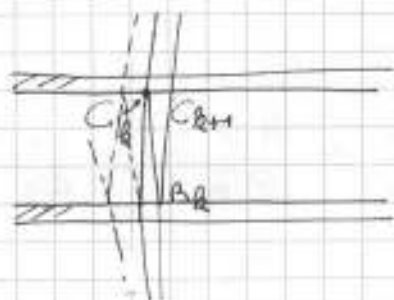


1) Observation en l'absence de détails

1.1)



L'incidence est normale, les rayons ne sont tracés en biais que pour qu'on puisse les séparer.

Par rapport au rayon k , le rayon $k+1$:

→ est réfléchi 1 fois en C_k

→ se propage sur une épaisseur e et un chemin optique $n \cdot e$ de C_k à B_k

→ est réfléchi 1 fois en B_k

→ se propage sur e , soit un chemin optique $n \cdot e$ de B_k à C_{k+1}

r , le coefficient de réflexion, étant réel, il n'induit pas de déphasage.

La différence de marche entre les rayons $k+1$ et k est $\delta = 2ne$.

et le déphasage correspondant $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2ne$ (λ longueur d'onde dans le vide)

1.2) D'après la question précédente $A_{k+1} = r^2 A_k$, soit $\frac{A_{k+1}}{A_k} = r^2$

1.3) Le 1^{er} rayon émergent, par rapport au rayon incident:

→ traverse 1 fois en B_0 , avec un coeff de transmission de t et un déphasage de φ

→ se propage sur l'épaisseur e , chemin optique ne

→ traverse 1 fois en C_1 , avec un coefficient de transmission t et un déphasage de φ .



Ainsi le déphasage entre A_1 et A_0 est $\frac{2\pi}{\lambda} ne + 2\varphi$.

et $A_1 = t^2 A_0$.

donc $\underline{A}_1 = t^2 A_0 e^{-i(\varphi + \frac{2\pi ne}{\lambda})}$

Ensuite $\underline{A}_{k+1} = \underline{A}_k r^2 e^{-i\frac{4\pi ne}{\lambda}}$ pour $k \geq 1$

D'où $\underline{A}_k = \underline{A}_1 r^{2(k-1)} e^{-i(\frac{4\pi ne}{\lambda})(k-1)}$

et $\underline{A}_k = t^2 A_0 e^{-i(\varphi + \frac{2\pi ne}{\lambda})} \left(e^{-i\varphi} r^2 \right)^{k-1}$

1.4) Les ondes sont toutes cohérentes entre elles (même source, même longueur d'onde, traversée d'un dispositif interférentiel, longueur de cohérence grande devant S (c'est un laser)), on peut donc ajouter les amplitudes

$$\underline{A} = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{A}_k = t^2 A_0 e^{-i(\varphi + \frac{2\pi ne}{\lambda})} \sum_{k=1}^{\infty} (r^2 e^{-i\varphi})^{k-1}$$

$$\underline{A} = t^2 A_0 e^{-i(\varphi + \frac{2\pi ne}{\lambda})} \frac{1}{1 - r^2 e^{-i\varphi}}$$

car $(1 + X + X^2 + \dots)(1 - X) = 1$
avec $X = r^2 e^{-i\varphi}$ de module inférieur à 1.

1.5) $I = \underline{A} \underline{A}^* = t^4 A_0^2 \left(\frac{1}{1 - r^2 e^{-i\varphi}} \right) \left(\frac{1}{1 - r^2 e^{+i\varphi}} \right)$

$$= t^4 A_0^2 \frac{1}{1 - r^2 e^{-i\varphi} - r^2 e^{+i\varphi} + r^4}$$

$$= t^4 A_0^2 \frac{1}{1 - 2r^2 \cos \varphi + r^4}$$

Or, il faut faire intervenir $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$, par $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

Soit $I = t^4 A_0^2 \frac{1}{1 - 2r^2 + r^4 + 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$

$$= t^4 A_0^2 \frac{1}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{t^4 A_0^2}{(1-r^2)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{2r}{1-r^2} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

→

On trouve le résultat de l'énoncé avec

$$I_0 = \frac{t^4 A_0^2}{(1-r^2)^2}$$

$$\text{et } m = \left(\frac{2r}{1-r^2} \right)^2$$

$$I(\varphi) = \frac{I_0}{1+m \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

AN sans calculatrice:

$$m = \left(\frac{2 \times 0,9}{1-0,81} \right)^2 = \left(\frac{2 \times 0,9}{0,2} \right)^2 = 9^2 = 81$$

en fait, on calcule $9 \cdot 10^4$

1.6) AN. $m = 8 \cdot 10^4$ (1 seul chiffre significatif, comme pour r)

Questions inversées!

et sans calculatrice.

1.6.2) $I(\varphi)$ est minimal si le dénominateur est maximal, c'est-à-dire si $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ est maximal, c'est-à-dire si $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1 \quad \text{si } \frac{\varphi}{2} = 2p\pi \\ \text{et } \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -1 \quad \text{si } \frac{\varphi}{2} = (2p+1)\pi \end{array} \right\} \text{ tous les } \frac{\varphi}{2} = q\pi \text{ conviennent donc,}$$

c'est-à-dire que I est minimal si $\varphi = 2q\pi$ $q \in \mathbb{Z}$

$$\text{Alors } I = I_{\min} = \frac{I_0}{1+m} \approx \frac{I_0}{80} = I_{\min}$$

Questions inversées!

1.6.1) $I(\varphi)$ est maximal si le dénominateur est minimal, c'est-à-dire si $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$.

or $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$ si $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + p\pi$, c'est-à-dire que

I est maximal pour $\varphi = \pi + 2p\pi$ $p \in \mathbb{Z}$

et alors $I = I_{\max} = I_0$

1.6.3) On cherche $\varphi \in [0, \pi]$ tel que $I(\varphi) = I_0/2$

c'est-à-dire $1+m \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2$.

ou encore $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{m} \ll 1$ on peut faire un DL

$$\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \approx \frac{1}{m}$$

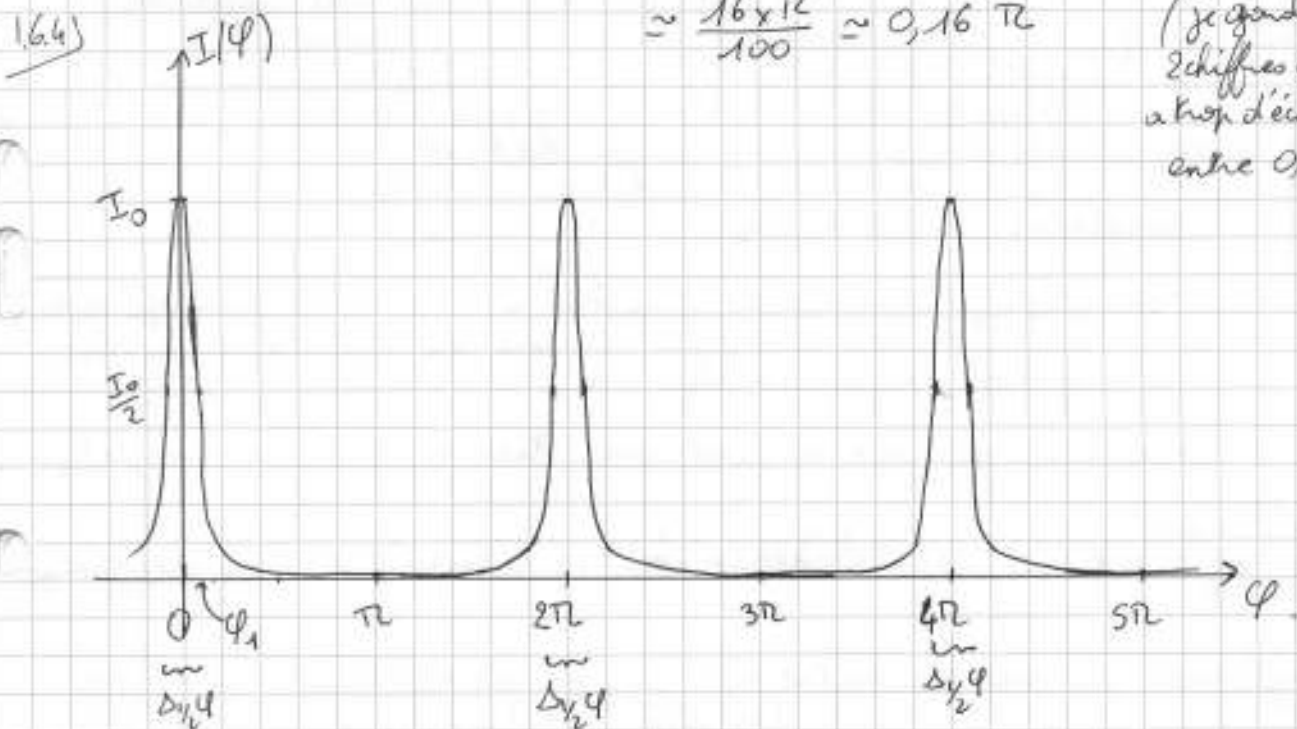
Ainsi $\varphi_1 = \frac{2}{\sqrt{m}}$ vérifie $I(\varphi_1) = \frac{I_0}{2}$ (Δ en radians)

