

MODULATION ACOUSTO-OPTIQUE

I. — Ondes acoustiques dans un milieu compressible

❑ **1** — La conservation de la masse δm de la tranche initialement au repos, puis après déformation permet d'écrire : $\delta m = \varrho_0 S \, dz = \varrho(z, t) \times S \times [z + dz + \xi(z + dz, t) - (z + \xi(z, t))]$, d'où $\varrho_0 \, dz = \varrho(z, t) \left(dz + \frac{\partial \xi}{\partial z} \, dz \right)$. On en déduit :

$$\boxed{\varrho(z, t) = \frac{\varrho_0}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}}} \quad (1)$$

❑ **2** — En appliquant la seconde loi de Newton (en projection sur z) à une tranche de fluide initialement au repos entre les abscisses z et $z + dz$, on trouve

$$\varrho_0 S \, dz \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = P(z, t) S - P(z + dz, t) S \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varrho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial z}} \quad (2)$$

En réalité, il faudrait considérer les pressions aux endroits exacts où se trouvent les parois délimitant la tranche à l'instant t , soit $P[z + \xi(z, t), t]$ et $P[z + dz + \xi(z + dz, t), t]$, puis faire un développement limité. De même, l'accélération de la tranche est $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ et ne s'identifie à $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ qu'en négligeant le terme advectif $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v}$. Cependant, l'énoncé supprimait ce point délicat en posant $\vec{v}(z, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \hat{e}_z$ comme définition de la vitesse de la tranche.

❑ **3** — Par dérivation de fonction composée, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z}$. Par ailleurs, le coefficient de compressibilité isentropique permet d'écrire $\frac{\partial P}{\partial \varrho} = \frac{1}{\chi_s \varrho}$ et l'équation (1) fournit $\frac{\partial \varrho}{\partial z} = -\frac{\varrho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2}$.

On en déduit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_s \varrho_0} \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)}} \quad (3)$$

❑ 4 — Dans l'approximation acoustique, la relation (3) devient $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_s \varrho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$. Une dérivation temporelle donne alors $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$ où $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varrho_0 \chi_s}}$ est la célérité de l'onde.

Les solutions sinusoïdales progressives directes sont de la forme $v(z, t) = v_0 \cos(\Omega t - Kz)$ avec $K = \frac{\Omega}{c_0}$ (relation de dispersion obtenue en injectant la forme de v dans l'équation de propagation de d'Alembert).

❑ 5 — Pour un gaz parfait en compression isentropique (adiabatique réversible), la loi de Laplace s'écrit $P \varrho^{-\gamma} = \text{cte}$ et sa différentielle logarithmique est : $-\gamma \frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{dP}{P} = 0$. Par conséquent, la compressibilité isentropique s'écrit : $\chi_s = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial P} \Big|_s = \frac{1}{\gamma P}$. De plus, la loi des gaz parfaits donne $\varrho_0 = \frac{MP}{RT_0}$, ce qui donne finalement : $c_{\text{air}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} \simeq 347 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans un solide, $c_{\text{sol}} \simeq 5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, donc $c_{\text{sol}} \gg c_{\text{air}}$.

II. — Modèle du modulateur acousto-optique (MAO)

❑ 6 — La forme du champ électrique donnée par l'énoncé implique que les ondes sont polarisées rectilignement selon $\hat{e}_y$. Le champ électrique étant une onde plane (transverse), on en déduit $\vec{k}_i \perp \hat{e}_y$, $\vec{k}_r \perp \hat{e}_y$ et $\vec{k}_t \perp \hat{e}_y$ d'où $k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = 0$. Les rayons incidents, réfléchis et transmis sont tous contenus dans le même plan $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_z)$, qui correspond au plan d'incidence.

