

Energie électrostatique

$$1) \vec{f}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}_1 \vec{P}_2}{P_1 P_2^3} ; \quad \text{SW} = \vec{f}_{1/2} \cdot d\vec{OP}_2 = \vec{f}_{1/2} \cdot d(\vec{P}_1 \vec{P}_2) \quad P_1 \text{ fixe}$$

$$= d\left(\frac{-q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\lambda_{12}}\right) = -dE_e$$

$$E_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \lambda_{12}} + 0$$

$$2) V_1(\vec{P}_2) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \lambda_{12}} \quad \text{dnc} \quad E_e = q_1 V_1 = q_2 V_2 \quad (\text{symétrie d'indices})$$

$$= \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2)$$

$$3) \text{ Cas de 3 charges : } E_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \lambda_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 \lambda_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 \lambda_{23}}$$

L'astuce est qu'il ne faut compter un couple qu'une seule fois.

$$4\pi\epsilon_0 E_e = \frac{1}{2} \left[q_1 \left(\frac{q_2}{\lambda_{12}} + \frac{q_3}{\lambda_{13}} \right) + q_2 \left(\frac{q_1}{\lambda_{12}} + \frac{q_3}{\lambda_{23}} \right) + q_3 \left(\frac{q_1}{\lambda_{13}} + \frac{q_2}{\lambda_{23}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow E_e = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3)$$

Généralisation immédiate : $E_e = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$

4) La charge $\sigma(M) dS(M)$ est un potentiel $V(M)$, on a donc en utilisant la relation précédente

$$E_e = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{V}} \sigma(M) V(M) dS(M)$$

5) Conducteur équipotentiel $E_e = \frac{1}{2} V \iint_{\mathcal{V}} \sigma dS = \frac{1}{2} Q V$

Système électrostatique à 3 micro-électrodes

• Electrode 3 électriquement isolée

6) On prend comme surface de Gauss un tronçon de tube de champ limité par deux sections droites situées dans les armatures 1 et 3 où le champ est nul (conducteurs équipotentiels). Alors $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow Q_{int} = Q_1 + Q'_3 = 0$

De même $Q_2 + Q'_3 = 0$

Et aussi $Q_1 + Q_2 + Q'_3 + Q''_3 = 0 \quad \bullet \quad Q_1 = Q'_3 = -Q'_3 = -Q_2 = Q$

7) Le tronçon de tube de champ a maintenant sa section droite située coté droit qui est entre les armatures 1 et 3.

Alors $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \quad \bullet \quad \text{On a } \vec{E} = E(x) \vec{e}_x \text{ ici}$

$$\oint_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = + E(x) A$$

$$\Rightarrow \vec{E} (-d < x < u) = \frac{Q_1}{A\epsilon_0} \vec{e}_x$$

Rmq : je note $\vec{E}$ le champ électrique

$$8) V_1 - V_3 = \int_1^3 \frac{Q_1}{A\epsilon_0} dx = \frac{Q_1(d+u)}{A\epsilon_0}$$

9) $Q_1 = \frac{A\epsilon_0}{d+u} (V_1 - V_3)$ d'après 8) - On voit que $Q_1 \propto (V_1 - V_3)$

On pose $C_{13} = \frac{\epsilon_0 A}{d+u}$

On aura $C_{23} = \frac{\epsilon_0 A}{d-u}$

10) D'après 5), on a $E_{13} = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q'_3 V_3) = \frac{1}{2} Q_1 (V_1 - V_3) = \frac{1}{2} C_{13} (V_1 - V_3)^2$
 $= \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_{13}}$ exprimé que l'on connaît

$$E_{13} = \frac{Q^2}{2C_{13}} = \frac{Q^2(d+u)}{2\epsilon_0 A} \quad \text{et} \quad E_{23} = \frac{Q^2(d-u)}{2\epsilon_0 A}$$

11) Seul le travail de la force électrique $\vec{f}_{13}$ agissant sur (3) mobile fait varier E_{13} . Donc $\vec{f}_{13} \cdot d\vec{u} \vec{e}_x = -dE_{13} = -d\left(\frac{Q^2(d+u)}{2\epsilon_0 A}\right)$

$$= -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} du \quad \text{car } Q = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \vec{f}_{13} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \vec{e}_x \quad \text{attractive} \quad \text{évident}$$

De même $\vec{f}_{23} = +\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \vec{e}_x$

12) $\vec{f}_{13} + \vec{f}_{23} = \vec{0}$ logique : on a placé 3 dans un champ uniforme. Alors 3 n'est chargé localement par influence, mais sa charge globale est restée nulle. Et comme le champ est uniforme, charge nulle $\Rightarrow$ force nulle.