$(- \varphi_1)$ aussi vérifié $I(-\varphi_1) = \frac{I_0}{2}$ d'où $\boxed{\Delta \varphi = 2\varphi_1 = \frac{4}{\sqrt{m}} \approx \frac{4}{3} \approx 0,4}$

Rmq si on ne simplifie pas tout de suite, $\boxed{\varphi_1 = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)}$
 et $\boxed{\Delta_{\frac{1}{2}}(\varphi) = 4 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)}$

Reprenons l'A.N. $\Delta_{\frac{1}{2}} \varphi \approx \frac{4}{3} \approx \frac{4 \times R}{3 \times 3} \approx \frac{4 \times R}{27} \approx \frac{4 \times R}{25}$
 $\approx \frac{16 \times R}{100} \approx 0,16 R$

(je garde les 2 chiffres car il y a trop d'écart relatif entre 0,1 et 0,2.)



1.6.5] Dès que φ s'écarte de $2p\pi$ de plus de $\Delta_{\frac{1}{2}} \varphi$, l'intensité a énormément diminué d'après le graphe précédent, on peut la considérer comme nulle. C'est normal, c'est des interférences à Nardes. Ainsi, on peut considérer que $I=0$ sauf pour φ voisin de $2p\pi$ (voisin signifiant: "séparé de moins de $\Delta_{\frac{1}{2}} \varphi$ ").

En l'absence de détails, l'intensité serait uniforme (faible ou élevée suivant la valeur de φ).

2) Observation en présence de détails.

2.1) La seule chose qui a changé, c'est que pour 1 traversée, le chemin optique est $n(e-\varepsilon) + n'\varepsilon$, puisque l'épaisseur

E d'indice n a été remplacée par l'épaisseur E d'indice n'.

Ainsi $\varphi' = \frac{2\pi}{\lambda} (n(e-E) + n'E)$, le λ correspondant à λ traversée.

On peut aussi écrire $\varphi' = \frac{4\pi}{\lambda} ne + \frac{4\pi}{\lambda} (n'-n)E$

On trouve bien $\varphi' = \varphi + \Delta\varphi$ où $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} (n'-n)E$

A.N. $\Delta\varphi = \frac{4\pi (1,520 - 1,515) 0,6 \cdot 10^{-6}}{546 \cdot 10^{-9}}$ $0,6 \cdot 10^{-6} \approx 546 \cdot 10^{-9}$

$\approx 4 \times 3 \times 5 \cdot 10^{-3}$

$\Delta\varphi \approx 6 \cdot 10^{-2} \text{ rad.}$

Alors que si $e = 10E$. $\varphi = \frac{4\pi \cdot 1,515 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{546 \cdot 10^{-9}}$

$\approx 4 \times 3 \times 1,5 \times 10$

$\varphi \approx 6 \cdot 10^1 \cdot \pi \text{ rad.}$

et même si $e = 2E$ $\varphi \approx 12 \pi \text{ rad.}$

On vérifie que $\Delta\varphi \ll \varphi$. (rapport 1000 au moins.)

2.2) Pour une zone comprenant 1 détail,

$\underline{A}'_1 = t^2 A_0 e^{-i2\varphi} e^{-i\varphi}$

Soit $\underline{A}'_k = t^2 A_0 e^{-i(2\varphi + \varphi')} (e^{-i\varphi'} r^2)^{k-1}$

Ainsi $\underline{A}' = t^2 A_0 e^{-i(2\varphi + \varphi')} \frac{1}{1 - (r^2 e^{-i\varphi'})}$

(On fait les mêmes calculs qu'en 1.3, 1.4, 1.5)

et $\underline{I}' = I_0 \frac{1}{1 + m \sin^2(\frac{\varphi'}{2})}$

La seule chose qui change est la valeur de φ' ($\neq \varphi$).

2.3) $I - I' = I_0 \left(\frac{1}{1 + m \sin^2(\frac{\varphi}{2})} - \frac{1}{1 + m \sin^2(\frac{\varphi + \Delta\varphi}{2})} \right)$

$$\text{Or } \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \cos\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\Delta\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\approx \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\Delta\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\text{et } \sin^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \sin^2\frac{\varphi}{2} + 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\Delta\varphi}{2} \quad \text{à l'ordre 1 en } \Delta\varphi$$

$$\text{Ainsi } I' = \frac{1}{1+m\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 2m\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\left[1+m\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \left[1 + \frac{2m\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\frac{\Delta\varphi}{2}}{1+m\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right]}$$

$$= \frac{1}{1+m\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \left[1 - \frac{m\sin\left(\varphi\right)\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{1+m\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right]$$

$$\text{Ainsi } C = \frac{I-I'}{I} = \frac{m\sin(\varphi)\frac{\Delta\varphi}{2}}{1+m\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\text{On trouve lien } C = K \Delta\varphi \quad \text{où } K = \frac{\frac{m}{2}\sin\varphi}{1+m\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

2.4] Calculons K dans ce cas.

$$K = \frac{\frac{80}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{1+80\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} \approx \frac{40}{1+80\frac{1}{2}} \approx 1$$

$$\text{Alors } C \approx 1 \cdot 6 \cdot 10^{-2} < 0,1. \quad \underline{\underline{\text{le détail n'est pas visible}}}$$

2.5] On va minimiser le dénominateur de K, on va aussi maximiser son numérateur. Si ce n'est pas le cas, on dérivera K par rapport à φ pour trouver le maximum.

$$1+m\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \text{ est minimal si } \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\varphi = 2p\pi. \quad (p \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Or } \sin(2p\pi) = 0. \quad \text{Ça ne marche pas.}$$

On va encore essayer de ruser pour limiter les calculs

Tout ceci ne marche pas!

La question expérimentale est assez floue.

Peut-on "traiter" l'objet à étudier? Si oui, on peut le colorer, ou le traiter pour qu'il soit semi-réfléchissant (ça se fait sur des fourmis, celles plus grasses). La transmission par l'objet serait modifiée, et on le verrait mieux.

Peut-on modifier le fluide? Si oui, il faut prendre un indice qui s'éloigne plus de $n' = 1,515$.

Doit-on travailler sans modifier l'objet et le fluide? Si oui, il faut un dispositif qui modifie ϵ jusqu'à ce que le contraste soit maximal ...

proportion "graphique".

D'après le graphe, c'est au voisinage de φ_1 que I varie le plus vite avec φ . donc que I' sera le plus différent de I , donc que le contraste sera maximal.

Déterminons $K(\varphi_1) = K(0,2 \text{ rad}) \approx \frac{m}{2} \frac{C\varphi}{1+m(\frac{\varphi}{2})^2}$ avec $\varphi_1 \ll \pi$.

$$\approx 40 \cdot \frac{0,2}{1+80(0,1)^2} \approx 4 \times \frac{2}{1+0,8} \approx 4 \times \frac{2}{1,8}$$

$$\boxed{K(\varphi_1) \approx 4}$$

Pour avoir $C = 0,1$; il faut $|\Delta\varphi| = \frac{0,1}{4} \approx 0,025 \text{ rad}$.

$$\text{or } \Delta\varphi = \frac{(n-n')2\pi\epsilon}{\lambda} \quad \text{d'où } \epsilon_{\min} = \frac{0,025 \cdot 546 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}}$$

$$= \frac{\frac{5}{2} \cdot 10^{-5} \cdot 546 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}}$$

On venait des détails de 0,5 μm d'épaisseur.

$$= \frac{\frac{5}{2} \cdot 10^{-6}}{2 \times 2 \times 3} \approx 0,5 \mu\text{m}$$

Une balançoire.

