

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP)
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2013

CORRIGÉ DE LA SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PSI

(Durée de l'épreuve: 4 heures)

PHYSIQUE II — PSI.

ÉNERGIE ÉOLIENNE



FIGURE 1 – Eolienne de type Darrieus

I. — Eolienne de type Darrieus

❑ 1 — Le nombre de Reynolds est une évaluation du rapport du terme advectif sur le terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes :

$$\text{Re} = \left| \frac{\varrho (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}}{\eta \Delta \vec{v}} \right| \sim \frac{\varrho \times U \times 2R}{\eta} = \frac{1,3 \times 60 / 3,6 \times 10}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 1,2 \cdot 10^7.$$

Ce rapport est très supérieur à 1, montrant que les termes de viscosité sont négligeables dans l'écoulement à l'échelle L . En dehors de la couche limite qui existe près de parois solides, l'écoulement peut être considéré comme parfait (mais pas près des parois).

❑ 2 — Le tube de courant s'évase. C'est normal car l'éolienne ralentit le vent (son rôle est de prélever de l'énergie cinétique au vent). Par ailleurs, l'écoulement est incompressible (car il est non contraint par des parois et largement subsonique). La conservation du débit implique que les lignes de courant s'écartent les unes des autres.

❑ 3 — L'écoulement est incompressible, permanent, parfait (voir question 1) et non soumis à des actions autres que celles de la pesanteur sur chaque portion $-\infty \rightarrow u^+$ et $u^- \rightarrow A$. On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli sur chaque portion de la ligne de courant considérée :

$$P_0 + \varrho \frac{v_\infty^2}{2} = P_{u^+} + \varrho \frac{v_{u^+}^2}{2} \quad \text{et} \quad P_A + \varrho \frac{v_A^2}{2} = P_{u^-} + \varrho \frac{v_{u^-}^2}{2}.$$

Par différence membre à membre de ces deux lignes, en tenant compte de $P_A = P_0$ conformément à l'énoncé, on obtient :

$$\boxed{P_{u^+} - P_{u^-} = \frac{1}{2}\varrho(v_\infty^2 - v_A^2).} \quad (1)$$

❑ 4 — Entre les points u^+ et u^- se trouve le lieu de passage des pales. L'écoulement est alors soumis à une force de la part des pales, ce qui rend inapplicable le théorème de Bernoulli. De plus, la notion de ligne de courant n'a plus de sens dans cette région car l'écoulement y est turbulent.

❑ 5 — On raisonne sur la figure 2. Le système fermé étudié est une portion de tube de courant traversant le cylindre éolien au niveau du point, comprise entre les sections orthogonales B et C à l'instant t , et entre les sections B' et C' à l'instant $t + dt$. (B est le point u^+ et C est le point u^-). Le théorème de la quantité de mouvement appliqué à ce système entre les instants t et $t + dt$ s'écrit, dans le référentiel galiléen du sol :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \iff \frac{\vec{p}_{B'C'} - \vec{p}_{BC}}{dt} = P_{u^+} d\vec{S}_u - P_{u^-} d\vec{S}_u + \vec{F}_{\text{lat.}} + \underbrace{d\vec{F}_{dS_u \rightarrow \text{syst.}}}_{=-d\vec{F}_u}$$

En faisant tendre u^+ et u^- vers u , la résultante des actions latérales $\vec{F}_{\text{lat.}}$ sur le système tend vers zéro (car ces actions de pression sont proportionnelles à l'aire de la surface latérale et la pression reste finie). Par ailleurs, en utilisant la permanence de l'écoulement et l'extensivité de la quantité de mouvement, $\vec{p}_{B'C'} - \vec{p}_{BC} = \vec{p}_{CC'} - \vec{p}_{BB'}$. Le théorème de la quantité de mouvement devient :

$$\frac{\delta m_{CC'}}{dt} \vec{v}_C - \frac{\delta m_{BB'}}{dt} \vec{v}_B = P_{u^+} d\vec{S}_u - P_{u^-} d\vec{S}_u - d\vec{F}_u.$$

Le membre de gauche de cette égalité est nul car $\delta m_{BB'} = \delta m_{CC'}$ (à cause de la permanence de l'écoulement) et $\vec{v}_B = \vec{v}_C = \vec{v}_u$ (du fait que B et C sont « infiniment » proches de u). Il reste donc seulement :

$$\boxed{d\vec{F}_u = (P_{u^+} - P_{u^-}) d\vec{S}_u} \quad (2)$$

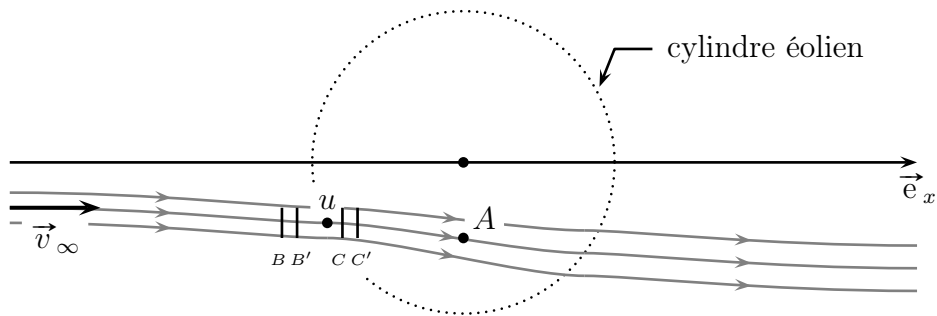


FIGURE 2 — Lignes de courant du vent (en gris) et trace du cylindre éolien (en pointillés) en vue de dessus.

