

MECANIQUE**PARTIE 1 : Une moto et son conducteur**

1.1. $\vec{v}_{g_{I_k}}(\text{roue}_k / \text{sol}) = \vec{0} = \vec{v}(O_k / R) + \overrightarrow{I_k O_k} \times \vec{\omega}_k = v\vec{e}_x + r_k \vec{e}_y \times \omega_k \vec{e}_z = (v + r_k \omega_k) \vec{e}_x$. D'où les relations traduisant le non glissement : $r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 = -v$.

1.2. $\vec{\sigma}_1(O_1) = \vec{\sigma}_1^* = J_1 \omega_1 \vec{e}_z$; $\vec{\sigma}_2(O_2) = \vec{\sigma}_2^* = J_2 \omega_2 \vec{e}_z$.

1.3. Soit Σ' le système constitué du conducteur et la moto sans roues de masse m' de centre d'inertie G' . Si l'on note respectivement m_1 et m_2 les masses des roues avant et arrière on aura : $m_1 \overrightarrow{GO_1} + m_2 \overrightarrow{GO_2} + m' \overrightarrow{GG'} = \vec{0}$.

$\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}_1(G) + \vec{\sigma}_2(G) + \vec{\sigma}'(G)$. Or d'après le théorème de Koenig: $\vec{\sigma}_1(G) = \vec{\sigma}_1^* + \overrightarrow{GO_1} \times m_1 \vec{v}(O_1)$,

$\vec{\sigma}_2(G) = \vec{\sigma}_2^* + \overrightarrow{GO_2} \times m_2 \vec{v}(O_2)$ et $\vec{\sigma}'(G) = \vec{\sigma}'^* + \overrightarrow{GG'} \times m' \vec{v}(G') = \overrightarrow{GG'} \times m' \vec{v}$ car Σ' est en mouvement de

translation pure dans R . Donc : $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}_1^* + \vec{\sigma}_2^* + [\overrightarrow{GO_1} \times m_1 \vec{v} + \overrightarrow{GO_2} \times m_2 \vec{v} + \overrightarrow{GG'} \times m' \vec{v}] = \vec{\sigma}_1^* + \vec{\sigma}_2^*$.

1.4. $M\vec{v} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + M\vec{g}$. En projetant sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ on obtient : $Mv = T_1 + T_2$ (1) et $N_1 + N_2 = Mg$ (2).

1.5. Le TMC appliqué à Σ s'écrit :

$$\dot{\vec{\sigma}}_G = \dot{\vec{\sigma}}_1^* + \dot{\vec{\sigma}}_2^* = \overrightarrow{GI_1} \times \vec{R}_1 + \overrightarrow{GI_2} \times \vec{R}_2 = \begin{vmatrix} d_1 & T_1 & -d_2 & T_2 \\ -h & N_1 & -h & N_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [(N_1 d_1 - N_2 d_2) + h(T_1 + T_2)] \vec{e}_z.$$

$$\text{D'où : } -\left(\frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2}\right) \dot{v} = N_1 d_1 - N_2 d_2 + h(T_1 + T_2) \quad (3).$$

1.6. Le ; TMC appliqué à la roue avant s'écrit : $\dot{\vec{\sigma}}_1^* = \overrightarrow{O_1 I_1} \times \vec{R}_1 + \vec{0} = -r_1 \vec{e}_y \times (T_1 \vec{e}_x + N_1 \vec{e}_y) = r_1 T_1 \vec{e}_z$.

$$\text{D'où : } -\frac{J_1 \dot{v}}{r_1} = r_1 T_1 \quad (4)$$

$$1.7. \begin{cases} (4) \Rightarrow T_1 = -\frac{J_1}{r_1^2} \dot{v} ; \\ (1) \Rightarrow T_2 = \left(M + \frac{J_1}{r_1^2}\right) \dot{v} \end{cases} ; \begin{cases} N_2 d_2 - N_1 d_1 = \left(Mh + \frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2}\right) \dot{v} \\ N_1 + N_2 = Mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_2 = \frac{Mgd_1}{d_2 + d_1} + \left(Mh + \frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2}\right) \frac{\dot{v}}{d_2 + d_1} \\ N_1 = \frac{Mgd_2}{d_2 + d_1} - \left(Mh + \frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2}\right) \frac{\dot{v}}{d_2 + d_1} \end{cases}$$

1.8. $N_2 > 0$ toujours, la roue arrière ne décolle jamais. Pour $\dot{v} = 0,1g$, $N_1 \# 790(N) > 0$: La roue (2), elle aussi, ne décolle pas.

1.9. $N_2 \# 2210N$, $|T_1| \# 24N < fN_1 \# 630N$, $T_2 \# 324N < fN_2 \# 1770N$: Pour $\dot{v} = 0,1g$ les deux roues ne glissent pas.