CCP PC1 2013.

1) Le référentiel terrestre n'est pas galiléen car il est en rotation par rapport au référentiel géocentrique, lui-même en translation dans le référentiel de Copernic, qu'on considère galiléen. Le mouvement du référentiel géocentrique dans le référentiel de Copernic a une période de 1 an ≈ 365 j; donc sur 1 jour, on peut considérer la translation comme rectiligne uniforme et pour des durées inférieures à 1 journée, le référentiel géocentrique est galiléen.

La rotation du référentiel terrestre dans le référentiel géocentrique a une période d'environ 24 h; donc sur une dizaine de minutes, le référentiel terrestre a suffisamment peu tourné pour qu'on le considère galiléen, comme le référentiel géocentrique.

Ainsi, pour une expérience qui ne dure que quelques minutes, on peut considérer le référentiel terrestre comme galiléen.

Les mouvements de la balançoire sont dans ce cas.

2.1) et 2.2) On va répondre un peu dans le désordre par rapport aux questions. En effet, pour pouvoir utiliser les coordonnées polaires, il faut d'abord montrer que le mouvement est plan.

Je commence donc par 2.2).

J'applique le théorème du moment cinétique (TMC) dans le référentiel terrestre galiléen à l'enfant sur sa balançoire.

Bilan des actions : $\rightarrow$ le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ appliqué en Π .
 $\rightarrow$ la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ appliqué en Π .

Le TNC s'écrit : $\frac{d\vec{T}_0}{dt} = \vec{ON} \wedge \vec{P} + \vec{ON} \wedge \vec{T}$ avec O fixe

Ainsi $\frac{d(\vec{ON} \wedge m\vec{v})}{dt} = \vec{ON} \wedge \vec{P} + \vec{O}$

Or, à $t=0$, $\vec{ON}$ et $\vec{v}$ sont dans le plan de la feuille donc $\vec{T}_0(0)$ est perpendiculaire à la feuille.

et $\vec{ON}$ et $\vec{P}$ sont également dans le plan de la feuille donc $\frac{d\vec{T}_0}{dt}$ est perpendiculaire à la feuille.

Ainsi $\vec{T}_0$ reste perpendiculaire à la feuille à $t=0+dt$, ce qui signifie que $\vec{ON}$ et $\vec{v}$ restent dans le plan de la feuille de même que $\vec{P}$. Et ainsi, de proche en proche (cf méthode d'Euler), $\vec{T}_0$ reste perpendiculaire à la feuille (suivant $\vec{u}_z$) et le mouvement est plan.

2.1.1] Le bilan des actions reste le même.

On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) à l'enfant ou sa balançoire dans le référentiel terrestre R_T galiléen, en utilisant les coordonnées cylindriques.

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

or $\vec{ON} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ l\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $r = \text{cte}$.

on dérive une deuxième fois : $\vec{a} = \begin{pmatrix} -l\dot{\theta}^2 \\ l\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$

D'autre part $\vec{P} = mg \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$



On projette le PFD sur $\vec{u}_0$: $ml\ddot{\theta} = -mg \sin\theta + 0$

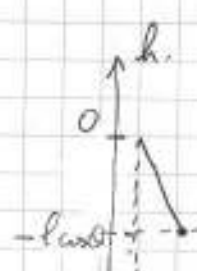
2.1.2) On va utiliser le théorème de l'énergie mécanique (TEM) qui est la même chose que le théorème de l'énergie cinétique en remplaçant le travail des forces conservatives (le poids $\vec{P}$ ici) par l'opposé de la variation de leur énergie potentielle.

C'est-à-dire $E_m(t) - E_m(0) = W_{0 \rightarrow t}(\vec{T})$

Rmq. le système {enfant} et le référentiel R_T galiléen restent les mêmes.

On $E_m(t) = E_p(t) + E_c(t)$

avec $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

et $E_p = m g h = -m g l \cos \theta$ 
(h étant orienté vers le haut, d'origine 0).

D'où $E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta$.

D'autre part $\vec{T}$ ne travaille pas car elle est perpendiculaire au déplacement de π .

Ainsi E_m est constante, c'est-à-dire $\frac{dE_m}{dt} = 0$.

ou encore $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta \right) = 0$

$\boxed{l \ddot{\theta} = -g \sin \theta}$. On retrouve la même équation.

2.1.3) On va terminer d'appliquer le TIC du 2.2)

$\vec{T}_0 = \vec{ON} \wedge m \vec{v} = \begin{vmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ m l \dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = m l^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$

$\vec{M}_0(\vec{P}) = \vec{ON} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} m g \cos \theta \\ -m g \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix} = -m l g \sin \theta \vec{u}_z$

d'où $\frac{d\vec{T}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{P}) + \vec{0}$ dérivé après projection sur $\vec{u}_z$:

$m l^2 \ddot{\theta} = -m g l \sin \theta$ soit, encore, $\boxed{l \ddot{\theta} = -g \sin \theta}$

2.3] Il faut que l'équation du mouvement soit celle d'un oscillateur harmonique: $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta$, donc tout d'abord qu'on puisse assimiler $\sin \theta$ à θ , ce qui impose que les angles soient petits et de travailler en rad.

alors $\sin \theta = \theta$. et l'équation du mouvement devient

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta} \quad \text{On identifie} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

A.N. On suppose que θ_0 est petit.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{10}{2,5}} = \sqrt{4} = 2 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 3 \text{ s.}}$$

$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ est la solution du mouvement avec $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

d'où $v = l\dot{\theta} = -l\omega_0 \theta_0 \sin \omega_0 t$.

On trouve $\boxed{v_{\max} = l\omega_0 \theta_0}$

$$\text{A.N.} \quad v_{\max} = 2,5 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 30.$$

$$\boxed{v_{\max} = \frac{5 \cdot \pi}{6} \approx 2,5 \text{ m.s}^{-1}}$$

3.1] On reprend l'expression du théorème de l'énergie cinétique:

$$\frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgl \cos \theta = \frac{1}{2} m l^2 \underset{v(0)=0}{\theta^2} - mgl \cos \theta_0.$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{l}}}$$

or $T = \int dt$, il suffit donc de séparer les variables et d'intégrer.

$$dt = \pm \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

mais il faut bien choisir le signe.

Comme θ oscille, il est plus simple de travailler sur un quart de période $\frac{T}{4}$, θ allant alors de θ_0 à 0.

Dans ce cas θ diminue pendant que t augmente, il faut garder le signe $-$.

$$\int_0^{T/4} dt = \left[\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \right]$$

si θ est petit $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$; $\cos\theta_0 = 1 - \frac{\theta_0^2}{2}$

$$\text{d'où } \frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta_0^2}{2}}} = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{\sqrt{2}}{\theta_0} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2}}$$

On fait un changement de variable $X = \frac{\theta}{\theta_0}$

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_1^0 \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 d(\arcsin X).$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} (\arcsin 1 - \arcsin 0)$$

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{d'où } \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

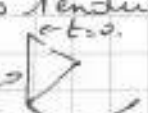
On retrouve le résultat du 2.3.

On remarque sur la courbe que notre évaluation de T_0 est correcte. Ensuite, que la période augmente avec θ_0 .

Pour $\theta_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \approx 0,5$ rad, la période est peu différente de T_0 .

On peut considérer que θ_0 est un petit angle. (à 10% près).