❑ 7 — La composante tangentielle du champ $\vec{E}$ est continue à la traversée de l'interface. La relation de continuité s'écrit donc, en $z = 0$:

$$E_0 \exp[j(\omega t - k_{xi}x)] + \mathcal{R}E_0 \exp[j(\omega t - k_{xr}x)] = \mathcal{T}E_0 \exp[j(\omega t - k_{xt}x)].$$

En particulier, cette relation doit être vraie pour tout x et les coefficients E_0 , $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ sont non nuls, donc $k_{xi} = k_{xr} = k_{xt} = k_x$. En traduisant ces composantes à l'aide de la relation de dispersion « $k = \frac{n\omega}{c}$ » dans chaque milieu, on obtient les lois de Descartes :

$$\frac{n\omega}{c} \sin \theta = \frac{n\omega}{c} \sin(-\theta_r) = \frac{n'\omega}{c} \sin \theta' \Rightarrow \theta = -\theta_r \quad \text{et} \quad n \sin \theta = n' \sin \theta'. \quad (4)$$

❑ 8 — Les relations de structure des ondes planes monochromatiques s'écrivent $\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega}$, $\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega}$ et $\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega}$, soit :

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \frac{n}{c} E_0 \exp[j(\omega t - k_x x - k_{iz} z)] [\cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_z] \\ \vec{B}_r &= \frac{n}{c} \mathcal{R} E_0 \exp[j(\omega t - k_x x - k_{rz} z)] [-\cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_z] \\ \vec{B}_t &= \frac{n'}{c} \mathcal{T} E_0 \exp[j(\omega t - k_x x - k_{tz} z)] [\cos \theta' \hat{e}_x + \sin \theta' \hat{e}_z] \end{aligned}$$

Les milieux n'ont pas de propriétés magnétiques. Du point de vue du champ magnétique, ils se comportent comme le vide ($\mu_r = 1$), ce qui n'introduit pas de discontinuité du champ magnétique à l'interface. À l'interface $z = 0$, la continuité des composantes tangentielles et normales du champ magnétique $\vec{B}$ donne :

$$n \cos \theta - n' \mathcal{R} \cos \theta = n' \mathcal{T} \cos \theta' \quad \text{et} \quad 1 + \mathcal{R} = \mathcal{T}.$$

Ce système de deux équations à deux inconnues se résout en :

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{n \cos \theta - n' \cos \theta'}{n \cos \theta + n' \cos \theta'}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{T} = \frac{2n \cos \theta}{n \cos \theta + n' \cos \theta'}}. \quad (5)$$

❑ 9 — La deuxième loi de Descartes peut s'écrire $n \sin \theta = (n + \delta n) \sin(\theta + \delta \theta)$. Un développement limité à l'ordre 1 donne $n \sin \theta = (n + \delta n) [\sin \theta + \delta \theta \cos \theta]$, soit encore :

$$\boxed{\delta \theta = -\frac{\delta n}{n} \tan \theta}. \quad (6)$$

❑ 10 — Pour un faible saut d'indice δn , la relation (5) donnant le coefficient de réflexion devient : $\delta \mathcal{R} = \frac{n \cos \theta - (n + \delta n) \cos(\theta + \delta \theta)}{n \cos \theta + (n + \delta n) \cos(\theta + \delta \theta)}$. Or, au premier ordre, $\cos(\theta + \delta \theta) \simeq \cos \theta - \delta \theta \sin \theta$ donc $\delta \mathcal{R} = \frac{-\delta n \cos \theta + n \delta \theta \sin \theta}{2n \cos \theta}$. En remplaçant $\delta \theta$ par son expression (6), on obtient $\delta \mathcal{R} = -\frac{\delta n}{2n} (\tan^2 \theta + 1)$, soit finalement :

$$\boxed{\delta \mathcal{R} = -\frac{\delta n}{2n \cos^2 \theta}}. \quad (7)$$

❑ 11 — En remarquant que $\alpha = \pi/2 - \theta$, la relation (7) devient $\delta \mathcal{R} = -\frac{\delta n}{2n \sin^2 \alpha}$. Or, $\delta n = K n_1 \sin(\Omega t - K z) dz$, donc $\delta \mathcal{R}(z, t) = -\frac{K n_1}{2n \sin^2 \alpha} \sin(\Omega t - K z) dz$. Comme $n \simeq n_0$, on obtient, en ne gardant que les termes d'ordre 1 :

$$\boxed{\delta \mathcal{R}(z, t) \simeq -\frac{K n_1}{2n_0 \sin^2 \alpha} \sin(\Omega t - K z) dz}. \quad (8)$$