❑ 6 — On recommence le même raisonnement sur le même tube de courant s'étendant cette fois de $-\infty$ à A . Les pressions en amont et aval sont toutes deux égales à P_0 . Sur la majeure partie de la surface latérale de ce tube, la pression est également P_0 , sauf au voisinage du

cylindre éolien, mais cette contribution est négligeable par rapport au reste. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\underbrace{\overrightarrow{dF}_{dS_u \rightarrow \text{syst.}}}_{-\overrightarrow{dF}_u} + \underbrace{P_0 \overrightarrow{dS}_\infty + P_0 \overrightarrow{dS}_A + \iint_{S_{\text{lat}}} P_0 \overrightarrow{dS}}_{=\vec{0}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\delta m}{dt} (\vec{v}_A - \vec{v}_\infty)$$

Les termes de pression P_0 disparaissent, car la réunion des trois termes est la résultante des actions d'une pression uniforme sur une surface fermée. Enfin, le débit massique peut s'écrire : $\frac{\delta m}{dt} = \rho dS_u v_u$. Il reste donc :

$$\boxed{\overrightarrow{dF}_u = \rho dS_u v_u (\vec{v}_A - \vec{v}_\infty).} \quad (3)$$

On projette les relations (2) et (3) sur $\vec{e}_x$, puis on les identifie, ce qui donne :

$$P_{u+} - P_{u-} = \rho v_u (v_\infty - v_A). \quad (4)$$

Enfin, en identifiant (1) et (4), on obtient :

$$\boxed{v_u = \frac{1}{2} (v_\infty + v_A) \iff v_A = 2v_u - v_\infty.} \quad (5)$$

❑ 7 — En faisant attention à l'orientation des angles (θ est positif sur la figure 3) :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{t} = \sin \theta \quad \text{et} \quad \vec{e}_x \cdot \vec{n} = \cos \theta. \quad (6)$$

Par conséquent :

$$\boxed{dT_u = dF_u \sin \theta \quad \text{et} \quad dN_u = dF_u \cos \theta.} \quad (7)$$

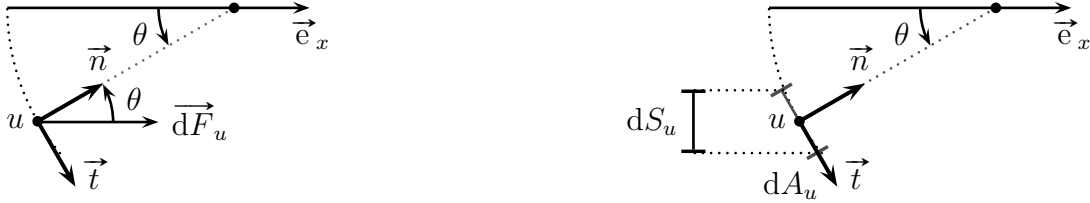


FIGURE 3 — Projections dans la base $(\vec{t}, \vec{n})$.

❑ 8 — Par définition des coefficients aérodynamiques de la pale :

$$\overrightarrow{dF}_u = \frac{1}{2} \rho W_u^2 \frac{\sigma}{2\pi} dA_u [C_{T_u} \vec{t} + C_{N_u} \vec{n}]$$

En projetant cette relation sur $\vec{e}_x$ et en tenant compte de (6), on obtient :

$$dF_u = \frac{1}{2} \rho W_u^2 \frac{\sigma}{2\pi} dA_u [C_{T_u} \sin \theta + C_{N_u} \cos \theta]. \quad (8)$$

Enfin, par projection (voir figure 3), $\boxed{dA_u = \frac{dS_u}{\cos \theta}}$, donc l'équation (8) devient :

$$\boxed{dF_u = \frac{1}{2} \rho W_u^2 \frac{\sigma}{2\pi} dS_u [C_{T_u} \tan \theta + C_{N_u}].} \quad (9)$$

❑ 9 — On remplace le membre de gauche de (9) par (2) projetée sur $\vec{e}_x$, dans laquelle on exprime la différence des pressions par (1), ce qui donne :

$$\varrho \times v_u \times \underbrace{(v_\infty - v_A)}_{\stackrel{(2)}{=} 2(v_\infty - v_u)} = \frac{1}{2} \varrho W_u^2 \frac{\sigma}{2\pi} dS_u [C_{T_u} \tan \theta + C_{N_u}].$$

On simplifie ensuite par ϱ et on divise membre à membre par v_∞^2 pour adimensionner les vitesses :

$$\left(\frac{v_u}{v_\infty} \right) \times \left(1 - \frac{v_u}{v_\infty} \right) = \frac{\sigma}{8\pi} \times \left(\frac{W_u}{v_\infty} \right)^2 \times (C_{N_u} + C_{T_u} \tan \theta). \quad (10)$$

❑ 10 — La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{v}_{\text{vent/pale}} = \vec{v}_{\text{vent/sol}} + \vec{v}_{\text{sol/pale}} = \vec{v}_{\text{vent/sol}} - \vec{v}_{\text{pale/sol}}.$$

Avec les notations de l'énoncé, cela s'écrit :

$$\vec{W}_u = \vec{v}_u - \vec{U} = \vec{v}_u - \omega R \vec{t}. \quad (11)$$

L'angle α_u étant défini par $\alpha_u = (-\vec{W}_u, \vec{t})$, on obtient son cosinus par projection de $-\vec{W}_u$ sur $\vec{t}$:

$$\cos \alpha_u = \frac{-\vec{W}_u \cdot \vec{t}}{W_u} \stackrel{(11)}{=} \frac{-\vec{v}_u \cdot \vec{t} + \omega R}{W_u} \stackrel{(6)}{\Rightarrow} \boxed{\cos \alpha_u = \frac{-v_u \sin \theta + \omega R}{W_u}}. \quad (12)$$

En revanche, $\sin \alpha_u$ s'obtient par projection de $+\vec{W}_u$ sur $\vec{n}$:

$$\sin \alpha_u = \frac{+\vec{W}_u \cdot \vec{n}}{W_u} \stackrel{(11)}{=} \frac{\vec{v}_u \cdot \vec{n}}{W_u} \stackrel{(6)}{\Rightarrow} \boxed{\sin \alpha_u = \frac{v_u \cos \theta}{W_u}}. \quad (13)$$