Enfin, c'est une courbe théorique et non expérimentale car pour $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$

(environ 1,5), la corde de la balancine n'est pas tendue initialement et on n'observe pas de belles oscillations: 

3.2] L'équation de en θ s'écrit $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$, c'est-à-dire dans ce cas $\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right)}$

3.3.1] $\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta_0 \cos(\omega t) - 3\omega^2 \varepsilon \theta_0 \cos(3\omega t)$

$$\theta^3 = \theta_0^3 \left(\cos^3 \omega t + 3\varepsilon \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t) + 3\varepsilon^2 \cos(\omega t) \cos^2(3\omega t) + \varepsilon^3 \cos^3(3\omega t) \right)$$

$$\approx \theta_0^3 \left(\cos^3 \omega t + 3\varepsilon \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t) \right) \quad \text{au premier ordre en } \varepsilon.$$

On reporte :

$$-\omega^2 \theta_0 \cos \omega t - 3\omega^2 \varepsilon \theta_0 \cos(3\omega t) = -\frac{g}{\ell} \left[\theta_0 \cos(\omega t) + \varepsilon \theta_0 \cos(3\omega t) - \theta_0^3 \left(\cos^3 \omega t + 3\varepsilon \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t) \right) \right]$$

Le terme en $\frac{\theta^3}{6}$ est un terme de correction (perturbatif) donc infiniment petit. On ne garde donc pas le terme en $\varepsilon \theta_0^3$, qui est infiniment petit à cause de θ_0^3 et de ε , donc 2 fois.

On regroupe les termes en $\cos \omega t$. $\left(\cos^3 \omega t = \frac{3\cos \omega t + \cos 3\omega t}{4} \right)$

$$-\omega^2 \theta_0 \cos \omega t = -\frac{g}{\ell} \theta_0 \cos \omega t + \frac{g}{\ell} \theta_0^3 \frac{3\cos \omega t}{4}$$

$$\text{d'où } \omega^2 = \frac{g}{\ell} \left(1 - \frac{3}{4} \theta_0^2 \right)$$

$$\text{c'est-à-dire } \boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{3}{4} \theta_0^2}}$$

(ω diminue donc T augmente, c'est compatible avec la courbe numérique)

Rmq: Ce n'est pas du tout le résultat attendu!

On regroupe les termes en $\cos(3\omega t)$

$$-3\omega^2 \varepsilon \theta_0 \cos(3\omega t) = -\frac{g}{\ell} \varepsilon \theta_0 \cos(3\omega t) + \frac{g}{\ell} \theta_0^3 \frac{\cos(3\omega t)}{4}$$

$$\text{On utilise } \omega^2: -3\left(\frac{g}{\ell}\right) \left(1 - \frac{3}{4} \theta_0^2\right) \varepsilon = -\frac{g}{\ell} \varepsilon + \frac{g}{\ell} \theta_0^2 \frac{1}{4}$$

$$\text{soit } \left(-3 + \frac{27}{4} \theta_0^2 + 1 \right) \varepsilon = \frac{\theta_0^2}{4}$$

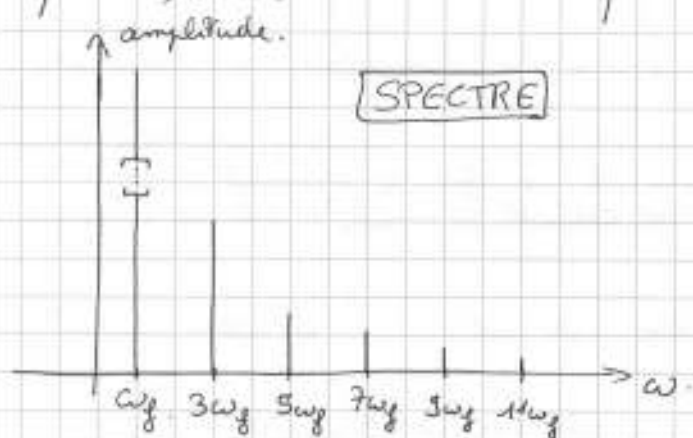
$$(-32 + 27 Q_0^2) E = Q_0^2$$

d'où
$$E = \frac{Q_0^2}{-32 + 27 Q_0^2}$$

3.3.2] J'ai déjà répondu en remarque: ω diminue donc T augmente par rapport à T_0 (mouvement harmonique)
c'est compatible avec la courbe numérique

3.3.3] Les pulsations présentes sont ω (fondamental) et 3ω (1^{re} harmonique)
noté ω_g

3.3.4] Le DL de $\sin \theta$ ne comportant que des puissances impaires, on ne va trouver que les harmoniques impairs:



Les amplitudes sont de plus en plus faibles.

4.1] ~~On revient à des petits angles (pas précis dans~~

$C \frac{d\theta}{dt}$ est un moment donc il s'exprime en $N.m = kg.m^2.s^{-2}$

or $\frac{d\theta}{dt}$ s'exprime en s^{-1} donc C en $kg.m^2.s^{-1}$

La dimension de C est $\Pi.L^2.T^{-1}$

4.2] Le TNC devient: $m l^2 \ddot{\theta} = -m g l \sin \theta - C \dot{\theta}$
par projection sur $\vec{u}_\theta$

4.3] On considère des angles petits donc $m l^2 \ddot{\theta} = -m g l \theta - C \dot{\theta}$

Réduisons: $ml'\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + mgl\theta = 0$.

L'équation caractéristique est $ml^2r^2 + Cr + mgl = 0$,
de discriminant $\Delta = C^2 - 4m^2gl^3$.

Si $\Delta > 0$, le régime est apériodique, il n'y a pas d'oscillations.

Si $\Delta = 0$, le régime est critique, il n'y a pas d'oscillations.

Il faut que $\Delta < 0$ pour que le régime soit pseudo-périodique,
soit $\boxed{C < 2ml\sqrt{gl}}$.

Dans ce cas $r = \frac{-C \pm j\sqrt{-\Delta}}{2ml^2} = -\frac{C}{2ml^2} \pm j\sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{C}{2ml^2}\right)^2}$

La solution est $\theta = A \cos(\omega_0 t + \varphi) e^{-\frac{C}{2ml^2}t}$ arrimé à $\sqrt{\frac{g}{l}} = \omega_0$

après 20 oscillations $t = 20 \frac{2\pi}{\omega_0}$.

$$e^{-\frac{C}{2ml^2} 20 \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{1}{2}$$

$$C = \ln 2 \frac{2ml^2}{20 \cdot 2\pi} \omega_0 \simeq 1 \times \frac{20 \cdot (2,5)^2}{20 \cdot \pi} 2 \simeq 5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\boxed{C \simeq 5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}}$$

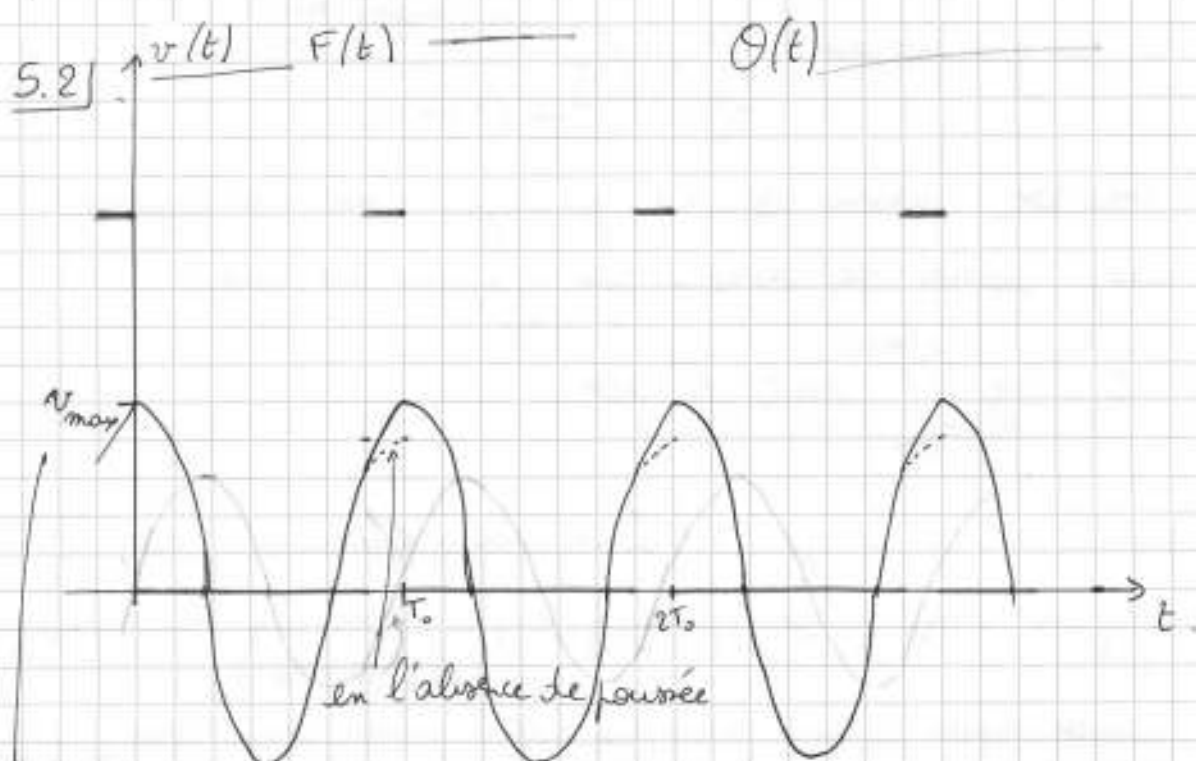
(Je ne connais pas par cœur $\ln 2$.
c'est < 1 mais plus proche de 1
que de 0).

