

Le rayonnement solaire pour la navigation spatiale

I.1 Conservation de la charge : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$. Loi d'Ohm : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (validité aux fréquences optiques qui font l'objet de ce problème ???). D'où, en ajoutant l'équation de Maxwell-Gauss : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$. Et donc $\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t = 0) \exp(-\frac{t}{\tau})$ avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$.

I.2 Dans le conducteur, en supposant la densité volumique de charge nulle, et en admettant la validité de la loi d'Ohm :

$$\begin{cases} \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \text{div} \vec{E} &= 0 \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \left[\gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \end{cases}$$

I.3 Qualitativement, et dans un modèle classique des électrons : les électrons du métal (du moins ceux qui sont proches de la surface) sont mis en oscillation forcée par le champ électrique de l'onde incidente. Ces électrons rayonnent à leur tour deux OPPH, une qui forme l'onde réfléchie et va se superposer à l'onde incidente (tout en se propageant en sens opposé), et une vers l'intérieur du métal où elle se trouve être, au-delà d'une certaine distance (quelques épaisseurs de peau), exactement opposée à l'onde incidente, de sorte qu'il n'y a au-delà de cette distance pas d'onde électromagnétique dans le métal. Il s'agit de l'effet de peau.

I.4 On note $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ l'épaisseur de peau. Critère de validité du modèle limite du conducteur parfait : $\delta \ll$ épaisseur du conducteur ? Dans ce cas, la réflexion peut être considéré comme totale ?

I.5 La densité de courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligable par rapport à $\gamma \vec{E}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère si $\omega \tau \ll 1$, et alors $\text{rot} \vec{B} \simeq \mu_0 \gamma \vec{E}$.

Remarque : la condition de validité de cette approximation n'est pas équivalente à celle du modèle limite du conducteur parfait, comme semble pourtant le suggérer l'énoncé. Toutefois, les deux sont vérifiées si l'on considère simplement $\gamma \rightarrow \infty$.

I.6 Force volumique de Laplace : $\vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} \wedge \vec{B}$.

Choisissons à partir de maintenant un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tel que l'OPPH incidente se propage vers $+\vec{e}_z$ et que la surface du conducteur soit le plan d'équation $z = 0$.

Alors $\vec{B}(B_x, B_y, 0)$ et par ailleurs $\vec{B}$ ne dépend ni de x ni de y . Alors la force volumique de Laplace vaut $-\frac{1}{\mu_0} \left(B_y \frac{\partial B_y}{\partial z} + B_x \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \vec{e}_z = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} (\vec{B}^2) \vec{e}_z$.

I.7 Calculons alors la force totale qui s'exerce sur un cylindre de conducteur de génératrices parallèles à $\vec{e}_z$, de section d'aire d^2S , et de longueur infinie :

$$d^2\vec{F} = \int_{z=0}^{\infty} -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} (\vec{B}^2(z, t)) d^2S dz \vec{e}_z = \frac{1}{2\mu_0} \|\vec{B}(z=0, t)\|^2 d^2S \vec{e}_z$$

Et donc on a bien une pression exercée $P(t) = \frac{1}{2\mu_0} \|\vec{B}(z=0, t)\|^2$.

I.8 Il convient visiblement de supposer ici que la réflexion est totale, auquel cas $\vec{E}_r(z=0^-, t) = -\vec{E}_i(z=0^-, t)$ (continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$), et donc $\vec{B}_r(z=0^-, t) = \vec{B}_i(z=0^-, t)$, d'où $\vec{B}(z=0^-, t) = 2\vec{B}_i(z=0^-, t)$.

I.9 $u = \epsilon_0 \frac{E_i^2}{2} + \frac{B_i^2}{2\mu_0}$. Pour une OPPH, on a $u(z, t) = \frac{B_i^2(z, t)}{\mu_0}$. Or $P(t) = \frac{1}{2\mu_0} \|\vec{B}(z=0^-, t)\|^2 = \frac{2}{\mu_0} B_i^2(0^-, t)$, et donc $P(t) = 2u(0^-, t)$.