❑ 12 — Le déphasage ϕ est lié à la différence de marche optique δ par $\phi = \frac{2\pi \delta}{\lambda_0}$, où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide. Le calcul de δ s'apparente au calcul classique de la différence de marche entre deux rayons arrivant sous l'incidence α et traversant deux traits consécutifs d'un réseau séparés de la distance z : $\delta = 2n_0 z \sin \alpha$. Finalement :

$$\boxed{\phi(z) = \frac{2\pi \times 2n_0 z \sin \alpha}{\lambda_0} = \frac{2\pi \times 2z \sin \alpha}{\lambda} = 2kz \sin \alpha}. \quad (9)$$

❑ 13 — $\underline{E}_r = \int_{-e/2}^{e/2} \delta \mathcal{R} E_0 \exp[j(\omega t + \phi(z))]$ devient, par la relation (9) :

$$\underline{E}_r = -\frac{K n_1 E_0}{2n_0 \sin^2 \alpha} \int_{-e/2}^{e/2} \sin(\Omega t - K z) \exp[j(\omega t + \phi(z))] dz$$

qui se transforme par la formule de Moivre en :

$$\underline{E_r} = -\frac{Kn_1 E_0}{2n_0 \sin^2 \alpha} \int_{-e/2}^{e/2} \frac{\exp[j(\Omega t - Kz)] - \exp[-j(\Omega t - Kz)]}{2j} \exp[j(\omega t + \phi(z))] dz.$$

$$\Rightarrow \underline{E_r} = -\frac{Kn_1 E_0}{4n_0 j \sin^2 \alpha} e^{j\omega t} \left[\int_{-e/2}^{e/2} e^{j\Omega t} e^{-j(K-2k \sin \alpha)z} dz - \int_{-e/2}^{e/2} e^{-j\Omega t} e^{j(K+2k \sin \alpha)z} dz \right].$$

Le calcul du premier terme intégral donne :

$$\int_{-e/2}^{e/2} \exp[j\Omega t] \exp[-j(K-2k \sin \alpha)z] dz = e^{j\Omega t} \times \frac{e^{-j(K-2k \sin \alpha)e/2} - e^{j(K-2k \sin \alpha)e/2}}{-j(K-2k \sin \alpha)},$$

soit :

$$\int_{-e/2}^{e/2} e^{j\Omega t} e^{-j(K-2k \sin \alpha)z} dz = \exp[j\Omega t] \times e \times \text{sinc} \left[(K-2k \sin \alpha) \frac{e}{2} \right]$$

De même le second terme donne :

$$\int_{-e/2}^{e/2} e^{j\Omega t} e^{-j(K+2k \sin \alpha)z} dz = \exp[j\Omega t] \times e \times \text{sinc} \left[(K+2k \sin \alpha) \frac{e}{2} \right]$$

Finalement :

$$\underline{E_r} = -\frac{Kn_1 e E_0}{4n_0 j \sin^2 \alpha} e^{j\omega t} \times [e^{j\Omega t} \times \text{sinc}((K-2k \sin \alpha)e/2) - e^{-j\Omega t} \times \text{sinc}((K+2k \sin \alpha)e/2)] \quad (10)$$

L'expression est bien de la forme demandée avec $\underline{A} = -\frac{Kn_1 e E_0}{4n_0 j \sin^2 \alpha}$ et $\beta(t) = \Omega t$.

□ **14** — Puisque la fonction sinus cardinal est maximale pour $x = 0$, les deux termes contribuant à $\underline{E_r}$ sont respectivement maximaux pour $\sin \alpha_B = \pm \frac{K}{2k}$ soit, en ne gardant que la valeur positive comme demandé par l'énoncé :

$$\sin \alpha_B = \frac{\lambda}{2\Lambda}. \quad (11)$$

L'angle α_B n'existe que si $\frac{\Lambda}{2\lambda} \leq 1$. C'est toujours le cas car $\lambda \ll \Lambda$ (longueur d'onde optique, de l'ordre de la centaine de nanomètres, très inférieure à la longueur d'onde acoustique).