5.) On ne connaît pas la durée de la poussée et on ne sait pas si cette durée est la même pour toutes les "portions de la poussée". On va donc raisonner sur le moment, et pas sur l'énergie, qui dépend de la durée de la poussée.

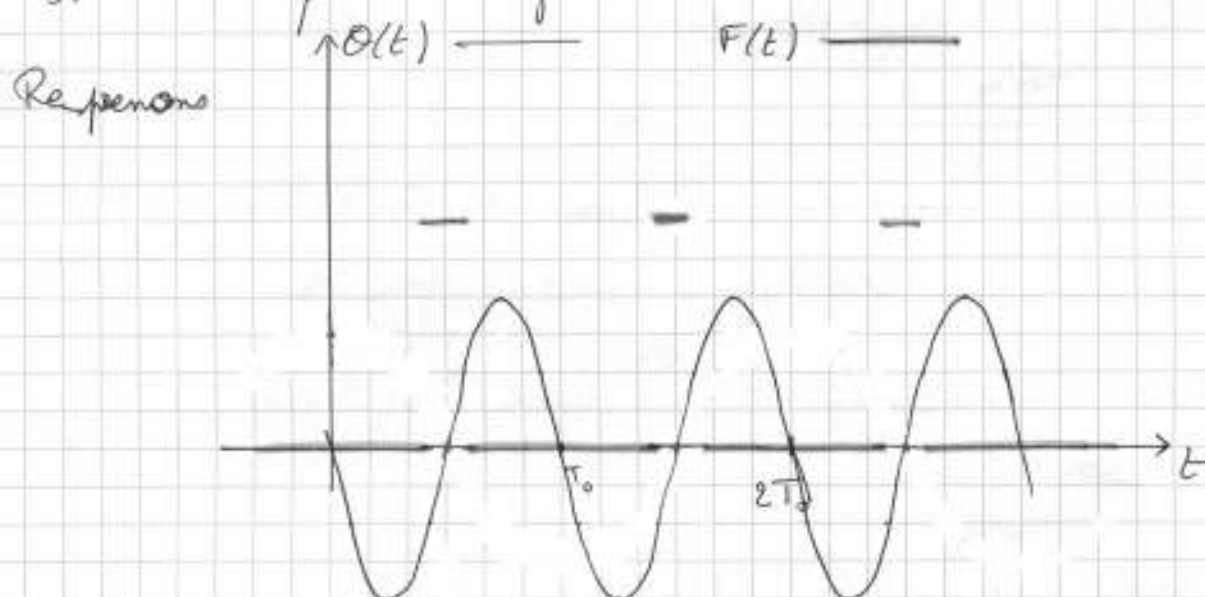
$\|\vec{M}_O(\vec{F})\| = \|\vec{OI} \wedge \vec{F}\|$ est maximal si $\vec{OI}$ est perpendiculaire à $\vec{F}$ qui est horizontale donc si $\vec{OI}$ est verticale.

Il faut donc pousser quand l'enfant est en bas de la trajectoire et va vers l'avant! (sinon on ralentit la balançoire)

La période doit donc être un multiple de T_0 , et valoir T_0 pour que ce soit plus efficace.



Il n'est pas aisé de représenter $O(t)$ avec la correction due à la face. Il me vient un peu tard à l'idée que tracer le $O(t)$ sinusoidal peu suffire, et que l'énoncé ne s'intéresse qu'à la synchronisation!



5.3] $P = \vec{M} \cdot \vec{\Omega}$ pour un couple.

$$= -C \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} = -C (\omega \theta_0 \sin \omega t)^2$$

si on considère que la poussée compense exactement les frottements

d'où $P_{dissipée} = + C \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t$

et $\langle P_{dissipée} \rangle = \frac{1}{2} C \omega_0^2$

En d'où $W_{frottements} = - \int_0^{20T_0} P_{dissipée} dt$

$= - \frac{1}{2} C \omega_0^2 20T_0$ où $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$W_{frottements} = - 20 \pi C \omega_0$

Comme la puissance compense les frottements, $W_{frott} + W_{poussée} = 0$

$W_{poussée} = 20 \pi C \omega_0$

A.N $W_{poussée} \approx 20 \cdot \pi \cdot 5 \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 2 \approx 200 \pi \frac{10}{36} = \frac{6 \times 100 \times 10}{6 \times 6}$

$W_{poussée} \approx 2 \cdot 10^2 J$

6.1.1) On considère comme système {l'enfant + la planche de la balançoire + la partie basse de la corde de la balançoire}



Le système subit les forces extérieures:

dans le référentiel tournant lié à la balançoire

→ poids: $\vec{P}$

→ tension du fil (de la corde): $\vec{T}$

→ force d'inertie d'entraînement: $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$

→ force d'inertie de Coriolis: $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -m 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_n$

Or le poids est une force conservative donc $W_{A \rightarrow A}(\vec{P}) = 0$

Le point d'application P de la tension du fil est fixe dans le référentiel tournant donc $W_{A \rightarrow A}(\vec{T}) = 0$

La force d'inertie de Coriolis est perpendiculaire au mouvement donc ne travaille pas. Il ne reste que le travail de $\vec{f}_{ie}$.

or $\vec{f}_{ie} = -m [\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{ON}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{ON}] = +m \omega^2 ON \vec{u}_r - m \dot{\omega} ON \vec{u}_\theta$

$$W_{(P)}|_{A \rightarrow A} = \int_A^B m \omega^2 O \Pi \vec{u}_1 \cdot d\vec{u}_1 + \int_B^{C_n} (-m \dot{\omega} O \Pi) \vec{u}_0 \cdot O \Pi d\theta \vec{u}_0 \\ + \int_{C_n}^{D_n} m \omega^2 O \Pi \vec{u}_1 \cdot d\vec{u}_1 + \int_{D_n}^A (-m \dot{\omega} O \Pi) \vec{u}_0 \cdot O \Pi d\theta \vec{u}_0$$

Pendant les phases AB et $C_n D_n$, le mouvement est suivant $\vec{u}_1$ et pendant les phases $B C_n$ et $D_n A$, suivant $\vec{u}_0$.

