

Centrale PC 2014 : Un parc d'attraction, c'est avant tout (de la) physique

Auteurs : Jean-Marc Vince (Lycée Clemenceau Nantes)

Jean-Baptiste Paire (Lycée du Parc Lyon)

I. Freinage du train.

IA.1. Dans le référentiel R_0 : $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{B}_0$

Or dans le référentiel R_0 : $\vec{B}_0$ est indépendant du temps, on obtient : $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{grad}V$, $\vec{B}_0 = \overrightarrow{rot}\vec{A}$

IA.2. On a invariance de la force de Lorentz par changement de référentiel (on effectue un changement galiléen) : Pour une particule à la vitesse $\vec{v}'$ dans R, le changement de référentiel donne alors $\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{v}$ donc dans R : $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}' \wedge \vec{B}$ et dans R_0 : $\vec{F} = q\vec{E}_0 + q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}_0$

soit : $\vec{F} = q\vec{E}_0 + q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}_0 = q\vec{E}_0 + q(\vec{v}' + \vec{v}) \wedge \vec{B}_0 = q(\vec{E}_0 + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) + q\vec{v}' \wedge \vec{B}_0 = q\vec{E} + q\vec{v}' \wedge \vec{B}$

cette égalité doit être vérifiée pour tout $\vec{v}'$

Donc : $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{v} \wedge \vec{B}_0$ et $\vec{B} = \vec{B}_0$

IA.3.a. Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$

IA.3.b. Le matériau est neutre on a alors : $\rho_m + \rho_f = 0$

IA.3.c. On pose $\vec{v}_m$ la vitesse moyenne des porteurs libres dans le référentiel R lié aux porteurs fixes. La vitesse de ces porteurs dans R_0 est donc $\vec{v}_m + \vec{v}$, la vitesse moyenne des porteurs fixes dans R_0 est $\vec{v}$. On a donc dans ce référentiel $\vec{j}_0 = \rho_m \cdot (\vec{v}_m + \vec{v}) + \rho_f \cdot \vec{v} = \rho_m \cdot \vec{v}_m = \vec{j}$.

On en tire donc que pour un conducteur neutre la densité de courant et l'intensité ne dépendent pas du référentiel.

IB.1. On a mouvement d'un conducteur dans un champ magnétique $\vec{B}$, ce mouvement entraîne la création d'un courant induit. Les actions de Laplace vont s'opposer au mouvement du conducteur (Loi de Lenz).

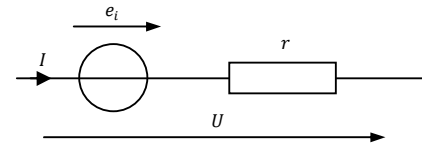
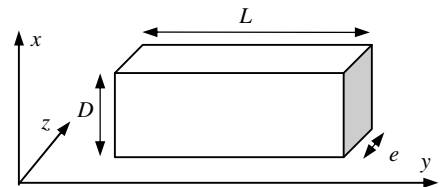
IB.2.a. On considère que $\vec{j}$ est uniforme, on a donc $I = j \cdot e \cdot L$, donc $\vec{j} = \frac{I}{eL} \cdot \vec{e}_x$

IB.2.b. $\vec{E} = \vec{E}_0 + vB_0\vec{e}_x$
donc $\int_{-d/2}^{+d/2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{-d/2}^{+d/2} \vec{E}_0 \cdot d\vec{\ell} + vB_0d$

On en tire donc : $\int_{-d/2}^{+d/2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -U + vB_0d = \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{j}{\sigma} \cdot d\vec{\ell} = \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{I}{\sigma eL} \cdot dx = \frac{Id}{\sigma eL} = rI$ où r est la résistance de la planque parcourue par un courant dans le sens des x.

e_i est la force électromotrice induite avec $e_i = vB_0d$

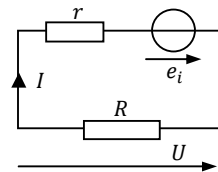
On a donc le schéma électrocinétique équivalent :



IB.2.c. La résistance R semble très complexe notamment à cause des effets de bord et de l'absence de symétrie.