En divisant les numérateurs et dénominateurs de (12) et (13) par v_∞ , on adimensionne les vitesses et on fait apparaître les facteurs $x = \frac{v_u}{v_\infty}$ et $\lambda = \frac{\omega R}{v_\infty}$:

$$\boxed{\cos \alpha_u = \frac{-x \sin \theta + \lambda}{\frac{W_u}{v_\infty}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin \alpha_u = \frac{+x \cos \theta}{\frac{W_u}{v_\infty}}}. \quad (14)$$

❑ 11 — On remplace $\sin \alpha_u$ et $\cos \alpha_u$ par leurs expressions (14) dans les expressions (approximatives) des coefficients aérodynamiques donnés par l'énoncé :

$$C_{T_u} = 2\pi \sin^2 \alpha_u \stackrel{(14)}{\Rightarrow} \boxed{C_{T_u} = 2\pi x^2 \left(\frac{v_\infty}{W_u} \right)^2 \cos^2 \theta} \quad (15)$$

$$C_{N_u} = 2\pi \sin \alpha_u \cos \alpha_u \stackrel{(14)}{\Rightarrow} \boxed{C_{N_u} = 2\pi \left(\frac{v_\infty}{W_u} \right)^2 \times x \cos \theta \times (-x \sin \theta + \lambda)} \quad (16)$$

On injecte (15) et (16) dans (10) et on utilise la notation $x = \frac{v_u}{v_\infty}$:

$$x(1-x) = \frac{\sigma}{8\pi} \times \left(\frac{W_u}{v_\infty} \right)^2 \times \left[2\pi \left(\frac{v_\infty}{W_u} \right)^2 \times x \cos \theta \times (-x \sin \theta + \lambda) + 2\pi x^2 \left(\frac{v_\infty}{W_u} \right)^2 \cos^2 \theta \tan \theta \right].$$

On peut simplifier membre à membre par x , qui est non nul, ce qui donne le résultat demandé :

$$x = \frac{v_u}{v_\infty} = 1 - \frac{\sigma \lambda}{4} \cos \theta. \quad (17)$$

On remarque que cette fonction est paire en θ . Dans ce modèle simplifié de l'éolienne Darrieus, l'écoulement arrivant sur la face amont du cylindre éolien est symétrique par rapport à un plan contenant l'axe de ce cylindre et le vecteur vitesse $\vec{v}_\infty$.

□ **12** — De la relation (11), on tire la norme de $\vec{W}_u$:

$$W_u = \sqrt{\vec{W}_u^2} = \sqrt{v_u^2 + (\omega R)^2 - 2 \vec{v}_u \cdot \omega R \vec{t}} \stackrel{(6)}{\Rightarrow} W_u = \sqrt{v_u^2 + (\omega R)^2 - 2 v_u \omega R \sin \theta}. \quad (18)$$

En remplaçant W_u par (18) dans l'expression (14) de $\sin \alpha_u$, on obtient :

$$\sin \alpha_u = \frac{x \cos \theta}{\sqrt{x^2 + \lambda^2 - 2x\lambda \sin \theta}}. \quad (19)$$

En remplaçant x par (17) dans (19), on trouve :

$$\sin \alpha_u = \frac{\left(1 - \frac{\sigma \lambda}{4} \cos \theta\right) \cos \theta}{\sqrt{\left(1 - \frac{\sigma \lambda}{4} \cos \theta\right)^2 + \lambda^2 - 2 \left(1 - \frac{\sigma \lambda}{4} \cos \theta\right) \lambda \sin \theta}}. \quad (20)$$

Avec les valeurs numériques $\lambda = 3,7$ et $\sigma = 0,10$, on peut tracer $\sin \alpha_u$ en fonction de θ sur l'intervalle $[-\pi/2; \pi/2]$ (intervalle représentant la face amont du cylindre éolien).

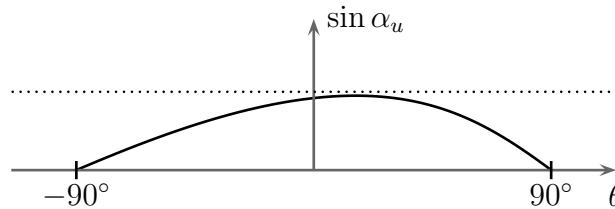


FIGURE 4 – Tracé de $\sin \alpha_u$ en fonction de θ . La ligne en pointillés indique la valeur $\sin(15^\circ) \simeq 0,259$. La courbe reste en dessous de cette valeur, ce qui assure que la pale ne décroche pas.

□ **13** — L'incompressibilité de l'écoulement impose la conservation du débit volumique le long d'un même tube de courant, qui s'écrit :

$$v_m \, dS_m = v_u \, dS_u = v_d \, dS_d \quad \Rightarrow \quad \frac{dS_u}{dS_m} = \frac{v_m}{v_u} \quad \text{et} \quad \frac{dS_d}{dS_m} = \frac{v_m}{v_d}. \quad (21)$$

Par ailleurs, la section moyenne s'écrit comme indiqué dans l'énoncé :

$$dS_m = \frac{dS_u + dS_d}{2} \stackrel{(21)}{\Rightarrow} 1 = \frac{1}{2} \left[\frac{v_m}{v_u} + \frac{v_m}{v_d} \right] \quad \Rightarrow \quad v_m = \frac{2 v_u v_d}{v_u + v_d}. \quad (22)$$

En remplaçant v_m par son expression (22) dans (21), on obtient :

$$\frac{dS_u}{dS_m} = \frac{2 v_d}{v_u + v_d} \quad \text{et} \quad \frac{dS_d}{dS_m} = \frac{2 v_u}{v_u + v_d}. \quad (23)$$