En outre entre C_n et D_n , $\omega = 0$ d'où $\int_{C_n}^{D_n} \dots = 0$.

$$\text{or } \int_A^B \dots = m \omega^2 \int_B^{L_{\min}} r dr = m \omega_B^2 \frac{L_{\min}^2 - L_{\max}^2}{2} < 0.$$

vit. angulaire au début de la 1/2 oscillation

Entre B et C_n , $O \Pi = L_{\min}$ d'où $\int_B^{C_n} \dots = -m L_{\min}^2 \int_B^{C_n} \dot{\omega} d\theta$

et de même $\int_{D_n}^A \dots = -m L_{\max}^2 \int_{D_n}^A \dot{\omega} d\theta = -m L_{\max}^2 \int_{D_n}^A \dot{\omega} \omega dt$

$$= -m L_{\max}^2 \int_{D_n}^A \frac{d(\frac{1}{2} \omega^2)}{dt} dt = -m L_{\max}^2 \left[\frac{1}{2} \omega_A^2 - \frac{1}{2} \omega_{D_n}^2 \right]$$

$$= -m L_{\max}^2 \left[\frac{1}{2} (\omega_A)^2 - \frac{1}{2} \omega_{D_n}^2 \right]$$

vit. angulaire à la fin de la 1/2 oscillation

$$\text{Ainsi } W_{A \rightarrow A}(P) = m \left[\underbrace{\omega_B^2 \frac{L_{\min}^2 - L_{\max}^2}{2}}_{< 0} + L_{\min}^2 \frac{1}{2} \omega_B^2 - L_{\max}^2 \frac{1}{2} \omega_A^2 \right]$$

$$L_{\min} < L_{\max}$$

$\omega_B < \omega_A$ si la balancine va de + en + vite donc

$$\text{Ainsi } \boxed{W_{A \rightarrow A}(P) < 0}$$

(Tout ça pour ça!)

6.1.3] Dans le référentiel lié à la balancine, $E_c = 0$ au point A au début et à la fin du cycle d'une, d'où le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_c = W_{(P)}^{\text{fest}} + W_{(P)}^{\text{font}}$

$$= 0$$

Comme $W_{\text{fest}}^{(p)} < 0$, alors $W_{\text{fint}}^{(p)} > 0$

6.1.4] Dans le référentiel renesté maintenant, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit $\Delta E_c = W_{\text{fint}}^{(p)} + W_{\text{fest}}^{(p)}$

Entre A et A, on a m que $W_{\text{fint}}^{(p)} > 0$. Or $W_{\text{fest}}^{(p)} = 0$ car le poids est conservatif $W_{A \rightarrow A} = 0$ et $\vec{T}$ est perpendiculaire au mouvement donc ne travaille pas.

D'où $\Delta E_c > 0$. La balancine va de plus en plus vite en bas de sa trajectoire, ce qui lui permet de monter de plus en plus haut.

6.2.1] $L_0 = \vec{OP} \wedge m \vec{v}_P$ avec $\vec{v}_P = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{l} \\ l\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$

D'où $L_0 = l^2 m \dot{\theta} \vec{u}_z$

6.2.2] Le point O est fixe; on peut appliquer le théorème du Moment Cinétique à la masse m dans le référentiel renesté (TNC)

Bilan des forces: $\rightarrow$ poids $\vec{P} = m\vec{g}$
 $\rightarrow$ tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u}_z$

Le TNC s'écrit $\frac{dL_0}{dt} = \vec{OP} \wedge \vec{P} + \vec{OP} \wedge \vec{T}$
 $\frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\theta}) \vec{u}_z = -m g \sin \theta l \vec{u}_z$

Ainsi $\frac{d}{dt} (l^2 \dot{\theta}) = -g \sin \theta l$

(on ne développe pas le terme de gauche et on n'oublie pas que l dépend de θ donc de t).

6.2.3] $(l^2 \dot{\theta}) \frac{d}{dt} (l^2 \dot{\theta}) = -g \sin \theta l^3 \dot{\theta}$

On multiplie par dt et on intègre

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} d\left[\frac{1}{2} l^2 \dot{\theta}\right] = \int_{\theta_n}^{\theta_{n+1}} -g \sin \theta \underbrace{l^3}_{\frac{d\theta}{dt}} \dot{\theta} dt$$

↑ instant où θ_n est atteint

Le terme de gauche est $\left[\frac{1}{2} l^2 \dot{\theta}\right]_{t_n (\text{angle } \theta_n)}^{t_{n+1} (\text{angle } \theta_{n+1})}$

Or si $\theta = \theta_n$, alors $\dot{\theta} = 0$ puisque c'est l'élongation maximale. Ainsi le terme de gauche est nul.

$$\text{Ainsi } 0 = -g \int_{\theta_n}^{\theta_{n+1}} \sin \theta l^3 d\theta.$$

△ Contrairement à ce qui est écrit dans l'énoncé, c'est $\int_{\theta_n}^{\theta_{n+1}}$ car les angles sont algébriques, g compris les élongations maximales (cf figure 7)

On va quand même suivre l'énoncé et à partir d'ici, les élongations maximales sont géométriques $\theta_n > 0$, $\theta_{n+1} > 0$, mais les angles algébriques

C'est-à-dire $\theta(t_n) = -\theta_n$ et $\theta(t_{n+1}) = +\theta_{n+1}$
(c'est-à-dire le contraire de la figure 7!)

$$\text{Bref } 0 = \int_{-\theta_n}^{\theta_{n+1}} \sin \theta l^3(\theta) d\theta.$$

6.2.4] Intégrons avec $l(\theta) = L+h$ pour $-\theta_n < \theta < 0$
et $l(\theta) = L$ pour $0 < \theta < \theta_{n+1}$.

$$\text{Soit } 0 = \int_{-\theta_n}^0 L^3 \sin \theta d\theta + \int_0^{\theta_{n+1}} (L+h)^3 \sin \theta d\theta$$

$$L^3 [-\cos \theta]_{-\theta_n}^0 + (L+h)^3 [-\cos \theta]_0^{\theta_{n+1}} = 0$$

$$L^3 (1 - \cos \theta_n) + (L+h)^3 (\cos(\theta_{n+1}) - 1) = 0$$

$$\text{Soit } \boxed{\frac{\cos(\theta_{n+1}) - 1}{\cos(\theta_n) - 1} = \left(1 + \frac{h}{L}\right)^{-3}}$$

Reste à introduire $\sin \theta_n \dots$ avec $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

On trouve
$$\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{n+1}}}{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_n}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{L}\right)^3} \quad \text{c'est pire!}$$

On va plutôt introduire $\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ car cela va simplifier l'expression obtenue.

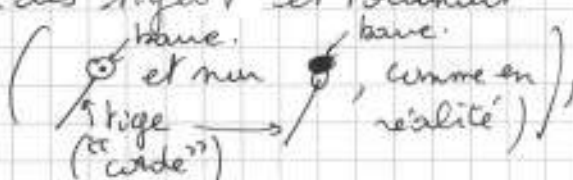
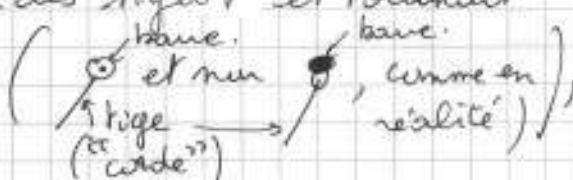
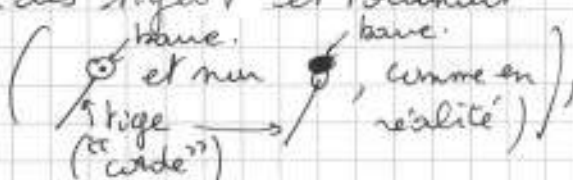
$$\frac{\cancel{L} \sin^2\left(\frac{\theta_{n+1}}{2}\right)}{\cancel{L} \sin^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{L}\right)^3} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\theta_{n+1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)} = \left(1 + \frac{h}{L}\right)^{-3/2}}$$

6.2.5) Ainsi $\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \left[\left(1 + \frac{h}{L}\right)^{-3/2}\right]^n$

et
$$\boxed{\theta_n = 2 \arcsin \left[\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \left(1 + \frac{h}{L}\right)^{-\frac{3n}{2}} \right]}$$

6.2.6) Plus θ_0 est grand, plus θ_n sera grand pour le même n .
On prendra donc θ_0 élevé (non nul en tout cas!)

Pour faire un "soleil", il faudrait que les cordes soient rigides, ce qui n'est pas le cas (cf remarque du 3.1)

Si la balançoire était tenue par des tiges rigides et tournait autour de la barre horizontale (et non , comme en , comme en ),

θ_n ne ferait qu'augmenter et on pourrait faire un "Soleil".

7.1.1] A la montée:

$$\vec{L}_O = \vec{OA} \wedge m \vec{v}_O + \vec{OA} \wedge \mu \vec{v}_A$$

avec $\vec{OA} = \begin{pmatrix} l \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{v}_A = \begin{pmatrix} -a\dot{\theta} \\ l\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $\vec{L}_O = m \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ l\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} l \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -a\dot{\theta} \\ l\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{L}_O = [m l^2 \dot{\theta} + \mu (l^2 \dot{\theta} + a^2 \dot{\theta})] \vec{u}_z}$$

A la descente, il faut remplacer a par $-a$ et on trouve le même résultat.