- I.10 Pour l'onde incidente, $\vec{R}_i(z, t) = \frac{c}{\mu_0} B_i^2(z, t) \vec{e}_z$; ce vecteur est toujours dirigé vers $+\vec{e}_z$ et l'on peut noter $\vec{R}_i(z, t) = R_i(z, t) \vec{e}_z$ en notant $R_i(z, t) = \frac{c}{\mu_0} B_i^2(z, t)$ sa norme. Alors $P(t) = \frac{2}{\mu_0} B_i^2(z = 0^-, t) = \frac{2}{c} R_i(z = 0^-, t)$.
- I.11 Attention l'énoncé parle ici bien évidemment de valeurs moyennes temporelles alors que jusqu'ici, il semble qu'il était question de valeurs instantanées. On a $\Phi_0 = \langle R_i(z, t) \rangle = 1350 \text{ W.m}^{-2}$ (la valeur moyenne est indépendante de t bien sûr, mais aussi de z). Alors $P_0 = \langle P(z, t) \rangle = \frac{2}{c} \Phi_0$, d'où $P_0 = 9.10^{-6} \text{ Pa}$; soit environ 10^{-10} fois la pression atmosphérique : cette pression de radiation sera totalement insensible pour un conducteur situé dans l'atmosphère.
- I.12 Si on note r la distance au soleil, R_i varie en $\frac{1}{r^2}$ et donc la pression de radiation également.
- I.13 $\|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c}$ (dans le vide). Considérons une portion d'aire élémentaire d^2S de la surface du conducteur. Le nombre de photons qui frappent cette surface pendant l'intervalle temporel dt est $d^2S c dt n$. Chacun de ces photons voit sa quantité de mouvement passer de $+\hbar k \vec{e}_z$ à $-\hbar k \vec{e}_z$, et donc varier de $-2\hbar k \vec{e}_z$; le conducteur a donc sa quantité de mouvement qui varie de $+2\hbar k \vec{e}_z$ pour chaque photon qui le frappe. Pendant dt , sa quantité de mouvement varie donc de $d^2S c dt n 2\hbar k \vec{e}_z$, ce qui correspond à une force subie $d^2S c n 2\hbar k \vec{e}_z$, et donc à une pression $c n 2\hbar k$.
Or $u = n\hbar\omega = n\hbar k c$ et donc on a bien $P = 2u$.
Attention toutefois ici l'énoncé suppose que "la densité n de photons par unité de volume dans l'onde incidente est supposée uniforme", ce qui correspondrait à une densité d'énergie u uniforme pour l'onde incidente, ce qui n'est pas le cas à la question I.9 ; les deux se réconcilient si on passe aux moyennes temporelles.
- I.14 On reprend le raisonnement du I.13 pour un angle d'incidence α quelconque (en admettant la loi de Descartes pour la réflexion). On a bien sûr toujours $u = n\hbar k c$ pour l'onde incidente. Mais le nombre de photons qui frappent la surface d^2S pendant l'intervalle temporel dt vaut maintenant $d^2S c dt \cos \alpha n$. Chacun de ces photons a une quantité de mouvement qui varie de $-2\hbar k \cos \alpha \vec{e}_z$. Le même raisonnement qu'au I.13 mène à une expression de la pression de radiation $P = 2u \cos^2 \alpha$.

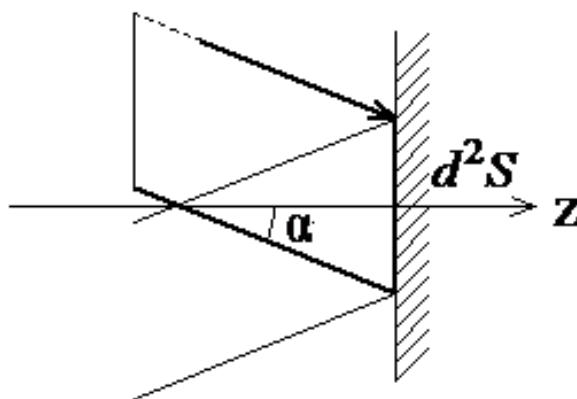


Figure 1: Cas d'une réflexion sous l'angle d'incidence α .

- I.15 Compatibilité avec les résultats théoriques obtenus précédemment (on suppose que la voile solaire est à la même distance du Soleil que la Terre, ce que l'énoncé ne dit pas...) : la voile subit une pression de radiation égale au maximum (en cas d'incidence normale) à 9.10^{-6} Pa , et donc une force maximale égale à $173 \times 9.10^{-6} \simeq 2.10^{-3} \text{ N}$, ce qui est tout à fait compatible avec la valeur donnée de $1, 12.10^{-3} \text{ N}$.