□ **15** — Si l'on se place à l'incidence de Bragg, $\delta(z + \Lambda) - \delta(z) = -2 \sin \alpha_B \Lambda$, donc :

$$\delta(z + \Lambda) - \delta(z) = \pm \lambda \quad (12)$$

ce qui correspond bien à la condition d'interférence constructive.

□ **16** — La position du centre du pic correspondant au premier terme de l'expression (10) est : $\sin \alpha_B = 6,0 \cdot 10^{-3}$. Les premières annulations de part et d'autre de ce pic vérifient :

$$K - 2k \sin \alpha_{1^{\text{er}} \text{ annul.}} = \pm \frac{2\pi}{e} \Rightarrow \sin \alpha_{1^{\text{er}} \text{ annul.}} = -\frac{\lambda}{2} \left[\pm \frac{1}{e} - \frac{1}{\Lambda} \right] \stackrel{(12)}{\Rightarrow} \sin \alpha_{1^{\text{er}} \text{ annul.}} = \sin \alpha_B \pm \frac{\lambda}{2e}.$$

La largeur du pic (écart entre les pieds de part et d'autre du pic) est donc :

$$\Delta \sin \alpha = \frac{\lambda}{e} = \frac{\lambda_0}{e n_0} \simeq 1,5 \cdot 10^{-4} \ll \sin \alpha_B. \quad (13)$$

L'autre pic est centré en $\sin(-\alpha_B)$, donc l'écart entre les centres des pics est $2 \sin(\alpha_B) \simeq 12 \cdot 10^{-3}$. Cet écart est très supérieur à la largeur $\Delta \sin \alpha \simeq 1,5 \cdot 10^{-4}$ d'un pic, donc les pics ne se chevauchent pas. Quand on calcule l'intensité lumineuse réfléchie (éclairage) $I_r = \underline{E_r} \cdot \underline{E_r}^*$, les « termes croisés » issus du produit des deux pics sont donc négligeables devant les termes correspondant au module de chaque pic au carré. Il ne reste donc que deux pics lumineux partant dans les directions $\pm \sin \alpha_B$. Pour le pic centré en $\alpha = \alpha_B$, il reste :

$$\underline{E_r} \simeq \underline{A} \exp[j(\omega + \Omega)t] \times \text{sinc}[(K - 2k \sin \alpha)e/2].$$

L'onde réfléchie est de pulsation $\omega + \Omega$ donc décalée de Ω par rapport à l'onde transmise.

III. — Interférométrie hétérodyne

❑ 17 — Ce montage est particulier car il existe un décalage en fréquence, introduit par le MAO, entre les faisceaux des deux bras de l'interféromètre. L'interférométrie hétérodyne met en jeu deux faisceaux de fréquences différentes, à l'inverse du montage homodyne classique pour lequel les faisceaux sortant de l'interféromètre ont la même fréquence. Ici, la figure d'interférence est variable dans le temps.

❑ 18 — Le courant $i(t)$, proportionnel à l'intensité lumineuse reçue, se calcule par :

$$\begin{aligned} i(t) &= K[\underline{A_0} + \underline{A_1}] \times [\underline{A_0} + \underline{A_1}]^* = K(a_0 e^{j\omega t} + a_1 e^{j[(\omega+\Omega)t+\varphi(t)]})(a_0 e^{-j\omega t} + a_1 e^{-j[(\omega+\Omega)t+\varphi(t)]}) \\ &\Rightarrow i(t) = Ka_0^2 + Ka_1^2 + 2Ka_0a_1 \cos(\Omega t + \varphi(t)). \end{aligned}$$

Le signal $S(t)$ obtenu après filtrage de la composante continue est :

$$S(t) = S_0 \cos(\Omega t + \varphi(t)). \quad (14)$$

C'est un signal de battement dont l'amplitude vaut $S_0 = 2Ka_0a_1$. L'amplitude du signal sera donc d'autant plus importante que le produit a_0a_1 est grand ce qui nécessite un excellent recouvrement des signaux au niveau de la photodiode.