1.10. Le ; TMC appliqué à la roue arrière s'écrit : $\dot{\vec{\sigma}}_2^* = \overrightarrow{O_2 I_2} \times \vec{R}_2 + \vec{0} = -r_2 \vec{e}_y \times (T_2 \vec{e}_x + N_2 \vec{e}_y) = r_2 T_2 \vec{e}_z$. D'où :

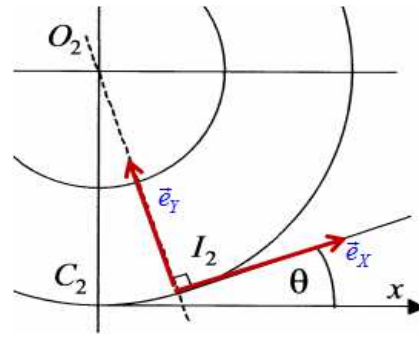
$$-\frac{J_2 \dot{v}}{r_2} = r_2 T_2.$$

1.11. La puissance transmise à la roue arrière est : $\mathcal{P} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}_2 = \left(r_2 T_2 + \frac{J_2 \dot{v}}{r_2}\right) \frac{v}{r_2}$.

1.12. $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}_1(G) + \vec{\sigma}_2(G) + \vec{\sigma}'(G) = \vec{\sigma}_2^* + (\overrightarrow{GO_1} \times m_1 \vec{v} + \overrightarrow{GO_2} \times m_2 \vec{v} + \overrightarrow{GG'} \times m' \vec{v})$. Soit : $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}_2^* = \vec{\sigma}_2(O_2)$.

1.13. $\vec{M}_G(M\vec{g}, G) = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \vec{M}_G(\vec{R}_2, C_2) &= \overrightarrow{GC_2} \times \vec{R}_2 = ((r_2 - h)\vec{e}_y - d_2\vec{e}_x - r_2\vec{e}_y) \times \vec{R}_2 = (hT_2 - d_2N_2)\vec{e}_z = M_{Gz}\vec{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} (r_2 - h) & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & -d_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_2 \\ N_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h - r_2)\sin\theta - d_2\cos\theta \\ -(h - r_2)\cos\theta - d_2\sin\theta - r_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_2 \\ N_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= [(h - r_2)\sin\theta - d_2\cos\theta]N_2 + [(h - r_2)\cos\theta + d_2\sin\theta + r_2]T_2 \end{aligned}$$



Or, d'après le T.R.D : $M\dot{v} = T_2$ et $N_2 = Mg$. Donc :

$$M_{Gz} = [(h - r_2)\sin\theta - d_2\cos\theta]Mg + [(h - r_2)\cos\theta + d_2\sin\theta + r_2]M\dot{v}.$$

$$\text{Soit : } M_{Gz} = Mgh \left[\left(1 - \frac{r_2}{h} + \frac{\dot{v}}{g} \frac{d_2}{h} \right) \sin\theta + \left(\frac{\dot{v}}{g} \left(1 - \frac{r_2}{h} \right) - \frac{d_2}{h} \right) \cos\theta + \frac{\dot{v}}{g} \frac{r_2}{h} \right]$$

1.14. Le T.M.C appliqué au système en G $\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = -\frac{J_2}{r_2}\dot{v}\vec{e}_z = M_{Gz}\vec{e}_z$.

$$\text{D'où l'équation : } Mgh \left[\left(1 - \frac{r_2}{h} + \frac{\dot{v}}{g} \frac{d_2}{h} \right) \sin\theta + \left(\frac{\dot{v}}{g} \left(1 - \frac{r_2}{h} \right) - \frac{d_2}{h} \right) \cos\theta + \frac{\dot{v}}{g} \frac{r_2}{h} \right] = -\frac{J_2}{r_2}\dot{v}$$

$$\text{Pour } \frac{\dot{v}}{g} = 0,2, \quad \boxed{M_{Gz} = 300[5,6\sin\theta - 3,04\cos\theta + 1,04] \approx -38,46 \text{ (Nm)}} (*)$$