Compatibilité des résultats expérimentaux entre eux : estimons l'effet d'une force de $1,12 \cdot 10^{-3}$ N, en supposant qu'elle est constante, *aussi bien en norme qu'en direction et sens*, pendant une durée d'un mois. La relation $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$, intégrée, donne $\vec{v}_{\text{final}} - \vec{v}_{\text{initial}} = \frac{\vec{F} \Delta t}{m}$, soit (A.N.) une variation de vitesse d'environ 9 m.s^{-1} , qui correspond tout à fait à ce qui est indiqué.

II.1 Question classique ; $v = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r}}$.

II.2 D'après **I.12**, $P(r) = P_0 \frac{D^2}{r^2}$. Et donc (incidence normale) la force exercée sur la voile vaut $\vec{F} = P_0 \frac{D^2}{r^2} S \vec{e}_r$.

II.3 Lorsque les deux forces se compensent, $G \frac{mM_{\odot}}{r^2} = P_0 \frac{D^2}{r^2} S$, et donc $\frac{m}{S} = \sigma_c = \frac{P_0 D^2}{GM_{\odot}}$. Comme, par ailleurs, $v_0^2 = \frac{GM_{\odot}}{D}$ (résultat du **II.1** appliqué à la Terre), il vient $\sigma_c = \frac{P_0 D}{v_0^2}$.

II.4 Avec un chiffre significatif, $\sigma_c \simeq 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-2}$. La question portant sur l'épaisseur de la voile est surprenante car il est vraisemblable que le satellite ne soit pas constitué *que* de la voile : la masse m comprend la voile, mais aussi la "charge utile". Si l'on considère "bêtement" que la masse m est celle de la voile seule, et en supposant une masse volumique ρ pour le matériau de la voile de l'ordre de 1000 à 2000 kg.m^{-3} , on arrive à une épaisseur de la voile de l'ordre du micromètre. Si le satellite n'est pas composé *que* de la voile, alors l'épaisseur de cette dernière est encore plus faible.

II.5 La somme des deux forces vaut $(-GM_{\odot}m + P_0 D^2 S) \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$ et dérive donc de l'énergie potentielle $E_p = (-GM_{\odot}m + P_0 D^2 S) \frac{1}{r}$ (la constante additive nulle permet que l'énergie potentielle soit nulle à l'infini). En fonction des grandeurs demandées, cela s'écrit $E_p = G m M_{\odot} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma} - 1 \right) \frac{1}{r}$.

On suppose bien entendu que l'incidence sur la voile est normale à tout instant, ce qui nécessiterait de réorienter celle-ci en permanence.

On a affaire à une force centrale ; la loi des aires est satisfaite et l'on peut poser $C = r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$. La force est conservative et donc $E_{\text{meca}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) = \text{cte}$ avec $E_{p,\text{eff}}(r) = E_p(r) + \frac{m C^2}{2 r^2}$.

Si $\sigma = \sigma_c$, les deux forces se compensent à tout instant et la trajectoire est une droite.

Si $\sigma > \sigma_c$, la force résultante est attractive ; l'allure de $E_{p,\text{eff}}(r)$ est donnée figure 2. Les trajectoires possibles sont des coniques dont le Soleil est un foyer (branche d'hyperbole ou parabole pour les états de diffusion, ellipse pour les états liés, cela dépend des conditions initiales).

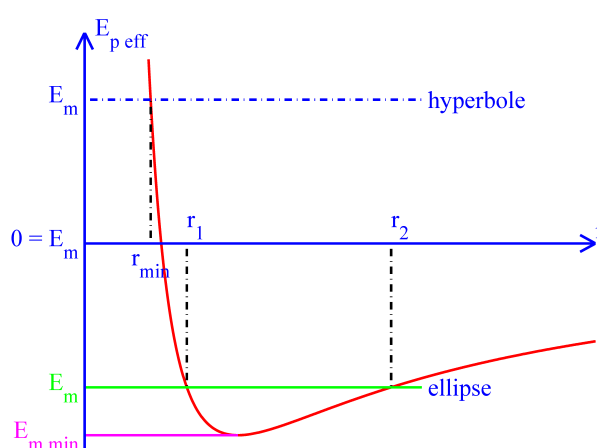


Figure 2: Énergie potentielle effective dans le cas attractif.