□ **14** — La définition de dT_u est :

$$dT_u = \frac{1}{2} \varrho \frac{\sigma}{2\pi} C_{T_u} W_u^2 dA_u. \quad (24)$$

Or, la figure 3 montre que :

$$dA_u = \frac{dS_u}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{dS_u}{dS_m} \times dS_m \stackrel{(23)}{=} \frac{2 v_d}{v_u + v_d} \times R d\theta dz. \quad (25)$$

Les relations (24) et (25) donnent l'expression de dT_u demandée :

$$dT_u = \frac{1}{2} \varrho \frac{\sigma}{2\pi} \frac{2 R v_d}{v_u + v_d} C_{T_u} W_u^2 d\theta dz. \quad (26)$$

□ **15** — Pour avoir le moment élémentaire $d\Gamma_u$ par rapport à l'axe de rotation de $\overrightarrow{dT_u}$, il suffit de multiplier dT_u par le bras de levier R :

$$d\Gamma_u = dT_u \times R \stackrel{(26)}{=} \frac{1}{2} \varrho \frac{\sigma}{2\pi} \frac{2 R^2 v_d}{v_u + v_d} C_{T_u} W_u^2 d\theta dz.$$

En utilisant (15) pour remplacer C_{T_u} dans cette expression, on obtient :

$$d\Gamma_u = \varrho \sigma \frac{R^2 v_d}{v_u + v_d} x^2 v_\infty^2 \cos^2 \theta d\theta dz.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction par v_∞ , on fait apparaître x et y . Pour avoir le moment Γ_u demandé, il faut sommer les moments élémentaires (intégrer sur toute la face amont du cylindre éolien), ce qui donne l'expression demandée :

$$\Gamma_u = \int_{z=0}^H \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} d\Gamma_u = \varrho \sigma H R^2 v_\infty^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{yx^2}{x+y} \cos^2(\theta) d\theta. \quad (27)$$

□ **16** — Le moment total exercé par le vent sur l'éolienne est $\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_u + \Gamma_d$ où les expressions de chaque terme sont fournies par l'énoncé. On remarque que φ peut être remplacé par ψ dans l'intégrale de Γ_d car la variable d'intégration est muette. Par conséquent, les deux intégrales se regroupent en une seule :

$$\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_u + \Gamma_d = \varrho \sigma v_\infty^2 R^2 H \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\frac{x^2 y + xy^2}{x+y}}_{=xy} \cos^2(\psi) d\psi.$$

La puissance fournie par ce moment à l'éolienne est le produit du moment par la vitesse angulaire de rotation :

$$\mathcal{P} = \Gamma_{\text{tot}} \times \omega = \varrho \sigma \omega v_\infty^2 R^2 H \int_{-\pi/2}^{\pi/2} xy \cos^2(\psi) d\psi.$$

Dans le préfacteur, on peut faire apparaître $\lambda = \frac{\omega R}{v_\infty}$ ainsi que $k = \frac{\sigma \lambda}{2}$. Ce facteur k intervient également dans les expressions de x et y , ce qui donne l'expression demandée de la puissance :

$$\mathcal{P} = 2 \varrho v_\infty^3 R H J(k) \quad (28)$$

avec

$$J(k) = k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\left(1 - \frac{k}{2} \cos \psi\right)}_x \underbrace{\left(1 - \frac{3k}{2} \cos \psi\right)}_y \cos^2(\psi) d\psi \quad \text{et} \quad k = \frac{\sigma\lambda}{2}. \quad (29)$$

□ **17** — La surface orthogonale au vent que présente le cylindre éolien (de rayon R et hauteur H) est $S = 2RH$. Le débit d'énergie cinétique correspondant est :

$$D_{E_c} = \iint_S \frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} \cdot d\vec{S} = \Rightarrow D_{E_c} = \frac{1}{2} \rho v_\infty^3 \times 2RH \Rightarrow \boxed{D_{E_c} = \rho v_\infty^3 RH.} \quad (30)$$

Le débit d'énergie cinétique $D_{E_c} = \frac{\delta E_c}{dt}$ est homogène à une énergie divisée par un temps. C'est une puissance, exprimée **en watts** (on parle de puissance cinétique du vent).

□ **18** — Le rendement en puissance de l'éolienne est le rapport entre la puissance $\mathcal{P}$ extraite du vent par l'éolienne et la puissance D_{E_c} apportée par le vent :

$$\beta = \frac{\mathcal{P}}{D_{E_c}} = 2 J(k) = \pi k - \frac{16}{3} k^2 + \frac{9\pi}{16} k^3. \quad (31)$$

La définition $k = \frac{\sigma\lambda}{2}$ impose $k > 0$. Par ailleurs, les grandeurs $x = \frac{v_u}{v_\infty} = 1 - \frac{\sigma\lambda}{4} \cos \theta$ et $y = \frac{v_d}{v_\infty} = 1 - \frac{3\sigma\lambda}{4} \cos \varphi$ sont positives car v_u et v_d doivent l'être. Par définition, les angles θ et φ varient entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, donc $\cos \theta$ et $\cos \varphi$ sont entre 0 et 1. Ainsi, $x > 0$ implique $\sigma\lambda < 4$ tandis que $y > 0$ implique $\sigma\lambda < 4/3$. Cette deuxième inégalité est la plus restrictive. C'est donc elle que l'on garde, ce qui donne $k = \frac{\sigma\lambda}{2} < \frac{2}{3}$. En résumé, $k \in [0; \frac{2}{3}]$ pour le tracé de la courbe (voir figure 5). Sur cet intervalle, le rendement maximal est obtenu pour $k_{\max}$ tel que :

$$\left(\frac{d\beta}{dk}\right)_{k=k_{\max}} = 0 \iff \pi - \frac{32}{3} k_{\max} + \frac{27\pi}{16} k_{\max}^2 = 0 \Rightarrow \boxed{k_{\max} \simeq 0,36} \Rightarrow \boxed{\beta_{\max} \simeq 0,52.}$$