13) $Q_1 = C_{13}(V_1 - V_3) = Q''_3 = C_{23}(V_3 - V_2)$

$$\Rightarrow V_3 = \frac{C_{13}V_1 + C_{23}V_2}{C_{13} + C_{23}} = \frac{V_1(d-u) + V_2(d+u)}{2d}$$

• Electrode 3 à potentiel constant

3 n'est plus isolée : $Q'_3 + Q''_3 \neq 0$! On a encore $Q_1 + Q'_3 = 0$ et $Q_2 + Q''_3 = 0$. Les expressions des capacités sont inchangées, de même que celles des forces qui ne dépendent que des charges en regard sur les armatures.

14) $E_{23} = \frac{1}{2} C_{13} V^2 = \frac{\epsilon_0 A V^2}{2(d-u)}$

et $E_{13} = 0$ puisque les armatures sont au même potentiel (pas de champ entre 1 et 3, et $Q_1 = Q'_3 = 0$)

15) On reprend l'expression de 11) :
 $\vec{F}_e = \frac{+Q_2^2}{2\epsilon_0 A} \vec{e}_x = \frac{+\epsilon_0 A V^2}{2(d-u)^2} \vec{e}_x$

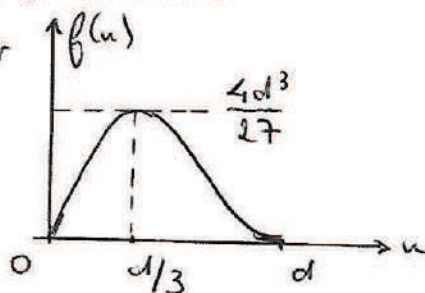
attractive entre 2 et 3

16) Equilibre : $k u_{eq} = \frac{\epsilon_0 A V^2}{2(d-u_{eq})^2} \quad V^2 = \frac{2k}{\epsilon_0 A} u_{eq}(d-u_{eq})^2$

17) Soit $f(u) = u(d-u)^2 \Rightarrow f' = 3u^2 - 4du + d^2$
 $f(u) \geq 0$, $f'(u)$ s'annule en $u = d/3$ et $u = d$.

Le tracé de $f(u)$ s'en déduit facilement

18) L'équilibre impose $V^2 = \frac{2k}{\epsilon_0 A} f(u_{eq})$



Soit $V_{cr}^2 = \frac{2k}{\epsilon_0 A} \cdot \frac{4d^3}{27}$ et $V_{cr} > 0$

Si $V > V_{cr}$ il n'y a pas de solution.
 Si $V < V_{cr}$ il y a 2 solutions, l'une $\in [0, d/3]$ et l'autre $\in [d/3, d]$
 $\hookrightarrow$ 2 points d'intersection entre V^2 (une horizontale) et $\frac{2k}{\epsilon_0 A} f(u_{eq})$

- 19) La position $u_{eq1} < d/3$ est stable (attrain)
 Donc si u augmente à partir de u_{eq1} , la force de rappel du ressort s'empate sur la force électrique : u augmente plus vite que $1/(d-u)^2$, donc $u(d-u)^2$ augmente. Or le graphe $f(u)$ montre qu'à partir de $u = d/3$ le produit $u(d-u)^2$ diminue ce qui signifie que la force électrique se met à augmenter plus vite que celle du ressort $\Rightarrow$ l'armature 3 va alors se plaquer contre 2.
- 20) $V_{cr} = \left(\frac{8 \times 1,2 \cdot 10^4 \times 10^{-18}}{27 \times 8,81 \cdot 10^{-12} \times 8 \cdot 10^{-8}} \right)^{1/2} \sim 70 \text{ V}$