Si $\sigma < \sigma_c$, la force résultante est répulsive ; l'allure de $E_{p,eff}(r)$ est donnée figure 3. Il n'y a que des états de diffusion et la trajectoire est une branche d'hyperbole dont le soleil est un foyer.

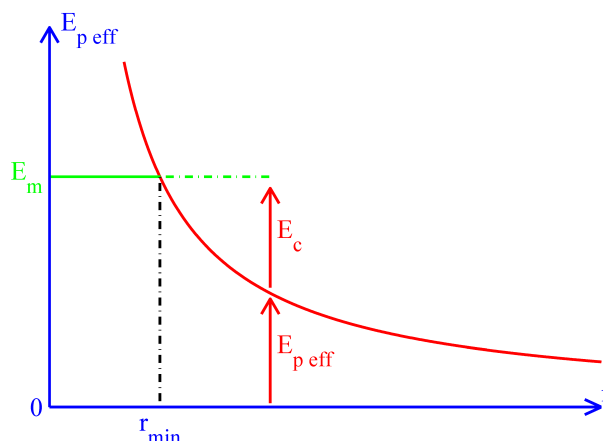


Figure 3: Énergie potentielle effective dans le cas répulsif.

II.6 On dispose ici des conditions initiales applicables, et donc on va pouvoir déterminer le type de trajectoire suivie. **Attention, ce que l'énoncé note r ici, c'est le rayon de l'orbite circulaire initiale.** La vitesse du satellite sur l'orbite circulaire initiale est $v(t = t_0) = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}}$. Pour $t > t_0$, l'énergie mécanique se conserve : $E_{meca}(t > t_0) = E_{meca}(t = t_0^+) = \frac{1}{2}mv^2(t = t_0) + GmM_\odot \left(\frac{\sigma_c}{\sigma} - 1\right) \frac{1}{r} = \frac{GmM_\odot}{r} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma} - \frac{1}{2}\right)$.

Et donc, si $\sigma > 2\sigma_c$, la trajectoire sera une ellipse.

Remarque : comme l'énergie mécanique a *augmenté* par rapport à sa valeur sur l'orbite circulaire (elle a augmenté de la quantité positive $GmM_\odot \frac{\sigma_c}{\sigma} \frac{1}{r}$), alors l'ellipse est nécessairement *extérieure* à l'orbite circulaire initiale.

Si $\sigma < 2\sigma_c$, il s'agira d'une branche d'hyperbole.

Remarque : il conviendrait toutefois de distinguer les cas $\sigma_c < \sigma < 2\sigma_c$ (la force est attractive), $\sigma < \sigma_c$ (la force est répulsive), et $\sigma = \sigma_c$ (force résultante nulle et la trajectoire est en fait une droite).

Et si $\sigma = 2\sigma_c$, ce sera une parabole.

Les différents cas sont représentés sur la figure 4.

II.7 Le module de la force de gravitation est $F_G = \frac{GmM_\odot}{r^2}$. La force exercée par le rayonnement vaut d'après **I.14** : $\vec{F}_R = 2u \cos^2 \alpha S \vec{n}$, mais c'est aussi, en utilisant le résultat de **II.2**, $\vec{F}_R = P_0 \frac{D^2}{r^2} \cos^2 \alpha S \vec{n}$. On arrive alors, en fonction des données demandées, à $\vec{F}_R = \beta F_G \vec{n}$, avec $\beta = \frac{\sigma_c}{\sigma} \cos^2 \alpha$.

II.8 On a, d'après l'énoncé, la vitesse orthoradiale qui vaut $v_\theta \simeq \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}}$. Le moment cinétique (perpendiculaire au plan de l'orbite) vaut $L_z = mrv_\theta \simeq m\sqrt{GM_\odot}r$.

Le théorème du moment cinétique, appliqué au satellite dans le référentiel héliocentrique (galiléen), par rapport à l'axe Oz passant par le centre O du Soleil, s'écrit $\frac{dL_z}{dt} = -r \sin \alpha \beta F_G$ (voir la figure 5) D'où l'on tire $\frac{d}{dt}(\sqrt{r}) = -\beta \sin \alpha \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}}$ qui est l'équation d'évolution de r recherchée.

Elle s'écrit également $\frac{1}{2} \frac{dr}{dt} = -\beta \sin \alpha \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}v_r = -\beta \sin \alpha v_\theta$.