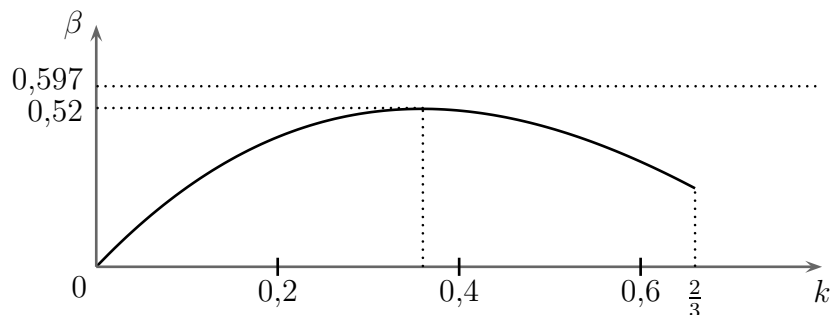


FIGURE 5 – Rendement de l'éolienne en fonction de $k = \frac{\sigma\lambda}{2}$ sur l'intervalle $[0; 2/3]$. Le rendement maximum $\beta_{\max} \simeq 0,52$ est indiqué. En pointillés, limite de Betz $\beta_{th} \simeq 0,597$.

□ **19** — Prendre $C_D > 0$ au lieu de $C_D = 0$ revient à prendre en compte la traînée de la pale, ce qui exerce un moment résistant sur l'éolienne. Une partie de la puissance récupérée du vent est donc utilisée pour vaincre la puissance de ce couple résistant au lieu d'alimenter le rotor de la génératrice. **Le rendement est donc plus faible à toute vitesse de rotation.** La courbe

de la figure 5 est donc aplatie vers le bas dans la réalité et le rendement maximal s'éloigne de la limite de Betz. (La prise en compte de $C_D > 0$ ne permet plus les calculs analytiques développés ici, mais la résolution numérique donne effectivement des courbes d'autant plus basses que C_D est grand).

❑ **20** — La puissance reçue par l'éolienne est

$$\mathcal{P} = \beta \times D_{Ec} = \beta \times \varrho \times v_\infty^3 \times R \times H = 10 \text{ kW}.$$

Une telle puissance peut alimenter quelques maisons, ou alors une seule s'il fait froid et si son chauffage est électrique (en comptant environ 1 kilowatt par radiateur et 2 à 3 kW pour un four).

❑ **21** — Critiques du modèle.

- ◇ Le tube de courant global n'est pas dévié dans l'étude alors que le vent donne du moment cinétique à l'éolienne. Par exemple, si l'éolienne tourne dans le sens trigonométrique sur les dessins, le vent devrait être dévié dans le sens antitrigonométrique. Cette absence de déviation donne d'ailleurs des profils de vitesse symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_x)$ (les grandeurs x et y sont des fonctions paires des angles θ et φ respectivement).
- ◇ Les vitesses $\vec{v}_u$, $\vec{v}_d$ et $\vec{v}_A$ sont supposées parallèles à $\vec{e}_x$, ce qui est faux à cause de l'écartement des lignes de courant dû au ralentissement du vent par l'éolienne. Cela conduit par exemple à trouver $d\vec{F}_u$ parallèle à $\vec{e}_x$, ce qui n'est pas cohérent avec les propriétés aérodynamiques de la pale. C'est pour éviter de rencontrer ces incohérences que la question 8 précise qu'il ne faut pas étudier les projections de $d\vec{F}_u$ autres que celle sur $\vec{e}_x$.
- ◇ La traînée de la pale n'a pas été prise en compte ($C_D = 0$).

II. — Raccordement au réseau électrique

❑ **22** — Une source de tension est dite parfaite si sa force électromotrice vaut E quelle que soit l'intensité i du courant qui la traverse. Une source de courant est dite parfaite si elle délivre l'intensité i_s quelle que soit la tension U_s à ses bornes. Remarque : les grandeurs E et i_s ne sont pas nécessairement constantes dans le temps.

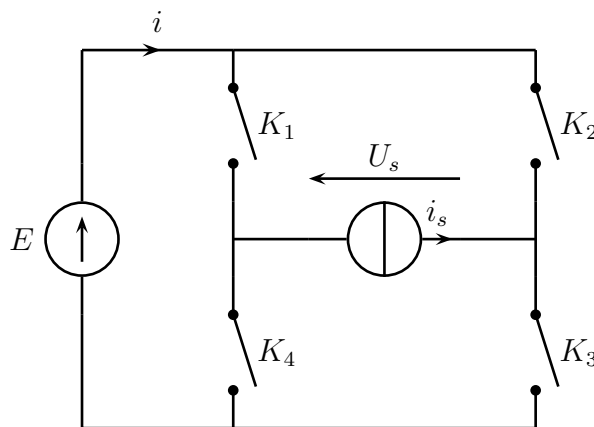


FIGURE 6 — Onduleur de tension à deux niveaux.

❑ **23** — Il faut que i_s puisse être constant donc tous les interrupteurs ne peuvent être bloqués en même temps : il en faut toujours deux passants : l'un à gauche de la charge et l'autre à droite de la charge sur la figure 6.

- ◇ Si K_1 est passant, K_3 doit l'être aussi.

◇ Si K_2 est passant, K_4 doit l'être aussi.

Il faut que E puisse être constant, donc on ne doit pas court-circuiter E , ce qui impose que :

◇ si K_1 est passant, K_4 doit être bloqué ;

◇ si K_2 est passant, K_3 doit être bloqué.

On peut résumer l'ensemble dans le tableau ci-après.