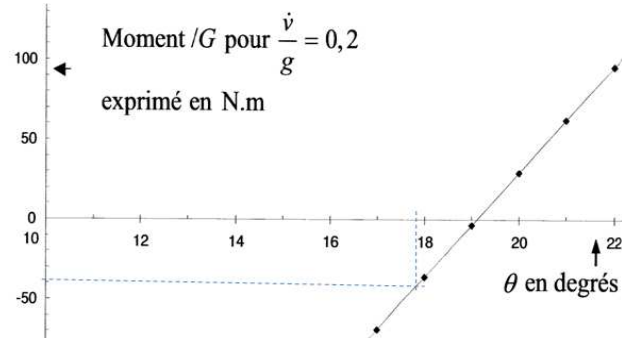
$$\text{Pour de faibles valeurs de } \theta, \quad M_{Gz} \sim Mgh \left[\left(1 - \frac{r_2}{h} \right) + \frac{d_2}{h} \frac{\dot{v}}{g} \right] \theta + Mgh \left(\frac{\dot{v}}{g} - \frac{d_2}{h} \right)$$

$$\text{Et pour } \frac{\dot{v}}{g} = 0,2 : \quad \underline{M_{Gz} \sim 600[2,8\theta - 1] \approx -38,46 \text{ (Nm)}}.$$

- Analytiquement, la résolution de (*) donne :

$$\underline{\theta \approx 0,31 \text{ rad} = 17,9^\circ}.$$

- Graphiquement : $\underline{\theta \approx 17,9^\circ}$.



1.15. Le TRD appliqué à Σ s'écrit : $M\dot{v} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + M\vec{g} + \vec{F}$.

En projetant sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ on obtient : $M\dot{v} + kv^2 = T_1 + T_2$ (1') et $N_1 + N_2 = Mg$ (2) : inchangée.

Le TMC appliqué à Σ s'écrit : $\dot{\vec{\sigma}}_G = \overrightarrow{GI_1} \times \vec{R}_1 + \overrightarrow{GI_2} \times \vec{R}_2 + \vec{M}_G(\vec{F})$. Or : $\vec{M}_G(\vec{F}) = \vec{0}$ (ligne d'action de $\vec{F}$ passe par G).

$$\text{D'où : } -\left(\frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2} \right) \dot{v} = N_1 d_1 - N_2 d_2 + h(T_1 + T_2) \quad (3) : \text{Inchangée.}$$

$$\text{Le TMC appliqué à la roue avant s'écrit de la même façon : } \dot{\vec{\sigma}}_1^* = \overrightarrow{O_1 I_1} \times \vec{R}_1 = r_1 T_1 \vec{e}_z. \text{ D'où : } -\frac{J_1 \dot{v}}{r_1} = r_1 T_1 \quad (4).$$

$$\text{De même pour la roue arrière : } -\frac{J_2 \dot{v}}{r_2} = \Gamma + r_2 T_2 \quad (4').$$

$$(1'), (4) \text{ et } (4') \text{ donnent l'équation du mouvement : } \underline{\left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} \right) \dot{v} + kv^2 = -\frac{\Gamma}{r_2}} \quad (5)$$

1.16. A la limite $\dot{v} = 0 \Rightarrow v_l = \sqrt{-\frac{\Gamma}{kr_2}}$.

1.17. si l'on pose $a = \frac{k}{\left(M + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2}\right)}$, (5) devient : $\dot{v} + av^2 = av_l^2$ (5').

1.18. Posons $u = \frac{v_l}{v_l - v}$. $v - v_l = -\frac{v_l}{u}$, $v + v_l = -\frac{v_l}{u} + 2v_l = \frac{(2u-1)v_l}{u}$ et $\dot{v} = \frac{v_l}{u^2} \dot{u}$. (5') devient donc :

$$\dot{v} + a(v + v_l)(v - v_l) = 0 \Rightarrow \frac{v_l \dot{u}}{u^2} - a \frac{v_l}{u} \frac{(2u-1)v_l}{u} \Rightarrow \dot{u} - 2av_l u = -av_l \Rightarrow u(t) = \frac{1}{2} + A \exp(2av_l t). \text{ Or } u(0) = 1,$$

donc : $u(t) = \frac{1}{2}[1 + \exp(2av_l t)]$ et $v(t) = v_l \frac{u(t)-1}{u(t)} = v_l \frac{\exp(2av_l t)-1}{\exp(2av_l t)+1} = v_l \operatorname{th}(av_l t)$.

PARTIE 2 – Point matériel dans un fluide

2.1. D'après le PFD : $m \frac{d^2 \overrightarrow{OP}}{dt^2} = m\vec{g} - m \frac{\rho}{\rho_s} \omega^2 \overrightarrow{Op}$. En projection on obtient le système d'équations:

$$\begin{cases} \ddot{X} + \frac{\rho}{\rho_s} \omega^2 X = 0 \text{ (I)} \\ \ddot{Y} + \frac{\rho}{\rho_s} \omega^2 Y = 0 \text{ (II)} \\ \ddot{Z} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right) g \text{ (III)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(t) = X_m \cos(\Omega_1 t + \varphi) = X_1 \cos(\Omega_1 t) + X_2 \sin(\Omega_1 t) \\ Y(t) = Y_m \cos(\Omega_1 t + \psi) = Y_1 \cos(\Omega_1 t) + Y_2 \sin(\Omega_1 t) \\ \text{avec : } \Omega_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\rho_s}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

Le mouvement de p est soit elliptique, soit circulaire soit rectiligne selon les conditions initiales.