7.1.2] A la montée: $\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OA} \wedge m \vec{g} + \vec{OA} \wedge \mu \vec{g}$

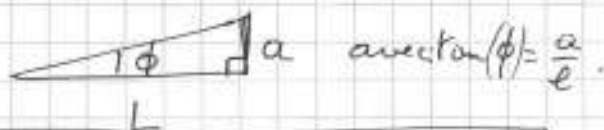
Ainsi $\vec{M}_O(\vec{P}) = mg \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \mu g \begin{pmatrix} l \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

A la montée $\boxed{\vec{M}_O(\vec{P}) = \left\{ mg [-l \sin\theta] + \mu g [-l \sin\theta - a \cos\theta] \right\} \vec{u}_z}$

A la descente, on remplace a par $-a$

d'où $\boxed{\vec{M}_O(\vec{P}) = \left\{ mg (-l \sin\theta) + \mu g (-l \sin\theta + a \cos\theta) \right\} \vec{u}_z}$

Essayons d'introduire ϕ .



$$\boxed{\vec{M}_O(\vec{P}) = -gl \left\{ m \sin\theta + \mu (\sin\theta - \tan\phi \cos\theta) \right\} \vec{u}_z} \quad \begin{matrix} \text{à la descente} \\ \uparrow \\ \text{à la montée} \end{matrix}$$

7.1.3] Bilan des forces: $\rightarrow$ Poids de Π et de A .

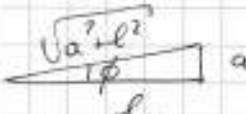
$\rightarrow$ Tension du fil $\vec{T} = -T \vec{u}$.

Le TMC appliqué à l'enfant dans R_{terre} par rapport à O force s'écrit donc

$$\frac{d\mathcal{L}_0}{dt} = \mathcal{H}_0(\vec{p}) + \mathcal{H}_0(\vec{\pi}) = \mathcal{H}_0(\vec{p}) + 0$$

Où par projection sur $\vec{u}_z$ à la montée.

$$(m l^2 + \gamma l^2 + \gamma a^2) \ddot{\theta} = -g l \{ m \sin \theta + \gamma (\sin \theta + \tan \phi \cos \theta) \} \quad (E)$$

Dans le triangle  a , $\cos \phi = \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}$ et $\sin \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}}$

et d'autre part $\sin(\theta + \phi) = \cos \theta \sin \phi + \cos \phi \sin \theta$

$$(E) \text{ devient } \ddot{\theta} = - \frac{g l m \sin \theta}{(m + \gamma) l^2 + \gamma a^2} - \frac{g l \gamma (\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta)}{[(m + \gamma) l^2 + \gamma a^2] \cos \phi}$$

$$\ddot{\theta} = - \frac{g l m \sin \theta}{(m + \gamma) l^2 + \gamma a^2} - \frac{g l \gamma \sqrt{a^2 + l^2}}{[(m + \gamma) l^2 + \gamma a^2] l} \sin(\theta + \phi)$$

On a bien l'expression proposée avec $\omega_1^2 = + \frac{g l m}{(m + \gamma) l^2 + \gamma a^2}$

et $\Delta \omega^2 = \frac{g \gamma \sqrt{a^2 + l^2}}{(m + \gamma) l^2 + \gamma a^2}$

A la descente, il faut modifier (E) en $\dots + \gamma (\sin \theta - \tan \phi \cos \theta)$

c'est-à-dire $\dots + \frac{\gamma}{\cos \phi} [\cos \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \theta]$ (E')

ou encore $+ \frac{\gamma}{\cos \phi} \sin(\theta - \phi)$

Tout le reste étant identique, on obtient l'expression proposée pour la descente.

7.21) A la montée:

$$\ddot{\Theta} = -(\omega_1^2 + \Delta\omega^2) \Theta(t) - \Delta\omega^2 \phi$$

en considérant que ϕ aussi est petit.
(non précisé)

A la descente

$$\ddot{\Theta} = -(\omega_1^2 + \Delta\omega^2) \Theta(t) + \Delta\omega^2 \phi$$

7.2.2) A la montée, en posant $\Omega^2 = \omega_1^2 + \Delta\omega^2$, on obtient

$$\ddot{\Theta} + \Omega^2 \Theta = -\Delta\omega^2 \phi$$

et à la descente $\ddot{\Theta} + \Omega^2 \Theta = +\Delta\omega^2 \phi$

Ainsi $E_{exc}(t) = -\Delta\omega^2 \phi$ à la montée

$E_{exc}(t) = +\Delta\omega^2 \phi$ à la descente.

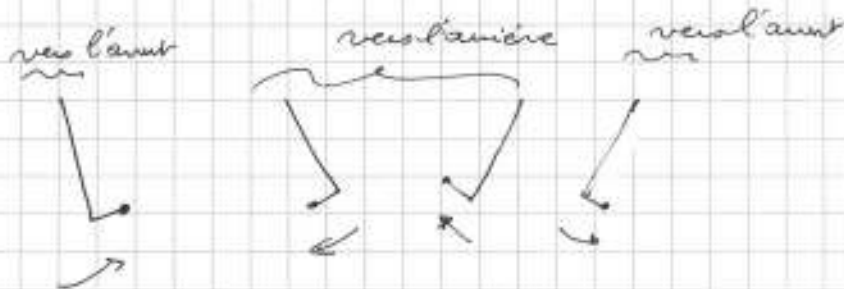
On va représenter E_{exc} sur la première période = $\frac{2\pi}{\Omega}$

1^{re} phase: descente vers l'avant.

Rmq Il est à remarquer que les phases "montées" et "descente" ne sont pas correctement nommées. C'est "vers l'avant" et "vers l'arrière" qu'il faudrait écrire.

En effet si , l'effet de la première demi-période est compensé par l'effet de la deuxième demi-période.

Il faut donc



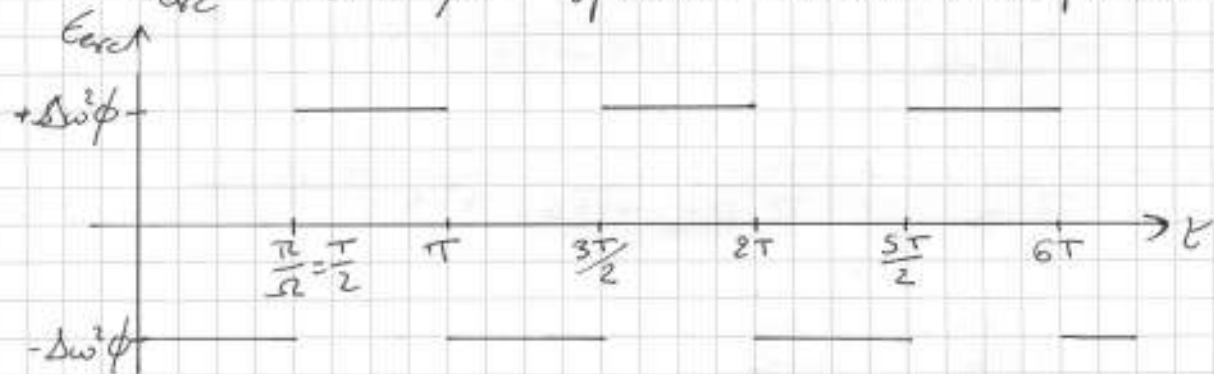
Reprenons: 1^{re} phase: descente vers l'avant et montée vers l'avant

$$E_{exc} = -\Delta\omega^2 \phi$$

pendant une demi-période, soit $\frac{\pi}{\Omega}$

2^e phase: descente et montée vers l'arrière.

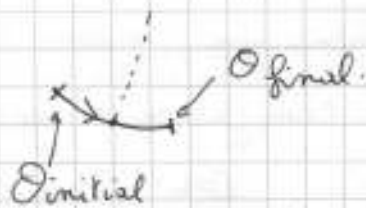
$E_{exc} = +\Delta\omega^2\phi$ pendant l'autre demi-période.