$\frac{v_r}{v_\theta}$ est donc bien une constante : $\frac{v_r}{v_\theta} = -2\beta \sin \alpha$.

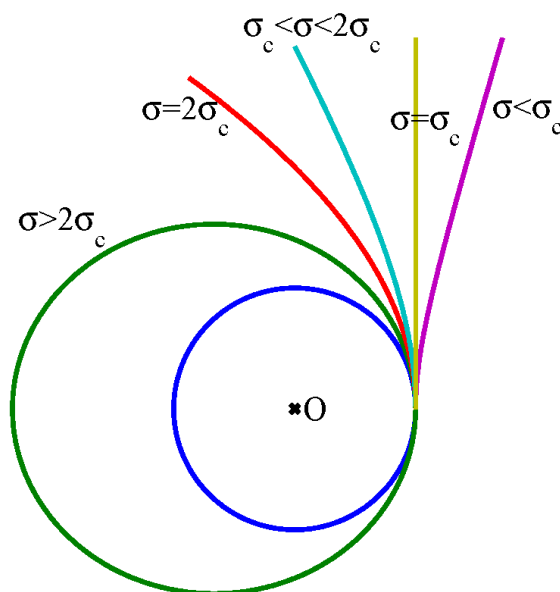


Figure 4: Orbite circulaire initiale (en bleu) et nouvelle trajectoire en fonction du rapport $\frac{\sigma}{\sigma_c}$.

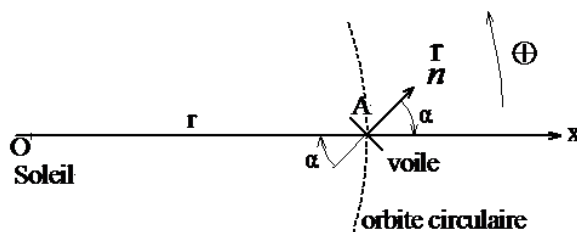


Figure 5: Situation une fois que la voile a été orientée pour obtenir un angle d'incidence α . Attention, sur cette figure, l'angle α a été choisi négatif, ce qui est nécessaire pour faire passer le satellite sur une orbite plus élevée.

II.9 $\frac{v_r}{v_\theta} = K$ mène à $\frac{dr}{r} = K d\theta$ et donc $r(\theta) = r(0) \exp(K\theta)$ Il s'agit d'une spirale logarithmique : voir la figure 6.

II.10 $\frac{v_r}{v_\theta} = -2\beta \sin \alpha = -2\frac{\sigma_c}{\sigma} \cos^2 \alpha \sin \alpha$. Pour que le transfert d'orbite soit le plus rapide, il faut que v_r soit la plus grande possible (tout en restant petite devant la vitesse orthoradiale), et il faut donc maximiser $f(\alpha) = -\cos^2 \alpha \sin \alpha$ par rapport à α sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. On a $f'(\alpha) = \cos \alpha (2 - 3 \cos^2 \alpha)$. L'étude des variations de $f(\alpha)$ sur l'intervalle d'étude montre alors qu'elle possède un maximum (strictement positif) pour $\alpha = -\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Remarque : la condition $|\frac{v_r}{v_\theta}| \ll 1$ se traduit alors par $0,8 \frac{\sigma_c}{\sigma} \ll 1$, ce qui nécessite en fait $\sigma_c \ll \sigma$.

III.1 Il convient de bien garder à l'esprit que, dans toute cette partie, le satellite est immobile dans le référentiel d'étude.

La force de gravitation solaire vaut $\vec{F}_{\text{gravitation solaire}} = -\frac{G m M_\odot}{OA^2} \vec{e}_r$. La force centrifuge vaut, elle, $\vec{F}_{\text{centrifuge}} = m OA \omega^2 \vec{e}_r$. Comme, par ailleurs, $\omega^2 = \frac{G M_\odot}{D^3}$, on peut écrire la résultante recherchée sous la forme $\vec{F}_{\text{gravitation solaire}} + \vec{F}_{\text{centrifuge}} = \frac{G m M_\odot}{D^3} OA \left(1 - \left(\frac{D}{OA}\right)^3\right) \vec{e}_r$.