2.2. Etude de quelques cas particuliers

2.2.1. Pour $X(0) = X_0$, $\dot{X}(0) = 0$, $Y(0) = 0$ et

$$\dot{Y}(0) = X_0 \sqrt{\frac{k}{m}} : X(t) = X_0 \cos(\Omega_1 t) \text{ et}$$

$$Y(t) = X_0 \sin(\Omega_1 t). \text{ Donc : } Op = \sqrt{X^2 + Y^2} = |X_0| \text{ et}$$

$$v = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2} = |X_0| \Omega_1 : \text{le mouvement de } P \text{ Dans } \mathfrak{R} \text{ est}$$

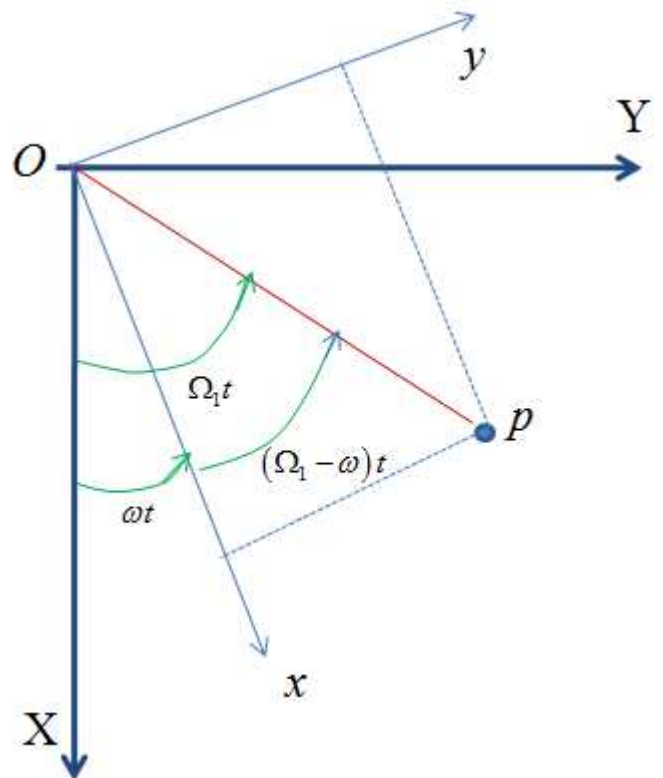
circulaire uniforme à vitesse angulaire $\frac{v}{|X_0|} = \Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Dans $\mathfrak{R}'$, $x(t) = X_0 \cos((\Omega_1 - \omega)t)$ et

$y(t) = X_0 \sin((\Omega_1 - \omega)t)$: le trajet est circulaire de même rayon $|X_0|$ à vitesse angulaire de parcours $\Omega' = |\Omega_1 - \omega|$.

2.2.2. $X(0) = X_0 = X_1$, $\dot{X}(0) = U_0 = \Omega_1 X_2$, $Y(0) = 0 = Y_1$ et $\dot{Y}(0) = \Omega_1 Y_2 = 0$, d'où :

$$X(t) = X_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + U_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \text{ et } Y(t) = 0.$$



Dans $\mathcal{R}$ la trajectoire est rectiligne.

$$2.3. \vec{a}_r = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z; \vec{a}_c = 2\omega\vec{e}_z \times \vec{v}_r = 2\omega(\dot{x}\vec{e}_y - \dot{y}\vec{e}_x);$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{Op}) = -\omega^2 \overrightarrow{Op} = -\omega^2 (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) .$$

2.4. Le PFD appliqué à P dans $\mathcal{R}$ ' s'écrit : $m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_v + m\vec{g} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \left(\frac{\rho}{\rho_s} - 1 \right) \omega^2 x = 2\omega \dot{y} & IV \\ \ddot{y} + \frac{\mu}{m} \dot{y} + \left(\frac{\rho}{\rho_s} - 1 \right) \omega^2 y = -2\omega \dot{x} & V \end{cases}, \text{ de la forme : } \begin{cases} \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \Omega^2 x = 2\omega \dot{y} & IV \\ \ddot{y} + 2\lambda \dot{y} + \Omega^2 y = -2\omega \dot{x} & V \end{cases} (S)$$

2.5. en négligeant la force de Coriolis (S) devient : $\begin{cases} \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \Omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2\lambda \dot{y} + \Omega^2 y = 0 \end{cases}$, de solution générale :

$$\begin{cases} x(t) = x_m \cos(\sqrt{\Omega^2 - \lambda^2} t + \alpha) \exp(-\lambda t) \\ y(t) = y_m \cos(\sqrt{\Omega^2 - \lambda^2} t + \beta) \exp(-\lambda t) \end{cases}$$

2.6. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$: Pour $t \rightarrow \infty$ p est en O.