❑ 19 — Puisque φ_0 est le déphasage entre les deux faisceaux lorsque $d_A = 0$, la différence de marche supplémentaire δ entre les deux faisceaux est équivalente à celle introduite par une lame d'air d'épaisseur $d_A(t)$ éclairée sous l'angle d'incidence i . Ce calcul classique du cours sur l'interféromètre de Michelson donne $\delta = 2d_A(t) \cos i$, d'où, en tenant compte de $d_A(t) = d_0 \sin(2\pi ft)$:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{4\pi}{\lambda_0} d_0 \sin(2\pi ft) \cos i. \quad (15)$$

Le signal $S(t)$ est dit modulé en phase car le terme de phase $\varphi(t)$ dépend du temps t .

❑ 20 — Le signal S s'écrit donc

$$S(t) = S_0 \cos\left(\Omega t + \varphi_0 + 4\pi \frac{d_0}{\lambda_0} \sin(2\pi ft) \cos i\right)$$

soit encore, en développant le cosinus :

$$S(t) = S_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) \cos\left(4\pi \frac{d_0}{\lambda_0} \sin(2\pi f t) \cos i\right) - S_0 \sin(\Omega t + \varphi_0) \sin\left(4\pi \frac{d_0}{\lambda_0} \sin(2\pi f t) \cos i\right).$$

Dans le cas de faibles amplitudes de vibrations du miroir $\left(\frac{d_0}{\lambda_0} \ll 1\right)$, on peut faire les deux approximations suivantes à l'ordre 1 inclus en $\frac{d_0}{\lambda_0}$:

$$\cos\left(4\pi \frac{d_0}{\lambda_0} \sin(2\pi f t) \cos i\right) \simeq 1 \quad \text{et} \quad \sin\left(4\pi \frac{d_0}{\lambda_0} \sin(2\pi f t) \cos i\right) \simeq 4\pi \frac{d_0}{\lambda_0} \sin(2\pi f t) \cos i.$$

On en déduit

$$S(t) = S_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) - \frac{4\pi}{\lambda_0} S_0 d_0 \cos i \sin(\Omega t + \varphi_0) \sin(2\pi f t) \quad (16)$$

Pour déterminer le spectre en amplitude, on linéarise le second terme de (16), ce qui donne :

$$S(t) = S_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) - S_1 \cos[(\Omega - 2\pi f)t + \varphi_0] + S_1 \cos[(\Omega + 2\pi f)t + \varphi_0] \quad (17)$$

avec $S_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} S_0 d_0 \cos i$. L'équation (17) montre que le spectre du signal $S(t)$ possède bien un pic central d'amplitude S_0 à la fréquence $\frac{\Omega}{2\pi}$ et deux pics latéraux d'amplitude $S_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} S_0 d_0 \cos i$ et de fréquences respectives $\frac{\Omega}{2\pi} - f$ et $\frac{\Omega}{2\pi} + f$.

□ **21** — On peut donc exprimer l'amplitude d_0 de vibration du miroir par

$$d_0 = \frac{S_1}{S_0} \frac{\lambda_0}{2\pi \cos i}. \quad (18)$$

Par définition de l'échelle des décibels en amplitude, $\left(\frac{S_1}{S_0}\right)_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{S_1}{S_0}$. Par conséquent, $\left(\frac{S_1}{S_0}\right)_{\text{dB}} = -60 \text{ dB}$ équivaut à $\frac{S_1}{S_0} = 10^{-60/20}$, d'où, d'après (18) :

$$d_{0\text{min}} = 10^{-\frac{60}{20}} \frac{632,8 \times 10^{-9}}{2\pi \cos(15^\circ)} \simeq 0,1 \text{ nm}. \quad (19)$$

Ceci correspond à la taille d'un atome ! La méthode de détection hétérodyne est donc extrêmement sensible pour mesurer les amplitudes de vibration d'un miroir dans un dispositif interférentiel. Plus généralement, elle permet de mesurer des variations de chemin optique très faibles (inférieures au nanomètre) grâce à son excellent rapport signal sur bruit. On vérifie également l'hypothèse initiale $d_0 \ll \lambda_0$.

FIN DE L'ÉPREUVE