	K_1	K_2	K_3	K_4
$U_{cm} > 0$	fermé	ouvert	fermé	ouvert
$U_{cm} < 0$	ouvert	fermé	ouvert	fermé

Cela donne les schémas électriques équivalents (voir figure 7), utiles pour la suite.

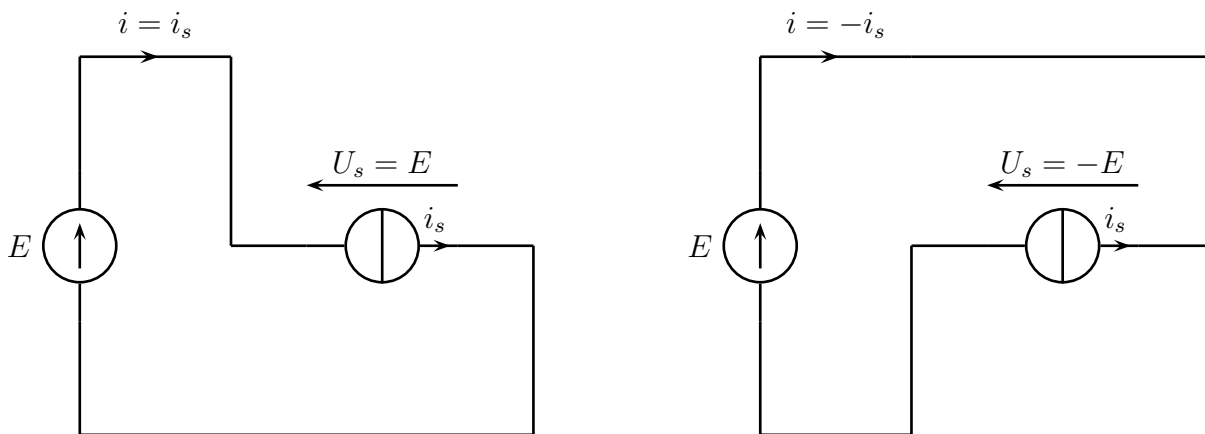


FIGURE 7 — Schémas électriques équivalents.

❑ **24** — L'amplificateur opérationnel fonctionne en régime saturé car il n'y a pas de boucle de rétroaction négative pour assurer la stabilité du régime linéaire.

❑ **25** — Le fonctionnement de l'amplificateur opérationnel idéal impose :

◇ $V_+ > V_- \Rightarrow U_{cm} = +V_{sat}$, donc

$$U_p < U_0 \Rightarrow U_{cm} = +V_{sat} \Rightarrow U_s = E \text{ (schéma de gauche sur la figure 7)}$$

◇ $V_+ < V_- \Rightarrow U_{cm} = -V_{sat}$, donc

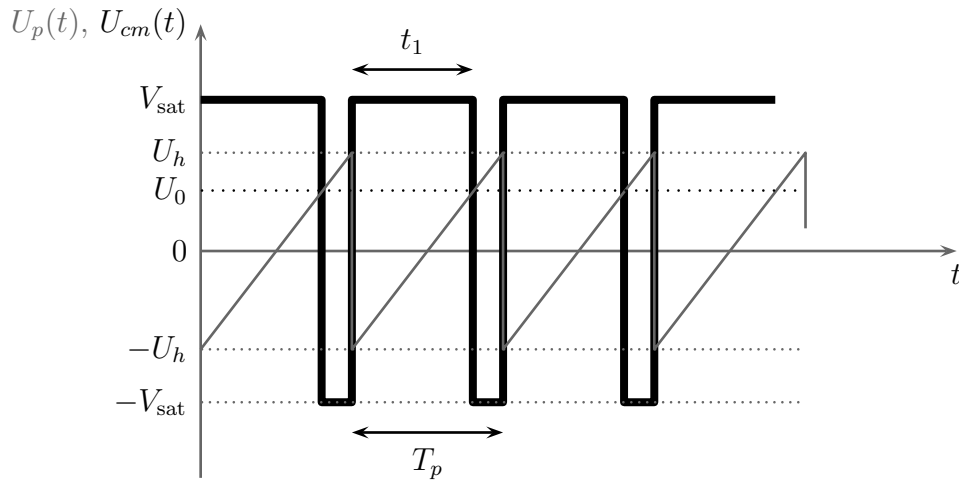
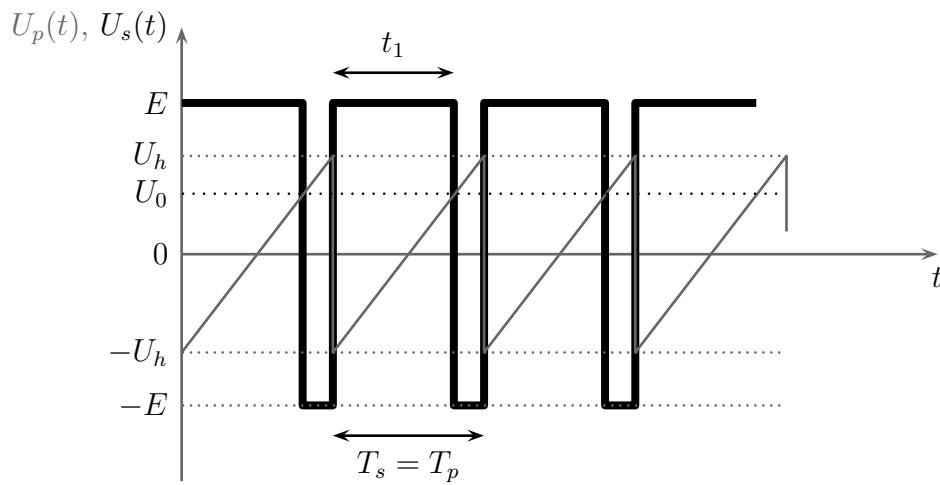
$$U_p > U_0 \Rightarrow U_{cm} = -V_{sat} \Rightarrow U_s = -E \text{ (schéma de droite sur la figure 7)}$$