THERMODYNAMIQUE

Bilan thermique d'une maison climatisée

PARTIE 3 – Comparaison des fenêtres à double vitrage

3.1. Questions préliminaires

3.1.1. Loi de Wien : $\lambda_m T = cst = 2898 \mu m.K$.

3.1.2.

Température (K)	300	5800
$\lambda_m (\mu m)$	9,66	0,5
Domaine spectral	IR	Vert

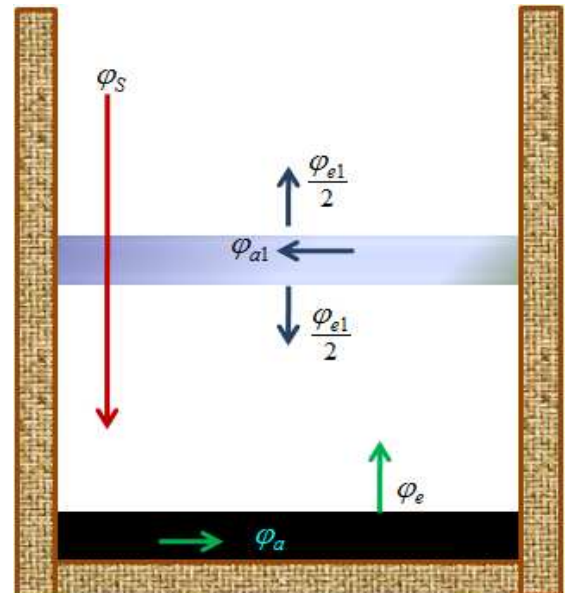
3.1.3. A température ambiante, le maximum d'émission est au alentours de $\lambda_m \approx 10 \mu m$. Approximativement, le verre ne se comporte plus comme un corps noir dès $\lambda < 0,5 \lambda_m \approx 5 \mu m$, qui correspond à des températures $T > 600K$, soit $330^\circ C$ environ (ou $750K$ pour $4 \mu m$) ; ou $\lambda > 8 \lambda_m \approx 80 \mu m$ correspondant à des températures inférieures à $37 K$.

3.2. Comparaison du simple et du double vitrage

3.2.1. Bilan radiatif :

- pour le corps noir : $\varphi_a = \varphi_e$, $\varphi_a = \varphi_s + \sigma T_{v1}^4$ et $\varphi_e = \sigma T_{CNa}^4$.

- pour la vitre $\varphi_{a1} = \varphi_{e1}$, $\varphi_{a1} = \sigma T_{CNa}^4$ et $\varphi_e = 2\sigma T_{v1}^4$. D'où :



$$\sigma T_{CNa}^4 = \varphi_s + \frac{\sigma T_{CNa}^4}{2} . \text{ Soit : } T_{CNa} = \left(\frac{2\varphi_s}{\sigma} \right)^{1/4} . \text{ AN : } \underline{T_{CNa} \# 433K} .$$

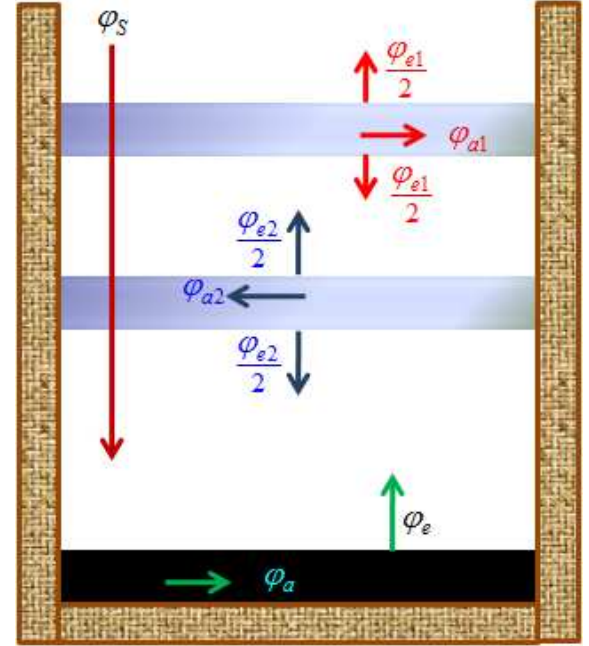
3.2.2.