On applique une loi des mailles : $e_i = vB_0d = (R + r)I = \frac{rI}{\alpha}$

avec $r = \frac{d}{\sigma eL}$ d'où $I = \alpha v B_0 \sigma L e$



IB.3. On calcule la force de Laplace : $\vec{F} = Id \cdot \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_z = -IdB \cdot \vec{e}_y$

Si on applique le théorème de la résultante cinétique au wagon, dans le référentiel R_0 en projection sur $\vec{e}_y$ on obtient : $m\dot{v} = -IdB = -\alpha B_0^2 d\sigma L e \cdot v$

On a donc une durée caractéristique $\tau = \frac{m}{\alpha B_0^2 d\sigma L e}$

L'inconvénient majeur : pas d'arrêt définitif (c'est un ralentisseur).

Les avantages : pas d'usure (du patin de freinage).

IB.4. Les hypothèses simplistes sont l'uniformité du courant, du champ magnétique, et le fait que l'on néglige les champs induits.

IB.5. $\vec{j}_S = \vec{j} \cdot e$

Soit $\vec{u}$ le vecteur normal à la plaque donc $\vec{e}_z$ pour $z > e$: $\vec{B}_S = \frac{\mu_0}{2} \vec{j}_S \wedge \vec{e}_z = -\frac{\mu_0}{2} j_S \cdot \vec{e}_y$

On a donc $|B_S| = \frac{\mu_0}{2} j e = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{L} = \frac{\mu_0}{2} \alpha v B_0 \sigma e$

On veut négliger $|B_S|$ devant B_0 soit $\frac{\mu_0}{2} \alpha v B_0 \sigma e \ll B_0$ soit $v \ll \frac{2}{\mu_0 \alpha \sigma e} = 95 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

On a un rapport d'environ $\frac{1}{10}$, ce qui valide l'approximation.

IB.6.a. L'échauffement est dû à l'effet Joule dans la plaque.

IB.6.b. On prend comme système le wagon (et ses 18 plaques). Le référentiel est celui lié au sol supposé galiléen. On applique le premier principe, en supposant que la transformation est adiabatique et monobare. $\Delta H + \Delta E_C = W + Q = 0$ en supposant qu'aucune action extérieure ne travaille. On a donc, en supposant que seules les 18 plaques s'échauffent : $\Delta H = -\Delta E_C$

Soit $18\rho eLD \cdot c\Delta T = \frac{1}{2}mv^2$ donc $\Delta T = \frac{mv^2}{36 \cdot \rho eLD \cdot c} = 9 \text{ K}$

IB.6.c. On doit attendre environ 90s.

IB.6.d. On prend comme système une plaque, dans le référentiel lié au sol supposé galiléen.

On applique le premier principe à la transformation entre les dates t et $t + dt$, la transformation est toujours monobare, les actions extérieures ne travaillent toujours pas : $dH = \delta Q$

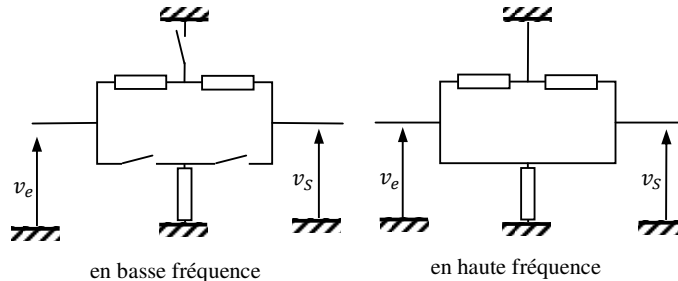
soit $\rho eLD \cdot c \cdot dT = -2LD \cdot h(T - T_{ext}) \cdot dt$

d'où : $\frac{dT}{dt} = -\frac{2h}{\rho e c} (T - T_{ext})$ on pose $\tau' = \frac{\rho e c}{2h} \approx 600\text{s}$ on est loin des 90s précédents.

On a aussi de la conduction thermique dans la structure du wagon (le cuivre est un très bon conducteur thermique).

II. Mesure de la fréquence cardiaque

II.A.1. Il faut bien considérer ici que la sortie est ouverte, ce que le texte ne dit pas de façon très explicite.



En basse fréquence, on remplace les condensateurs par des interrupteurs ouverts et en haute fréquence par des fils.

On a donc en BF et en HF : $v_s \approx v_e$. On s'attend donc à un réjecteur de fréquence.