Etude d'un micro-accelerometre

- 21) A l'équilibre / support, on a $x_c = x_b$ ce qui veut dire qu'alors les forces de rappel se compensent. Donc pour x_c quelconque, les ressorts exercent $-2kx_c$. Avec les forces électriques nulles on a une $R_{rel} = R_{support}$ galiléen.

$$m \ddot{x} = -2kx_c - 2f \ddot{x}$$

$$f^2 = 2km \alpha^2 = m^2 \omega_0^2 \alpha^2$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\alpha \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x_c = 0 \text{ ou } \ddot{x}_c + 2\alpha \omega_0^2 \dot{x}_c + \omega_0^2 x_c = \omega_0^2 x_b$$
 On a posé $u = x_c - x_b \Rightarrow u = \alpha t$

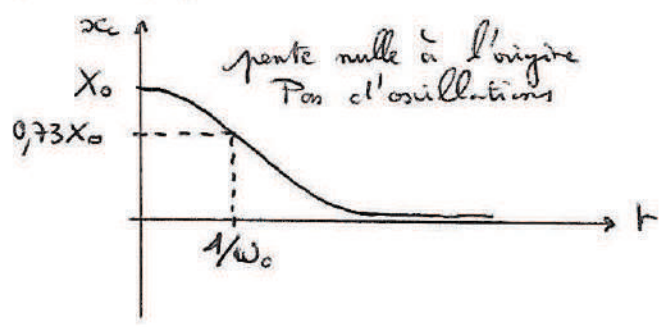
Avec $\alpha = 1$ on trouve le régime libre critique
 $x_c = X_0 e^{-\omega_0 t} (\omega_0 t + 1)$

22) Allure u -conté.

- 23) R_{rel} galiléen

$$m \ddot{x}_c = -2k(x_c - x_b) - 2f(\ddot{x}_c - \ddot{x}_b)$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + 2\alpha \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = -\ddot{x}_b$$



- 24) Notation complexe $e^{j\omega t}$

$$(-\omega^2 + j2\omega_0 \omega \alpha + \omega_0^2) \underline{u} = \underline{a} \Rightarrow \underline{\frac{u}{a}} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\alpha \omega \omega_0}$$
 Donc $\underline{\frac{u}{a}} = \frac{1/\omega_0^2}{1 - y^2 + j2\alpha y}$ avec $y = \frac{\omega}{\omega_0}$
 On pose $\underline{I} = \frac{\omega_0^2}{a} \underline{\frac{u}{a}}$ sans dimension

25) Filtrage passe-bas du 2nd ordre

$$\underline{T} = \frac{-1}{1-y^2+2jy}$$

$$\text{module } T = [(1-y^2)^2 + 4y^2]^{1/2} = 1+y^2$$

donc non résonnant

$$\text{Arg } T = \text{Arg } \frac{2y}{y^2-1}$$

varie entre $-\pi$ et 0 - Traces classiques.

26) $y \ll 1$ alors $T \sim 1$ et $\underline{u} \sim \frac{-1}{\omega_0^2} \underline{a}$ soit $u(t) \sim \frac{-1}{\omega_0^2} a(t)$

En BF, la masse m suit le mouvement du support et u reste très faible. La proportionnalité entre u et a est évidemment intéressante.

Etude de l'électronique de conditionnement du micro-accelerometre

27) Ecrire des nœuds en termes de potentiel à l'entrée de potentiel V_3 du multiplicateur : en complexes

$$\frac{V_3 - 0}{R} + \frac{V_3 - V_{cc}}{R} + 0 + \frac{V_3 - V_2}{1/jC_{23}\omega} + \frac{V_3 - V_1}{1/jC_{13}\omega} = 0$$

$$\Rightarrow V_3 \left(j\omega + \frac{2}{R(C_{13} + C_{23})} \right) = \frac{V_{cc}}{R(C_{13} + C_{23})} + \frac{j\omega}{C_{13} + C_{23}} (C_{13}V_1 + C_{23}V_2)$$

$$\Rightarrow \frac{dV_3}{dt} + \frac{V_3}{\tau} = A + B\omega \cos \omega t \quad \text{avec } \tau = \frac{2}{R(C_{13} + C_{23})} ; A = \frac{V_{cc}}{2\tau}$$