- pour le corps noir : $\varphi_a = \varphi_e$, $\varphi_a = \varphi_s + \sigma T_{v2}^4$ et $\varphi_e = \sigma T_{CNb}^4$.
- pour la vitre 2 : $\varphi_{a2} = \varphi_{e2}$, $\varphi_{a2} = \sigma T_{CNb}^4 + \sigma T_{v1}^4$ et $\varphi_{e2} = 2\sigma T_{v2}^4$.
- pour la vitre 1 : $\varphi_{a1} = \varphi_{e1}$, $\varphi_{a1} = \sigma T_{v2}^4$ et $\varphi_{e1} = 2\sigma T_{v1}^4$.

$$\text{Donc : } 2T_{CNb}^4 + 2T_{v1}^4 = 2T_{CNb}^4 + T_{v2}^4 = 4T_{v2}^4 \Rightarrow T_{v2}^4 = \frac{2}{3} T_{CNb}^4 .$$

$$\sigma T_{CNb}^4 = \varphi_s + \sigma T_{v2}^4 = \varphi_s + \frac{2}{3} \sigma T_{CNb}^4 \Rightarrow T_{CNb} = \left(\frac{3\varphi_s}{\sigma} \right)^{1/4}$$

AN : $\underline{T_{CNb} \# 480K > T_{CNa}}$. (les températures sont bien inférieures à 750K)



3.2.3. Dans le cas du simple vitrage, le bilan énergétique de la vitre et du corps noir de températures respectivement, T_{v1}

et T_{CN} donne : $\frac{dU_1}{dt} \approx 0 \approx \Phi_{a1} - \Phi_{e1} \Rightarrow T_{CN}^4(t) = 2T_{v1}^4(t)$ et

$$\frac{dU_{CNa}(t)}{dt} = C \frac{dT_{CN}(t)}{dt} = \Phi_{a1} - \Phi_{e1} = \sigma A T_{v1}^4 - \sigma A T_{CN}^4 = -\frac{\sigma A}{2} T_{CN}^4(t) .$$

$$\text{Alors : } \tau_a = \int_0^{\tau_a} dt = -\frac{2C}{\sigma A} \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT_{CN}}{T_{CN}^4} . \quad \text{Soit : } \tau_a = \frac{2C}{3\sigma A} \left[\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_2^3} \right] . \quad \text{AN : } \underline{\tau_a \# 1370s} ; \underline{\tau_a \# 23min} .$$

3.2.4. Dans le cas du double vitrage, $\frac{dU_1}{dt} \approx 0 \Rightarrow T_{v2}^4 = 2T_{v1}^4$; $\frac{dU_2}{dt} \approx 0 \Rightarrow T_{CN}^4 + T_{v1}^4 = 2T_{v2}^4 = 4T_{v1}^4$. D'où :

$$C \frac{dT_{CN}(t)}{dt} = \sigma A [T_{v2}^4 - T_{CN}^4] = -\frac{2}{3} \frac{\sigma A}{2} T_{CN}^4(t) . \text{ On en tire : } \tau_b = -\frac{3}{2} \frac{2C}{\sigma A} \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT_{CN}}{T_{CN}^4} = \frac{3}{2} \tau_a > \tau_a .$$

C/C : Avec un double vitrage, le corps noir atteint une température plus élevée lorsqu'il est éclairé et se refroidit plus lentement dans d'obscurité par rapport au cas du simple vitrage.

3.3. Amélioration par métallisation externe

3.3.1. Avec une vitre (1) métallisée, les bilans radiatifs, en régime stationnaire, deviennent en cas du double vitrage :

$$(1) \quad \sigma T_{v1}^4 + \frac{\sigma}{2} T_{v1}^4 = \sigma T_{v2}^4 \Rightarrow T_{v1}^4 = \frac{2}{3} T_{v2}^4$$

$$(2) \quad 2\sigma T_{v2}^4 = \sigma T_{CNc}^4 + \sigma T_{v1}^4 \Rightarrow T_{v2}^4 = \frac{3}{4} T_{CNc}^4 ; \text{ d'où : } T_{CNc} = \left(\frac{4\varphi_s}{\sigma} \right)^{1/4} > T_{CNb} . \text{ AN : } \underline{T_{CNc} \# 515K} .$$

$$(CN) \quad \sigma T_{v1}^4 = \varphi_s + \sigma T_{v2}^4 \Rightarrow \sigma T_{CNc}^4 = 4\varphi_s$$

3.3.2. Ici, pour $\varphi_s = 0$, $T_{v2}^4(t) = \frac{3}{4} T_{CN}^4(t)$. Ainsi : $C \frac{dT_{CN}(t)}{dt} = \sigma A [T_{v2}^4 - T_{CN}^4] = -\frac{1}{2} \frac{\sigma A}{2} T_{CN}^4(t)$. D'où :

$$\tau_c = -2 \frac{2C}{\sigma A} \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT_{CN}}{T_{CN}^4} = 2\tau_a > \tau_b.$$

3.4. Prise en compte des échanges diffusifs dans le double vitrage

3.4.1. Le gaz de n_v molécules, sans interactions, par unité de volume est de plus supposé homogène. Les chocs des molécules sur la vitre sont élastiques.