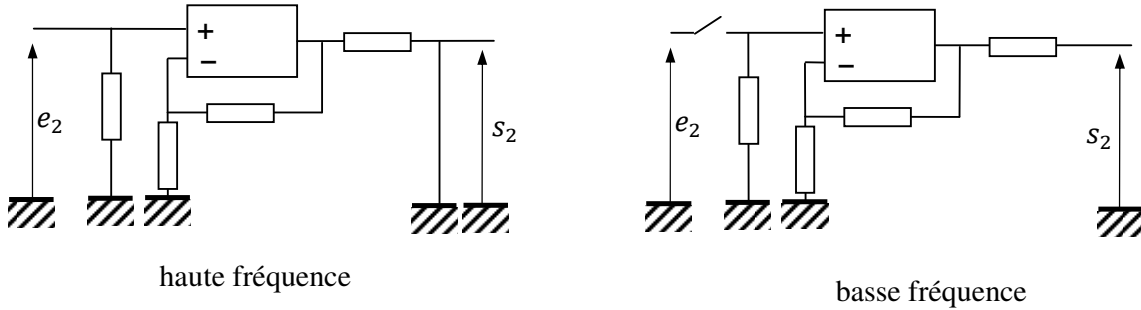
IIA.2. $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} = 49,75 \text{ Hz}$

Ce filtre élimine le 50 Hz du secteur.

IIIB.1. Il faut travailler avec un courant de sortie nul. Il faut donc placer un montage suiveur en sortie de ce filtre.

IIIB.2. Il n'y a de rétroaction que sur la borne inverseuse : le montage est donc stable.

Comme précédemment, on regarde le montage équivalent en BF et HF :



En HF $s_2 = 0$ et en BF $s_2 = 0$. On s'attend donc à un filtre passe-bande.

IIIB.4. Avec un diviseur de tension (l'AO est idéal) : $\frac{V_D}{e_2} = \frac{R_3}{R_3 + \frac{1}{jC_3\omega}} = \frac{jR_3C_3\omega}{1 + jR_3C_3\omega}$

De même comme $V_D = V_+ = V_-$ l'AO fonctionnant en régime linéaire, avec un nouveau diviseur de tension : $\frac{V_E}{V_D} = 1 + \frac{R_6}{R_5}$

Et un nouveau diviseur de tension à la sortie : $\frac{s_2}{V_E} = \frac{\frac{1}{jC_4\omega}}{R_4 + \frac{1}{jC_4\omega}} = \frac{1}{1 + jR_4C_4\omega}$

H_2 = passe-haut x multiplicateur par une constante x passe-bas.

IIIB.5. La limite haute de la bande passante est $\omega_4 = \frac{1}{R_4C_4} = 2\pi f_4$

On a donc $R_4C_4 = 10^{-3} \text{ s}$. L'ordre de grandeur des résistances dans un montage électronique est le k Ω pour des problèmes de courant de saturation, on peut choisir $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$ et $C_4 = 0,1 \mu\text{F}$

Pour la fréquence basse : $\omega_3 = \frac{1}{R_3C_3} = 2\pi f_3$ soit $R_3C_3 = 0,32 \text{ s}$

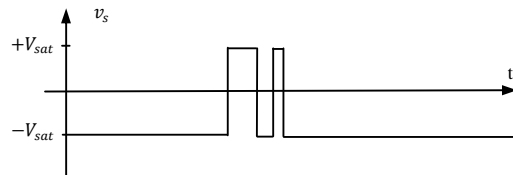
On peut choisir $R_4 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C_4 = 3,2 \mu\text{F}$

IIIB.6. Le second avantage est que ce filtre permet une amplification des signaux dans la bande passante.

IIIC.1. le dispositif est un comparateur : $v_+ > v_-$ alors $v_s = +V_{sat}$ et $v_+ < v_-$ alors $v_s = -V_{sat}$

On va donc avoir un signal du type :

On a deux passages en saturation haute le montage n'est donc pas adapté.



IIIC.2. On a une réaction sur l'entrée non inverseuse du montage. Celui-ci est instable.

On suppose la sortie en saturation haute : $v_s = +V_{sat}$.

