \quad \alpha 2a_0 = \omega_i \frac{2a_0}{c} = \frac{\pi}{2} + i\pi \quad \boxed{\omega_i = \frac{(\pi/2 + i\pi)c}{2a_0}}$$

■ 19 – – La pulsation la plus basse vaut $\omega_0 = \pi c/4a_0$. En $z = 0$ dessous il n'y a pas de ressort donc $F(0, t) = 0$ soit $\alpha \varepsilon_M \cos(\alpha \cdot 0) \cos(\omega_0 \tau) = 0$ $\boxed{\tau = 2a_0/c}$

III.C. – Retour à la goutte d'eau

■ 20 – – Désignons par Γ la raideur équivalente des deux ressorts en série. Il est facile de voir que $\Gamma = 2\kappa$.

■ 21 – – Il y a N ressorts de raideur K jouant le rôle de κ et la raideur totale du ressort est k jouant le rôle de Γ , ainsi :

$$K = \frac{k}{N} \quad k = 12\pi A \quad \boxed{K = \frac{12\pi A}{N}}$$

■ 22 – – La masse M vaut m/N , la raideur K vaut k/N . Ainsi $K/M = k/m$ et $c = \sqrt{2ka_0^2/m}$, avec $\tau = 4a_0/\pi c$ il vient :

$$\boxed{\tau = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_e a_0^3}{6A}}} \quad \boxed{\tau = 2 \text{ ms}}$$

Cette valeur se rapproche de celle de la question 12 au coefficient numérique près devant la racine carrée.

III.D. – Rôle éventuel de la compressibilité de l'eau

■ 23 – – Tous les liquides sont très peu compressibles, mais ils le sont. Le phénomène le plus courant permettant de le mettre en évidence est la propagation du son dans l'eau que l'on entend quand on fait de la plongée sous-marine. Dans l'eau le son se propage bien.

Soit χ_s le coefficient de compressibilité isentropique et μ_e la masse volumique de l'eau, en écrivant les équations de la mécanique des fluides on démontre aisément que la célérité du son dans l'eau est $\boxed{c = 1/\sqrt{\chi_s \mu_e}}$.

Au laboratoire il est facile de mesurer la masse volumique de l'eau (ou de n'importe quel liquide). Pour la mesure de la célérité du son il faut disposer d'un haut-parleur étanche et d'un microphone lui aussi étanche. Un aquarium plein d'eau reçoit aux deux extrémités de la plus grande longueur le haut-parleur et le microphone. On étudie alors les fréquences de résonance et on conserve la plus basse pour déterminer la longueur d'onde du son $\lambda/2 = L$ où L est la longueur. On mesure la fréquence du son au fréquencemètre et on en déduit la célérité $c = \lambda f$ d'où la valeur de χ_s .

■ 24 – – A la question 19 le temps τ valait $2a_0/c$. Il suffit de remplacer c par c_e pour répondre à la question $\tau_e = 2a_0/c_e = 2.10^{-3}/1,4.10^3$ soit $\boxed{\tau_e = 1,43.10^{-6} \text{ s}}$.

Avec cette hypothèse le temps de contact est plus faible, en gros, d'un facteur 1000. Quand les deux modèles fonctionnent en même temps c'est celui qui donne un temps de contact le plus long qui l'emporte. En conclusion la compressibilité de l'eau est un phénomène marginal.

FIN DE LA PARTIE III

IV. – Étude des pertes lors du rebond

IV.A. – Puissance dissipée par viscosité dans un écoulement modèle

■ 25 – – U étant constant le système est en régime permanent et la vitesse en un point ne dépend pas du temps ni de la variable x , donc $\boxed{= \vec{v} = v(z)\hat{u}_x}$.

■ 26 – – En projetant sur l'axe des z l'équation de Navier-Stokes ($v_z = 0$) on obtient :

$$0 = -\frac{\partial p(z)}{\partial z} \quad \boxed{p(z) = Cste}$$

En projetant sur l'axe des x il vient :

$$\mu(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial p(z)}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \quad \boxed{v = Az + B}$$

En $z = 0$ $v = 0$ d'où $B = 0$; en $z = e$ $v = U$ $A = U/e$ finalement $\boxed{v = U.z/e}$

■ 27 – – La force surfacique de viscosité a pour expression :

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \eta \frac{dv}{dz} \hat{u}_x = f_s \hat{u}_x \quad \boxed{f_s = \frac{\eta U}{e}}$$

■ 28 – – Avec la géométrie imposée $dS = dx.dy$. Au point d'ordonnée z : $dP(z) = dF dx dy v(z)$. Même relation pour $z + dz$ de la sorte :

$$dP_{ext} = f_s dx dy [v(z + dz) - v(z)] = f_s dx dy \frac{dv(z)}{dz} dz = \eta \frac{U^2}{e^2} d\vartheta \quad \boxed{\rho = \eta \frac{U^2}{e^2}}$$

Soit ϑ le volume occupé par le fluide la puissance extérieure reçue par la fluide vaut $\boxed{P_{ext} = \rho \vartheta}$. La puissance reçue par le fluide est due au déplacement de la plaque supérieure par un opérateur, son signe est donc positif.