Une molécule de vitesse v peut heurter l'élément $ds(M)$ de la vitre entre t et $t + dt$ si elle est à t à moins de vdt de ds .

Les molécules percutant ds entre t et $t + dt$ sont celles **se dirigeant vers** ds , contenues dans l'élément de volume $d\tau = \vec{v}dt \cdot d\vec{s} \cdot \vec{n} = v_n ds dt$.

La variation de quantité de mouvement accompagnant ces chocs

$$\begin{aligned} \text{est : } \langle d^2 \vec{P} \rangle &= \langle dN (\vec{v}_{\text{après}} - \vec{v}_{\text{avant}}) \rangle = \frac{1}{2} \langle n_v v_n ds dt \times (-2m\vec{v} \cdot \vec{n}) \rangle \vec{n} \\ &= -mn_v \langle v_n^2 \rangle dt ds \vec{n} = -\frac{mn_v v^{*2}}{3} dt ds \vec{n} = d\vec{F}_p dt = -p ds \vec{n} dt \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de la pression cinétique :

$$p = \frac{mn_v v^{*2}}{3} = \frac{mNv^{*2}}{3V} = \frac{mNv^{*2}}{3V} = \frac{nMv^{*2}}{3V}.$$

$$3.4.2. \quad pV = \frac{nMv^{*2}}{3} = nRT \Rightarrow v^* = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

3.4.3. λ ne dépend que de la température.

$$3.4.4. \text{ En régime stationnaire, } \vec{\nabla}^2 T(x) = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) - T_{v1} = \frac{T_{v2} - T_{v1}}{L} x.$$

D'où :

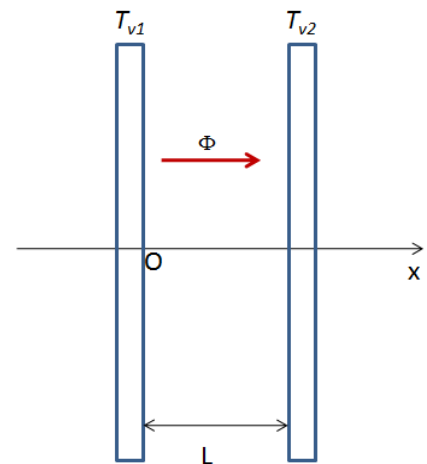
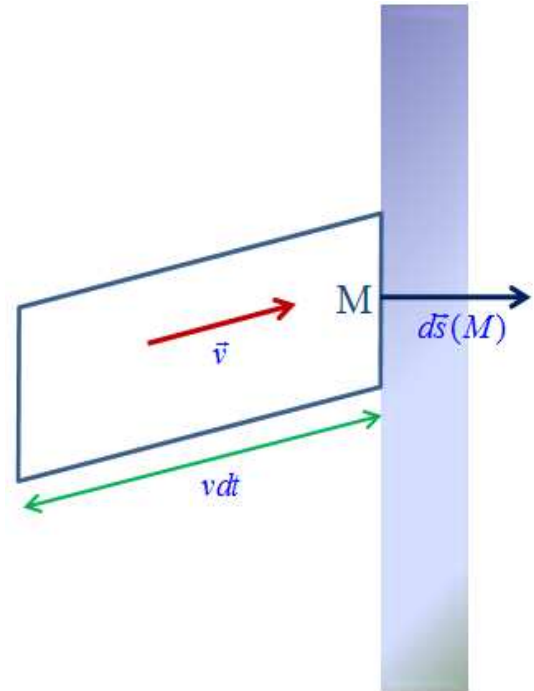
$$\vec{J}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T = \lambda \frac{T_{v1} - T_{v2}}{L} \vec{e}_x \text{ et } \Phi = \iint_A \vec{J}_{th} \cdot d\vec{s} = \frac{\lambda A (T_{v1} - T_{v2})}{L} = \frac{(T_{v1} - T_{v2})}{R_{th}}.$$

$$\text{Donc : } R_{th} = \frac{L}{\lambda A}.$$

3.4.5.