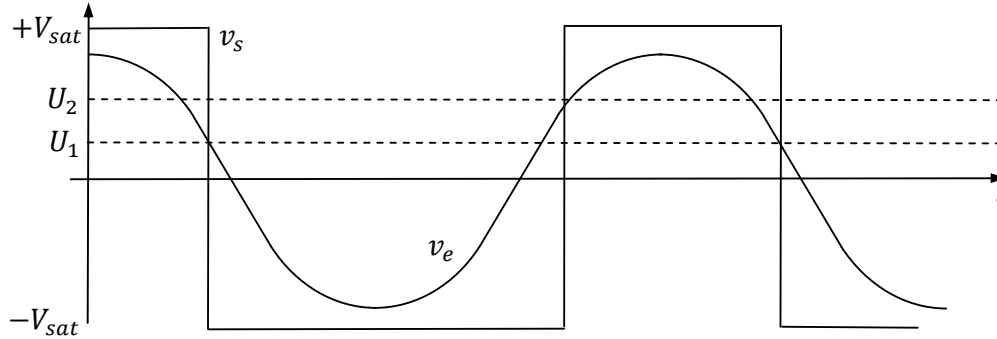
On calcule v_+ avec un théorème de Millman : $v_+ = \frac{\frac{e_4 + \frac{s_4}{R_8}}{\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8}}}{\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8}} = \frac{R_8 \cdot e_4 + R_7 \cdot s_4}{R_8 + R_7} > V_0 = v_-$

soit donc : $e_4 > \left(1 + \frac{R_7}{R_8}\right) V_0 - \frac{R_7}{R_8} \cdot V_{sat}$

Si la sortie est en saturation basse : $v_s = -V_{sat}$

alors $e_4 < \left(1 + \frac{R_7}{R_8}\right) V_0 + \frac{R_7}{R_8} \cdot V_{sat}$.

Pour que la sortie bascule de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$, il faut que e_4 atteigne $U_1 = \left(1 + \frac{R_7}{R_8}\right) V_0 - \frac{R_7}{R_8} \cdot V_{sat}$ par valeurs croissantes. Pour $U_1 > 0$ on doit avoir $\left(1 + \frac{R_7}{R_8}\right) V_0 > \frac{R_7}{R_8} \cdot V_{sat}$



C'est un comparateur à hystérésis.

II.C.3. Pour la mesure il faut $U_2 \in [V_3, V_2]$ et $0_1 < U_1 < V_3$

On n'a pas de problèmes de rebascullement lors d'un battement.

II.D. Perturbation électrique due aux appareils électriques présents

III. Holographie

IIIA.1.a. $\vec{u}_{ob} = \vec{e}_z$ et $\vec{u}_{ref} = \cos\alpha \cdot \vec{e}_z + \sin\alpha \cdot \vec{e}_x$

IIIA.1.b. Une lame à faces parallèles homogène d'indice n .

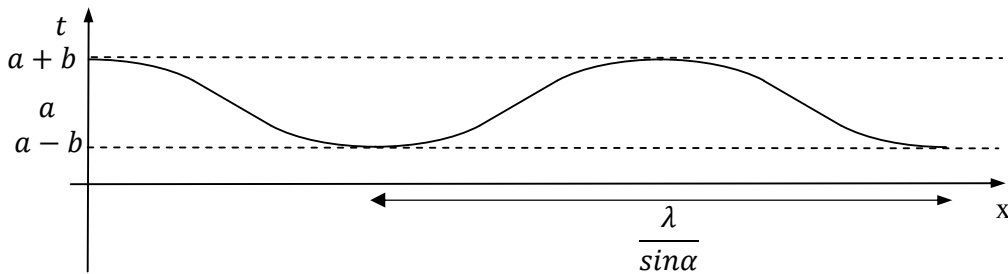
IIIA.1.c. Les ondes sont cohérentes, on peut alors travailler avec leurs amplitudes complexes.

On a donc : $\underline{a} = A \cdot e^{j\omega t} \cdot [e^{-j\varphi_{ob}} + e^{-j\varphi_{ref}}]$

L'intensité est alors $I = \frac{a a^*}{2} = \frac{A^2}{2} (1 + \cos(\varphi_{ob} - \varphi_{ref})) = I_0 \cdot (1 + \cos(\Delta\varphi))$

IIIA.1.d. $\Delta\varphi = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin\alpha$

IIIA.2. $t(x) = a + b \cdot \cos\left(\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin\alpha\right)$



C'est un réseau sinusoïdal de phase de pas $\frac{\lambda}{\sin\alpha}$.

IIIA.3.a. On suppose $L \gg \lambda$ le système ne diffracte pas dans la direction Oy.