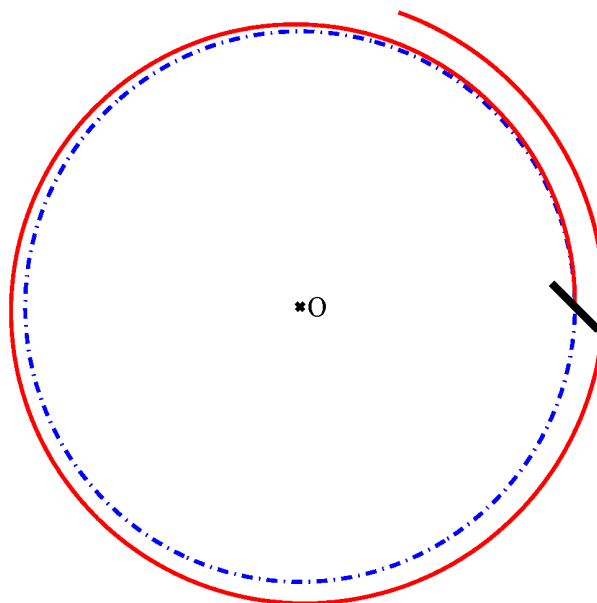


Figure 6: Trajectoire obtenue : spirale logarithmique. Le cas dessiné correspond à $\alpha < 0$, c'est-à-dire au cas de la question **II.10**. La trajectoire circulaire initiale est en bleu.

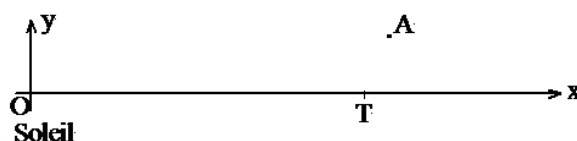


Figure 7: Configuration étudiée dans la question III.1.

Or, à l'ordre 1 en $\frac{x'}{D}$, $\frac{y}{D}$ et $\frac{z}{D}$, on a $OA \simeq D \left(1 + \frac{x'}{D}\right)$. Et on arrive, tous calculs faits, à $\vec{F}_{\text{gravitation solaire}} + \vec{F}_{\text{centrifuge}} = 3 \frac{G m M_{\odot}}{D^2} \frac{x'}{D} \vec{e}_r$.

III.2 Il suffit d'écrire que la somme des forces s'exerçant sur le satellite est nulle. La force d'inertie de Coriolis est nulle puisque le satellite est immobile. On a donc seulement $\vec{F}_{\text{gravitation solaire}} + \vec{F}_{\text{centrifuge}} + \vec{F}_{\text{gravitation terrestre}} = \vec{0}$. Lorsque le satellite est sur l'axe Ox , $\vec{e}_r = +\vec{e}_x$ (le satellite est supposé être à proximité de la Terre) et les trois forces sont dirigées selon $\pm \vec{e}_x$.

Si le satellite est situé entre le Soleil et la Terre, $x' < 0$ et l'équation s'écrit $\frac{3G m M_{\odot}}{D^3} x' + \frac{G m M_{\oplus}}{x'^2} = 0$, d'où l'on tire $x' = -D \sqrt[3]{\frac{M_{\oplus}}{3M_{\odot}}}$.

Si le satellite est situé au-delà de la Terre, $x' > 0$ et l'équation s'écrit $\frac{3G m M_{\odot}}{D^3} x' - \frac{G m M_{\oplus}}{x'^2} = 0$, d'où l'on tire $x' = D \sqrt[3]{\frac{M_{\oplus}}{3M_{\odot}}}$.

Les deux points sont donc placés à égale distance $d = D \sqrt[3]{\frac{M_{\oplus}}{3M_{\odot}}}$ de la Terre, de part et d'autre de celle-ci.

L'approximation faite à la question **III.1** est tout à fait valable, compte tenu de la valeur du rapport $\frac{M_{\oplus}}{M_{\odot}}$: voir l'A.N. à la question **III.3**.

III.3 $d = 10^{-2} D \simeq 2.10^6$ km (soit environ 4 fois plus loin de la Terre que la Lune).

III.4 L'équilibre est réalisé si $\vec{F}_{\text{gravitation solaire}} + \vec{F}_{\text{centrifuge}} + \vec{F}_{\text{gravitation terrestre}} + \vec{F}_R = \vec{0}$. En projection sur x , ceci s'écrit

$$3 \frac{G m M_{\odot}}{D^2} \frac{x'}{D} + \frac{G m M_{\oplus}}{T A^2} \frac{-x'}{T A} + \beta \frac{G m M_{\odot}}{D^2} \cos \alpha = 0$$

en notant T le centre de la Terre.