Grandeur thermique	$R_{th} = L / \lambda A \text{ (K.W}^{-1}\text{)}$	$\Delta T \text{ (K)}$	$\Phi \text{ (W)}$
Analogie électrique	$R = L / \gamma A$	$\Delta V \text{ (V)}$	$I \text{ (A)}$

3.4.6. $R_{thAr} = \frac{L}{\lambda_{Ar} A} = R_{thair} = \frac{d}{\lambda_{air} A} \Rightarrow L = \frac{\lambda_{Ar}}{\lambda_{air}} d$; AN : $L \# 7,4mm$; la différence $d - L \# 2,6mm$ n'est pas importante.



3.4.7. Le flux énergétique reçu par la lame d'air est :

$$\Phi_{th} = \Phi_{cond} + \Phi_{ray} = \frac{\lambda_{air} A}{d} (T_{v1} - T_{v2}) + \sigma A (T_{v1}^4 - T_{v2}^4) \approx \left[\frac{\lambda_{air} A}{d} + 4\sigma A T_{v2}^3 \right] (T_{v1} - T_{v2}) .$$

3.4.8. $R_{ths} = \frac{d}{\lambda_{air} A}$ et $R_{tha} = 1 / \left[\frac{\lambda_{air} A}{d} + 4\sigma A T_{v2}^3 \right]$. AN : $R_{ths} \# 0,42 KW^{-1}$; $R_{tha} \# 0,12 KW^{-1}$; sans compte du rayonnement, la résistance thermique est plus que 3 fois plus grande. (association en parallèle).

3.4.9. Convection thermique.

3.4.10. Le coefficient de transfert diminue avec le nombre de vitres. La majeure partie d'isolation est assurée par le double vitrage, de plus il demande une charge en masse et un cout moindre comparé au triple vitrage.

PARTIE 4 – Bilan thermique d'une maison climatisée

4.1. Maison sans circulation d'air

4.1.1. D'après le premier principe/ $\Delta U_{cycle} = W + Q_C + Q_F = 0 \Rightarrow W = -(Q_C + Q_F)$.

4.1.2. D'après le second principe, pour le cycle de Carnot, réversible, $\Delta S_{cycle} = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0 \Rightarrow Q_F = -\frac{T_F}{T_C} Q_C$.

4.1.3. $COP = -\frac{Q_C}{W} = \frac{Q_C}{Q_C + Q_F} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$. AN : $COP = 30,3$.

4.1.4. Si N est le nombre de cycles par seconde, alors : $COP = -\frac{Q_C}{W} = -\frac{NQ_C}{NW} = -\frac{\dot{Q}_C}{\dot{W}} \Rightarrow \dot{W} = -\frac{\dot{Q}_C}{COP}$; AN : $\dot{W} \# 33W$.

4.1.5. $\dot{W}' = -\frac{\dot{Q}_C}{COP'} \# 333W$.

4.2. Prise en compte de la circulation d'air sec

4.2.1. En régime stationnaire : $\delta m = \delta m_e - \delta m_s = [\dot{m}_{V,air,e} - \dot{m}_{V,air,s}] dt = 0 \Rightarrow \dot{m}_{V,air,e} = \dot{m}_{V,air,s}$.

$$\dot{m}_{V,air} = \frac{\delta m_{air}}{\delta t} = \frac{\delta n_{air} \times M_{air}}{\delta t} = \frac{p \delta V_{air} \times M_{air}}{RT \delta t} = \frac{M_{air} p \dot{V}_{air}}{RT} . \text{AN : } \underline{\dot{m}_{V,air,e} \# 32 g.s^{-1}} .$$

4.2.2. $\delta Q_{air,e} = \delta m_e (h_{air,s} - h_{air,e}) = -\delta m_e c_p (T_C - T_F) = -\dot{m}_{air,e} c_p (T_C - T_F) dt$.

4.2.3. La puissance thermique reçue par le fluide de climatisation, nécessaire au refroidissement de l'air entrant

est : $\dot{Q}_F = -\frac{\delta Q_{air,e}}{dt} = \dot{m}_{air,e} c_p (T_C - T_F)$. AN : $\dot{Q}_F \# 320W$.

4.2.4. $\dot{W}'' = \frac{-\dot{Q}_C + \dot{Q}_F}{COP'} = \dot{W}' + \frac{\dot{Q}_F}{COP'}$. AN : $\dot{W}'' \# 440W$.

4.2.5. Le titre molaire de l'eau vapeur à l'entrée et à la sortie est : $x_{H_2Og,s} = \frac{p_{H_2O,s}^{sat}}{p^0} \# 0,04246$ et

$x_{H_2Og,e} = \frac{p_{H_2O,e}^{sat}}{p^0} \# 0,02339$. La puissance excédentaire est celle nécessaire à la vaporisation de la quantité d'eau

$\dot{n}_{H_2O} = (x_{H_2Og,s} - x_{H_2Og,e}) \dot{n}_{air,humide}$ par unité de temps.