Cela permet d'obtenir graphiquement le tracé de $U_{cm}(t)$ (voir figure 8). Le tableau résumant les commutations des interrupteurs K_n permet de choisir le schéma équivalent au montage parmi les deux schémas de la figure 7, donc de trouver $U_s(t)$ (voir figure 9). Graphiquement, on trouve de manière évidente que :

$$T_s = T_p \quad (32)$$

❑ **26** — La valeur moyenne de U_s sur une période s'exprime comme une intégrale, qui elle même s'interprète comme une aire algébrique sous la courbe de $t \mapsto U_s(t)$ (aire de simples rectangles d'après la figure 9) :

$$\langle U_s \rangle = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} U_s(t) dt = \frac{1}{T_s} \times [t_1 \times E + (T_s - t_1) \times (-E)] = \alpha \times E + (1 - \alpha) \times (-E)$$

FIGURE 8 – Représentation de $U_{cm}(t)$.FIGURE 9 – Représentation de $U_s(t)$.

$$\Rightarrow \boxed{\langle U_s \rangle = (2\alpha - 1) E.} \quad (33)$$

Graphiquement, on peut exprimer la pente d'une rampe de la figure 8 de deux façons :

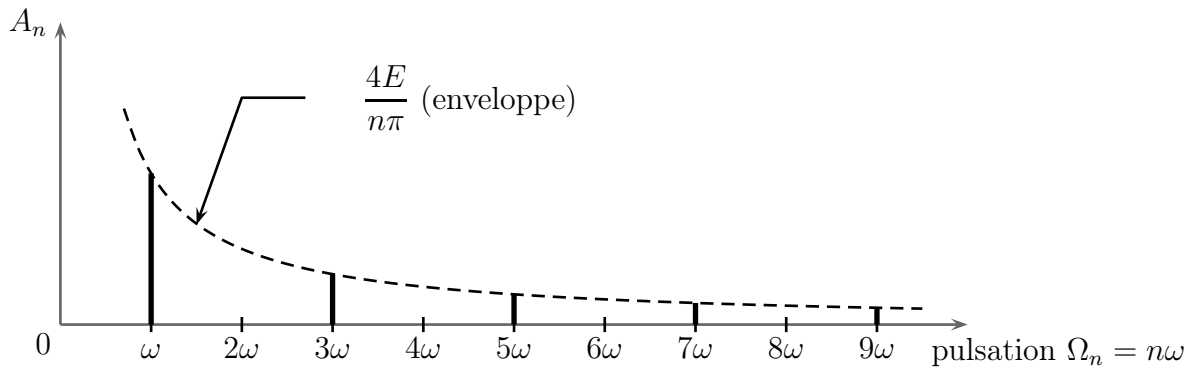
$$\frac{U_0 + U_h}{t_1} = \frac{2U_h}{T_s} \Rightarrow \alpha = \frac{t_1}{T_s} = \frac{U_0 + U_h}{2U_h} = \frac{\frac{U_0}{U_h} + 1}{2} \Rightarrow 2\alpha - 1 = \frac{U_0}{U_h}. \quad (34)$$

Des relations (33) et (34), on déduit :

$$\boxed{\langle U_s \rangle = \frac{U_0}{U_h} E.} \quad (35)$$

D'après la relation (33), il faut que $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$, c'est-à-dire $\boxed{U_0 = 0}$ pour que $\langle U_s \rangle = 0$.

❑ **27** — Le réseau électrique délivre une tension sinusoïdale pure à la fréquence $f = 50$ Hz. Son spectre contient donc une seule raie à la pulsation $\omega = 2\pi f$. Pour y raccorder U_s , il faudrait que le spectre de U_s soit identique. Or, celui-ci contient de nombreuses raies spectrales car la décroissance des amplitudes A_n des harmoniques est lente ($A_n = \frac{2E}{n\pi}[1 - (-1)^n]$, voir figure 10). Il faudrait filtrer le spectre de U_s avant raccordement au réseau (filtrage passe-bas pour ne retenir que le fondamental à ω).


 FIGURE 10 – Spectre en amplitude de la tension U_s .

Les harmoniques de haute fréquence créent des courants haute fréquence dans les fils. Or, plus la fréquence est élevée, plus l'effet de peau est prononcé : le courant se cantonne à la périphérie du fil. Tout se passe alors comme si le fil était de section plus faible : sa résistance effective augmente, donc l'effet Joule aussi, ce qui provoque des pertes d'énergie dans les lignes.

❑ **28** — Sur l'intervalle $[0, T_p/2]$, $i_s = i$ et la loi des mailles donne l'équation différentielle vérifiée par i_s :

$$E = L \frac{di_s}{dt} + Ri_s.$$

Sur $[T_p/2, T_p]$, l'étude est la même en changeant E en $-E$. Finalement :

$$\frac{di_s}{dt} + \frac{1}{\tau} i_s = \begin{cases} +\frac{E}{L} & \text{sur } [0, T_p/2] \\ -\frac{E}{L} & \text{sur } [T_p/2, T_p] \end{cases} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}. \quad (36)$$

La solution de l'équation homogène est de la forme $i_s = A \exp(-t/\tau)$. Il faut lui ajouter la solution particulière $\pm \frac{E}{R}$ sur chaque intervalle, donc :

$$\begin{cases} \text{sur } [0, T_p/2], & i_s = A \exp(-t/\tau) + \frac{E}{R} \\ \text{sur } [T_p/2, T], & i_s = B \exp(-t/\tau) - \frac{E}{R} \end{cases} \quad (37)$$