Rmq Cette méthode ne marche pas!

Expérimentalement (j'ai essayé), ce n'est pas le mouvement des jambes qui augmente les oscillations, c'est le mouvement du haut du corps: vers l'arrière quand la balançoire avance et vice versa.

En théorie: si on résout l'équation différentielle au chaque demi-période, on trouve des oscillations autour de $-Q_n = -\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)^2\phi < 0$ vers l'avant et de $+Q_n$ vers l'arrière, soit, pour la demi-période «vers l'avant»:



On remarque que $|Q_{final}| < |Q_{initial}|$, ce qui n'est pas du tout le but recherché.

7.2.3 $E_{ex}(t) = \begin{cases} -\Delta\omega^2\phi & \text{entre } 0 \text{ et } \frac{T}{2} \\ +\Delta\omega^2\phi & \text{entre } \frac{T}{2} \text{ et } T. \end{cases}$ et est périodique.

On remarque que E_{ex} est impaire donc son DSF (développement en Série de Fourier) ne comporte que des termes impairs, c'est-à-dire des sinus.

En outre, l'axe $t = \frac{T}{4}$ est un axe de symétrie, comme pour les sinus $(2n+1)\Omega t$ et contrairement aux cos $(2n)\Omega t$, il n'y a

donc que les sinus d'ordre impair dans le DSF

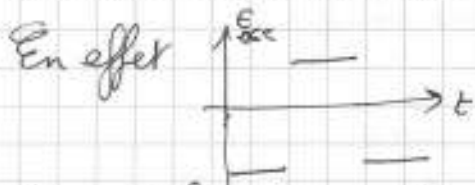
Il ne reste plus qu'à les calculer : on pose $n = 2p+1$

$$\begin{aligned} b_{2p+1} &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} -\Delta\omega^2 \phi \sin((2p+1)\Omega t) dt + \int_{T/2}^T \Delta\omega^2 \phi \sin((2p+1)\Omega t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \Delta\omega^2 \phi \left\{ \left[\frac{\cos((2p+1)\Omega t)}{(2p+1)\Omega} \right]_0^{T/2} - \left[\frac{\cos((2p+1)\Omega t)}{(2p+1)\Omega} \right]_{T/2}^T \right\} \\ &= \frac{2}{T} \Delta\omega^2 \phi \frac{(\cos((2p+1)\Omega T) - 1) - (1 - \cos((2p+1)\Omega T/2))}{(2p+1)\Omega} \\ &= \frac{2 \Delta\omega^2 \phi}{T (2p+1) \frac{2\pi}{T}} (-4) \end{aligned}$$

$$b_{2p+1} = - \frac{4 \Delta\omega^2 \phi}{T \Omega} \frac{1}{(2p+1)}$$

Ainsi
$$E_{exc} = - \frac{4 \Delta\omega^2}{T \Omega} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin(n \Omega t)}{n}$$

Je trouve une erreur de signe dans l'énoncé.



E_{exc} commence par une valeur négative, ce qui correspond bien à des $-\sin$.

Ceci confirme le fait que vers l'avant, il faut déplacer le centre de gravité vers l'arrière ^{normaliser}
 7.2.4) L'oscillation se fait à Ω et il y a un terme de pulsation Ω dans le DSF de l'excitation. Il peut donc y avoir résonance

Sans amortissement, l'angle d'oscillation serait de plus en plus grand et on sortirait de l'approximation des petits angles.

7.2.5) À l'ordre $n \neq 1$

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = \frac{4 \Delta\omega^2 \phi}{n T \Omega} \sin(n \Omega t)$$

avec la solution de l'énoncé donc un $\oplus$.

Le régime forcé correspond à $\Theta_n = A \sin(n\Omega t + \varphi)$, soit $\ddot{\Theta}_n = -n^2 \Omega^2 A \sin(n\Omega t + \varphi)$

$$\text{d'où } [-n^2 A \Omega^2 + \Omega^2 A] \sin(n\Omega t + \varphi) = \frac{4\Delta\omega^2\phi}{n\pi} \sin(n\Omega t)$$

$$\text{d'où } \boxed{\varphi = 0} \text{ et } \boxed{A = \frac{4\Delta\omega^2\phi}{n\pi\Omega^2(1-n^2)}}$$

La solution homogène est $A \sin \Omega t + B \cos \Omega t$.

$$\boxed{\Theta_n = \frac{4\Delta\omega^2\phi}{n\pi\Omega^2(1-n^2)} \sin(n\Omega t)} \text{ en régime forcé}$$

7.2.6] Pour le terme résonnant: $\Theta_1 = t(K \cos(\Omega t) + K' \sin(\Omega t))$

$$\text{d'où } \dot{\Theta}_1 = K \cos(\Omega t) + K' \sin(\Omega t) + \Omega t (-K \sin(\Omega t) + K' \cos(\Omega t))$$

$$\text{et } \ddot{\Theta}_1 = -2\Omega K \sin(\Omega t) + 2\Omega K' \cos(\Omega t) + \Omega^2 t (-K \cos(\Omega t) - K' \sin(\Omega t))$$

$$\text{Ainsi } \ddot{\Theta}_1 + \Omega^2 \Theta_1 = \frac{4\Delta\omega^2\phi}{\pi} \sin \Omega t$$

Soit, pour les termes proportionnels à t :

$$-\Omega^2 t(K \cos(\Omega t) + K' \sin(\Omega t)) + \Omega^2 t(K \cos(\Omega t) + K' \sin(\Omega t)) = 0,$$

ce qui est toujours vérifié.

et pour les autres termes

$$2\Omega (-K \sin(\Omega t) + K' \cos(\Omega t)) = \frac{4\Delta\omega^2\phi}{\pi} \sin(\Omega t)$$

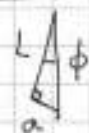
$$\text{d'où } \boxed{K' = 0} \text{ et } \boxed{K = -\frac{2\Delta\omega^2\phi}{\pi\Omega}}$$

L'amplitude ^{maximale} des oscillations augmente linéairement dans le temps, tant que les angles restent petits.

$$\text{Soit } \boxed{\Theta_1 = t \left(-\frac{2\Delta\omega^2\phi}{\pi\Omega} \right) \cos \Omega t}$$

$$\text{7.2.7] Ainsi } \boxed{\Theta(t) = -\frac{2\Delta\omega^2\phi}{\pi\Omega} t \cos(\Omega t) + \sum_{n=3,5,\dots} \frac{4\Delta\omega^2\phi}{n\pi\Omega^2(1-n^2)} \sin(n\Omega t) + A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)}$$

$$\text{Or à } t=0, \Theta=0 \text{ et } \dot{\Theta}=\phi$$



ensuite $\theta(0) = 0 + \sum 0 + A + 0$

Ainsi $A = -\phi$

et $\dot{\theta}(0) = \left(0 - \frac{2\Delta\omega^2\phi}{\pi\Omega}\right) + \sum_{n=3,5,\dots} \frac{4\Delta\omega^2\phi \kappa\Omega}{\kappa\pi\Omega^2(1-n^2)} + 0 + B\Omega$

$$= -\frac{2\Delta\omega^2\phi}{\pi\Omega} - \frac{4\Delta\omega^2\phi}{\pi\Omega} \sum_{n=3,5,\dots} \frac{1}{n^2-1} + B\Omega$$

$$= -\frac{2\Delta\omega^2\phi}{\pi\Omega} - \frac{\Delta\omega^2\phi}{\pi\Omega} + B\Omega$$

Soit $B = \frac{3\Delta\omega^2\phi}{\pi\Omega^2}$

On trouve enfin $\theta(t)$ en remplaçant.

La courbe en pointillés correspond à des oscillations sans mouvement de l'enfant par rapport à la balançoire.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 3s \quad (\text{calcul et expérience})$$

L'autre courbe correspond à un enfant qui déplace son centre de gravité par rapport à la balançoire (mais dans le sens opposé à ce que dit l'énoncé). L'élongation maximale augmente bien linéairement comme prévu. On ne voit absolument pas les harmoniques.

Avec le calcul de l'énoncé (on suppose que ça marche quand même, dans la réalité, il faut inverser).