$$\begin{cases} V_1 = \frac{V_{cc}}{2} + V_1 \sin \omega t \\ V_2 = \frac{V_{cc}}{2} - V_1 \sin \omega t \end{cases}$$

$$B = V_1 \frac{C_{13} - C_{23}}{C_{13} + C_{23}}$$

28) Régime forcé (= solution particulière)

$$V_{3p} = \tau A + y(t) \quad \text{avec en complexes } \underline{y} \left(j\omega + \frac{1}{\tau} \right) = B\omega \quad (\cos \omega t \rightarrow e^{j\omega t})$$

$$\Rightarrow \underline{y} = \frac{B\omega(1 - j\omega\tau)}{1 + \tau^2\omega^2}$$

$$y(t) = \text{Re}(\underline{y} e^{j\omega t}) = \frac{B\omega}{1 + \tau^2\omega^2} (\cos \omega t + \tau\omega \sin \omega t)$$

29) Régime libre $V_{3p} = \lambda e^{-t/\tau}$

$$\text{Avec } \tau\omega \gg 1, \quad V_3 \sim \lambda e^{-t/\tau} + \underbrace{\tau A}_{V_{cc}/2} + B \sin \omega t \quad \text{et } V_3(0) = \frac{V_{cc}}{2}$$

$$\Rightarrow V_3 \sim \frac{V_{cc}}{2} + B \sin \omega t$$

30) Expressions des capacités $\Rightarrow B = -uV_1/d$ et $V_3 \sim \frac{V_{cc}}{2} - V_1 \frac{u}{d} \sin \omega t$

$$31) V_4 = K_0 V_1 V_3 = K_0 \left(\frac{V_{cc}}{2} + V_1 \sin \omega t \right) \left(\frac{V_{cc}}{2} - V_1 \frac{u}{d} \sin \omega t \right) \quad K_0 \text{ constante du multiplicateur}$$

32) $R_5 C_5$ est un filtre passe-bas, on souhaite récupérer a proportionnel à u
 $\Rightarrow$ le choix $R_5 C_5 \omega \gg 1$ permet de ne garder que la composante continue qui est $K_0 K \left(\frac{V_{cc}^2}{4} + \frac{1}{2} V_1^2 \frac{u}{d} \right)$ en supposant évidemment que $u(t)$ donc $a(t)$ varie très lentement à l'échelle de $\sin \omega t$

On a ainsi $v_s(t) \sim V_0 + S a(t)$

avec $V_0 = K_0 K \frac{V_{cc}^2}{4}$ et $-S = \frac{K K_0}{2} \frac{V_1^2}{\omega_0^2}$

Analyse de spécifications d'un accéléromètre typique.

33) $V_{cc} = 5V$ tension d'alimentation

$V_0 = 2,5V$ tension de repos lorsque $a = 0$

sensibilité' = $0,1 \frac{V}{m.s^{-2}} = |S|$

$K_0 K = \frac{4V_0}{V_{cc}^2} = \frac{10}{25}$ (vraisemblablement l'énoncé prenait $K_0 = 1 \dots$ mais $1 V^{-1} \dots$)

$\Rightarrow K K_0 = 0,4 V^{-1}$

$k = m \frac{\omega_0^2}{2} = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{2} (4 \cdot 10^5)^2 = 4 \cdot 10^4 N.m^{-1}$

bande passante = $400 Hz = (1/R_5 C_5) \frac{1}{2\pi} \Rightarrow R_5 = 40 k\Omega$

34) on a $S a_{max} = V_{smax} - V_{repos} \Rightarrow a_{max} = \frac{4,5 - 2,5}{0,1} = 20 m.s^{-2} \sim 2g$

35) $u_{supportée} \sim \frac{1}{\omega_0^2} a_{supportée}$

mais je ne comprends pas la donnée de l'accélération maximale supportée en $m.s^{-2}$! et ce 10^3 ?

36) $\omega = 2\pi \times 140 = 880 rad.s^{-1}$

$3\sigma = 5ms$ (à 5% ...)

donc $\omega\sigma \sim 1500 \gg 1$: OK