On détermine les constantes d'intégration A et B par les conditions initiales ($I_s = -I$ à $t = 0$ et $i_s = +I$ à $t = T_p/2$), ce qui donne :

$$\boxed{\begin{cases} \text{sur } [0, T_p/2], & i_s = -\left[\frac{E}{R} + I\right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E}{R} \\ \text{sur } [T_p/2, T], & i_s = \left[\frac{E}{R} + I\right] \exp\left(-\frac{t-T_p/2}{\tau}\right) - \frac{E}{R} \end{cases}} \quad (38)$$

A l'instant $t = T_p/2$, les deux expressions doivent donner $i_s = I$ car la bobine impose la continuité de i_s , donc :

$$I = -\left[\frac{E}{R} + I\right] \exp\left(-\frac{T_p}{2\tau}\right) + \frac{E}{R} \Rightarrow \boxed{I = \frac{E}{R} \frac{1 - \exp(-\frac{T_p}{2\tau})}{1 + \exp(-\frac{T_p}{2\tau})}}.$$

❑ **29** — Le chronogramme de i_s est une suite d'arcs d'exponentielles raccordés continûment. Par ailleurs, les schémas équivalents montrent que :

- ◇ sur $[0, T_p/2]$, $i = +i_s$;
- ◇ sur $[T_p/2, T_p]$, $i = -i_s$.

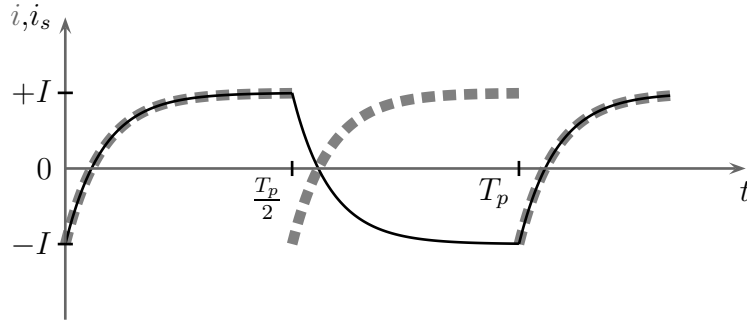


FIGURE 11 – Représentation des intensités i_s et i en fonction du temps (i_s en trait noir plein, i en traits tiretés gris).

Cela permet de déduire la représentation de i de celle de i_s (voir figure 11).

❑ **30** — La figure 11 montre que l'intensité i_s change de signe sur chaque intervalle $[0, T_p/2]$ et $[T_p/2, T_p]$. Or, les interrupteurs K_n sont unidirectionnels (transistors), ce qui signifie qu'ils ne laissent passer le courant que dans un sens. Les diodes permettent que le courant puisse circuler dans l'autre sens lors de son changement de signe.

❑ **31** — La loi des nœuds appliquée entre la résistance et la bobine permet d'écrire, en complexes :

$$\frac{U_R}{R} = \frac{U_s}{Z_L + R} \Rightarrow \underline{H} = \frac{U_R}{U_s} = \frac{R}{jL\omega + R} \Rightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \text{ avec } \omega_c = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau}.} \quad (39)$$

Le gain et le déphasage s'écrivent :

$$\boxed{G(\omega) = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \text{ et } \phi(\omega) = \arg(\underline{H}) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right).} \quad (40)$$

❑ **32** — On déduit le développement en série de Fourier de U_R de celui de U_s et de l'action du filtre RL qui, en tant que filtre linéaire, affecte séparément chaque harmonique :

$$\boxed{U_R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{G(n\omega) \frac{2E}{n\pi} [1 - (-1)^n]}_{\text{déf. } b'_n} \sin(n\omega t + \phi(n\omega)).}$$

Les amplitudes des harmoniques de U_R sont :

$$\boxed{A'_n = |b'_n| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n\omega}{\omega_c}\right)^2}} \frac{2E}{n\pi} [1 - (-1)^n].}$$

Dès que $\frac{n\omega}{\omega_c}$ est grand devant 1, on peut négliger le 1 sous la racine, ce qui donne approximativement :

$$A'_n \simeq \frac{\omega_c}{\omega} \frac{2E}{n^2\pi} [1 - (-1)^n].$$

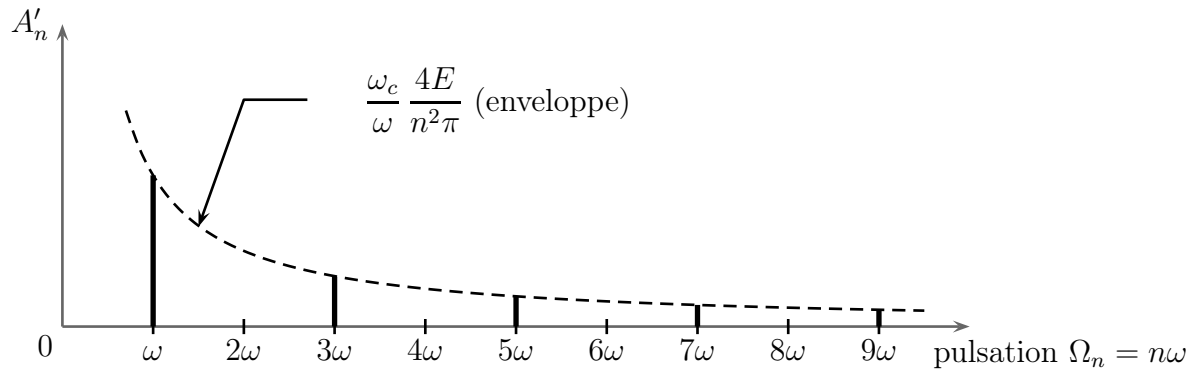


FIGURE 12 – Spectre en amplitude de la tension U_R .

La décroissance des amplitudes des harmoniques est proportionnelle à $\frac{1}{n^2}$. Ce spectre est donc moins riche en hautes fréquences (suite au filtrage passe-bas) que celui de U_s , ce qui est meilleur pour le raccordement au réseau électrique.

FIN DE L'ÉPREUVE