■ 29 – – La puissance précédente est reçue par la particule de fluide. Cette particule ayant une accélération nulle la somme des forces intérieures et extérieures est nulle d'où $\boxed{dP_{int} = -dP_{ext} = -\rho d\vartheta}$. Cette puissance est négative car elle se transforme en chaleur du fait de la viscosité et sort du système constitué par la particule de fluide : $dP_{ext} + dP_{chaleur} = 0$

IV.B.– Cas de la goutte

■ 30 – – On suppose toujours, sans indication contraire, que la goutte est assimilable à un cylindre de rayon $a(t)$ et d'épaisseur $e(t)$. Faisons le calcul sur l'intervalle de temps τ que nous supposons assez petit pour avoir un ordre de grandeur :

$$e(\tau) = e(0) + \frac{de}{dt} \tau \quad \frac{de}{dt} \sim \frac{e}{\tau} \quad \text{approximation assez grossière} \quad \frac{1}{e} \frac{de}{dt} \sim \frac{1}{\tau} \quad \Delta P = \frac{\eta_e}{\tau^2} \quad \boxed{\Delta E = \Delta P. \tau = \frac{\eta_e}{\tau} . 2\pi a_0^3}$$

■ 31 – – L'énergie cinétique de la chute de la goutte vaut l'énergie potentielle de la goutte au départ soit $mgh = \mu_e 2\pi a_0^3 gh$. Avec la valeur de ΔE précédemment trouvée on obtient :

$$\boxed{\frac{E}{\Delta E} = \frac{\mu_e gh \tau}{\eta_e}} \quad \text{avec les valeurs numériques de l'énoncé on trouve} \quad E/\Delta E \sim 2.10^3 \quad \Delta E \sim 10^{-3} E$$

Avec cette valeur le nombre de rebonds serait supérieur à l'intervalle de 5 à 10 donné au début de l'énoncé. Ce modèle ne permet pas d'interpréter l'observation **O3**.

■ 32 – – Le nombre de Reynolds est le rapport de la force volumique d'inertie à la force volumique de viscosité. Ici la vitesse est indépendante du temps de sorte que le terme principal de l'accélération est l'accélération d'inertie. On peut alors remplacer la force volumique par l'énergie totale du système dans chacun des cas. Ainsi l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds est : $\boxed{\mathcal{R}_e \sim E/\Delta E \sim 2.10^3}$. Le nombre de Reynolds ainsi trouvé est trop grand et ne permet pas un régime non tourbillonnaire. Si on prend $\eta_{eff} = \eta_e \cdot \mathcal{R}_e$ on retombe sur une viscosité plus forte, les pertes pendant le rebond sont elles-même plus importantes, ce qui permet d'interpréter l'observation **O3**.

FIN DE LA PARTIE IV

V. – Étude des pertes dans l'air

V.A. – Ordres de grandeurs

■ 33 – – L'énergie cinétique de la goutte est égale à la variation de l'énergie potentielle de gravitation. $mv^2/2 = mg(h-z)$ soit $v = \sqrt{2g(h-z)}$

■ 34 – – On peut utiliser la formule de définition du nombre de Reynolds :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\|\mu_a(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v}\|}{\|\eta_a \Delta \vec{v}\|} \quad v = \sqrt{2g(h-z)} \quad \frac{dv}{dz} = \frac{g}{\sqrt{2g(h-z)}} \quad \|\Delta \vec{v}\| = \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{g^2}{2g(h-z)^{3/2}}$$

Dans le calcul précédent on a supprimé tous les signes – car à la fin on ne conserve que les modules. Le nombre de Reynolds a pour valeur :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\mu_a [2g(h-z)]^{3/2}}{\eta_a g}$$

Ce résultat ne contient pas le paramètre a_0 , or la formule du nombre de Reynolds est tirée d'un cours de mécanique des fluides. Ce résultat est bien homogène, on ne voit pas comment introduire un a_0 sans détruire l'homogénéité. Pour $h-z = 1$ cm $\mathcal{R}_e = 1,8.10^3$ et pour $z = 0$ $\mathcal{R}_e = 57.10^3$. Ces valeurs sont très élevées pour un régime non tourbillonnaire et la traînée ne peut pas être proportionnelle à la vitesse. D'ailleurs l'énoncé donne une valeur proportionnelle au carré de la vitesse.

■ 35 – – Le poids de la goutte est toujours dirigé vers le bas que nous choisirons pour orientation des vecteurs. Quand la goutte tombe la force de traînée est dirigée vers le haut de sorte que la somme des forces appliquées à la goutte est $2\pi a_0^3 \mu_e g - \mu_a \pi a_0^2 v^2$. Écrivons la somme des forces en mettant le poids en facteur pour obtenir un poids fictif $P_- = 2\pi a_0^3 \mu_e g (1 - \mu_a g h / \mu_e a_0)$. On fait de même lorsque la goutte remonte en changeant de signe dans la parenthèse et on a :

$$g_{\pm} = g(1 \pm \frac{\mu_a h}{\mu_e a_0}) \quad \gamma = \frac{\mu_a h}{\mu_e a_0} = 0,13$$

Ce nombre est bien inférieur à 1 de sorte que $1 - \gamma$ ne puisse pas être négatif : au lieu de descendre la goutte monterait indéfiniment avec $g_{\pm}$ négatif.

■ 36 – – Avec l'hypothèse de l'énoncé la seule force dissipative est due à la traînée. Lors du choc sur la plaque la vitesse se conserve en valeur absolue. Lors du premier choc la vitesse $v_1 = 2g_- h$. La goutte rebondit avec la même vitesse et atteint une altitude $h_1 = 2g_+ h_1$ soit :

$$h_1 = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} h \quad \text{ainsi de suite jusqu'à } n \quad h_n = \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^n h$$

■ 37 – – On prendra le nombre maximal de rebonds observable pour $h_n \geq 0,1 h$. En reportant cette valeur dans la formule ci dessus et en prenant le logarithme de chaque membre on trouve :

$$N = \frac{1}{\lg \frac{1+\mu_a h / \mu_e a_0}{1-\mu_a h / \mu_e a_0}} \quad A.N. \quad N = 8,8$$

On pourra prendre de l'ordre de 8 rebonds , du même ordre de grandeur que la réponse à la question 10.

francis.brouchier@prepas.org