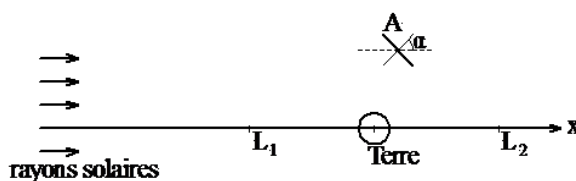


Figure 8: Configuration étudiée dans la question III.4.

Ceci mène à $\frac{x'}{D} \left(3 - \frac{M_{\oplus}}{M_{\odot}} \left(\frac{D}{T A} \right)^3 \right) + \frac{\sigma_c}{\sigma} \cos^3 \alpha = 0$.

Le terme $\frac{\sigma_c}{\sigma} \cos^3 \alpha = 0$ est toujours positif (ou nul).

Il nous faut alors nous intéresser au cercle de centre T de rayon $d = D \sqrt[3]{\frac{M_{\oplus}}{3M_{\odot}}}$ (c'est le cercle centré sur T et passant par les points L_1 et L_2) ; si l'on est à l'intérieur de ce cercle, le terme $\left(3 - \frac{M_{\oplus}}{M_{\odot}} \left(\frac{D}{T A} \right)^3 \right)$ est négatif et l'équilibre n'est possible que si $x' > 0$. Inversement, si l'on est à l'extérieur de ce cercle, le terme $\left(3 - \frac{M_{\oplus}}{M_{\odot}} \left(\frac{D}{T A} \right)^3 \right)$ est positif et l'équilibre n'est possible que si $x' < 0$. Ces résultats sont représentés sur la figure 9.

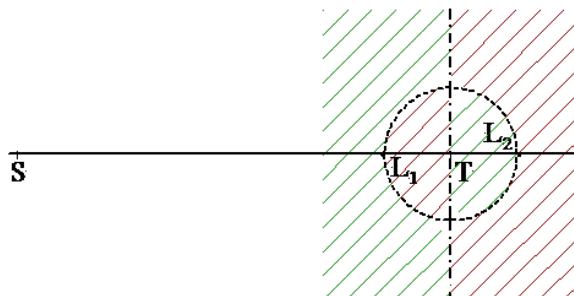


Figure 9: Les régions de l'espace où l'équilibre est en principe possible avec une voile solaire sont hachurées en vert.

III.5 On a directement (voir figure 10) $\frac{\delta}{R_{\oplus}} = \frac{\delta + D}{R_{\odot}} \simeq \frac{D}{R_{\odot}}$, donc $\delta \simeq \frac{R_{\oplus}}{R_{\odot}} D$.

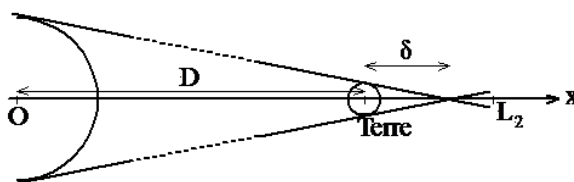


Figure 10: Cône d'ombre de la Terre.

III.6 A.N. : $\delta \simeq 1.10^6$ km. On peut noter que le point L_2 est au-delà de cette distance.

III.7 On élimine dans le schéma du **III.4** les régions contenues dans le cône d'ombre de la Terre. On obtient la figure 11

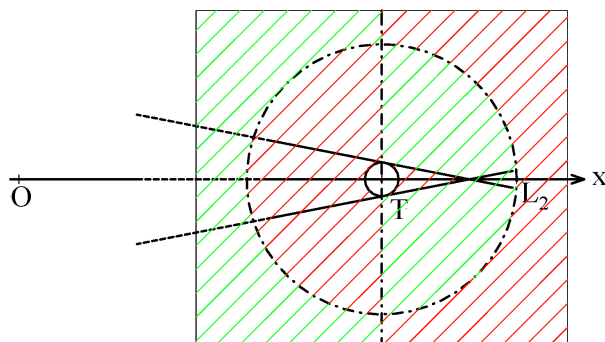


Figure 11: Les régions de l'espace où l'équilibre est en principe possible avec une voile solaire, en tenant compte de l'ombre de la Terre, sont hachurées en vert.