IIIA.3.b. Principe de Huygens Fresnel : Tout point atteint par la lumière issue d'une source primaire Sp peut être considéré comme une source lumineuse secondaire qui rayonne une ondelette sphérique, de phase, la phase de l'onde incidente en P, d'amplitude proportionnelle à $d\Sigma$ l'élément de surface découpée au voisinage de P, de même fréquence que l'onde incidente

Pour une onde arrivant en P à l'infini dans la direction θ :

$$\underline{a}_{0diff}(\theta) = Ae^{j\omega t} L \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} t(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SMP)} \cdot dx = Ae^{j\omega t} L \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} t(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}[\vec{u} \cdot \vec{MP} + \vec{u}_i \cdot \vec{SM}]} \cdot dx$$

On ajoute et on retranche la phase du rayon passant par O

$$\underline{a}_{0diff}(\theta) = Ae^{j\omega t} L e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}[\vec{u} \cdot \vec{OP} + \vec{u}_i \cdot \vec{SO}]} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} t(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}[\vec{u} \cdot \vec{MP} + \vec{u}_i \cdot \vec{SM}]} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[\vec{u} \cdot \vec{OP} + \vec{u}_i \cdot \vec{SO}]} \cdot dx$$

soit

$$\underline{a}_{0diff}(\theta) = Ae^{j\omega t} L e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}[\vec{u} \cdot \vec{OP} + \vec{u}_i \cdot \vec{SO}]} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} t(x) \cdot e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[\vec{u} \cdot (\vec{OP} - \vec{MP}) + \vec{u}_i \cdot (\vec{SO} - \vec{SM})]} \cdot dx$$

$$\underline{a}_{0diff}(\theta) = Ae^{j\omega t} L e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SOP)} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} t(x) \cdot e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[\vec{u} \cdot (\vec{OM}) - \vec{u}_i \cdot (\vec{OM})]} \cdot dx$$

donc

$$\underline{a}_{0diff}(\theta) = Ae^{j\omega t} L e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SOP)} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} t(x) \cdot e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[\vec{u} - \vec{u}_i] \cdot \vec{OM}} \cdot dx$$

donc

$$\underline{a}_{0diff}(\theta) = Ae^{j\omega t} L e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SOP)} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} t(x) \cdot e^{i[\vec{k} - \vec{k}_i] \cdot \vec{OM}} \cdot dx$$

$$\underline{a}_{0diff}(\theta) = Ae^{j\omega t} L e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SOP)} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} t(x) \cdot e^{i(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \vec{OM}} \cdot dx = Ae^{j\omega t} L e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SOP)} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} t(x) \cdot e^{i(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \vec{OM}} \cdot dx$$

$$\underline{a}_{0diff}(\theta) = Ae^{j\omega t} L e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SOP)} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \left[a + \frac{b}{2} \left(e^{i(\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha)} + e^{-i(\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha)} \right) \right] \cdot e^{i\frac{2\pi}{\lambda} x (\sin \theta - \sin \alpha)} \cdot dx$$

$$\underline{a}_{0diff}(\theta) = Ae^{j\omega t} L e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SOP)} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \left[a \cdot e^{i\frac{2\pi}{\lambda} x (\sin \theta - \sin \alpha)} + \frac{b}{2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} x (\sin \theta - 2 \sin \alpha) + i\varphi_0} + \frac{b}{2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta - i\varphi_0} \right] dx$$

$$\underline{a}_{0diff}(\theta) = Ae^{j\omega t} L e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SOP)} \left[a \text{sinc} \left(\frac{\pi}{\lambda} \ell (\sin \theta - \sin \alpha) \right) + \frac{b}{2} e^{i\varphi_0} \text{sinc} \left(\frac{\pi}{\lambda} \ell (\sin \theta - 2 \sin \alpha) \right) + \frac{b}{2} e^{-i\varphi_0} \text{sinc} \left(\frac{\pi}{\lambda} \ell \sin \theta \right) \right]$$

Le terme en $e^{-i\varphi_0}$ est le terme qui provient de la diffraction de l'objet.

L'observateur voit donc la superposition de 3 ondes dans les directions $\theta = 0$, $\theta = \alpha$ et $\sin \theta = 2 \sin \alpha$.

IIIA.3.c. Avec l'hypothèse proposée, il n'est pas possible d'avoir deux termes non négligeables en même temps. On récupère donc une somme de trois termes :

$$I_{0diff}(\theta) = (AL\ell)^2 \left[a^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi \ell}{\lambda} (\sin \theta - \sin \alpha) \right) + \frac{b^2}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi \ell}{\lambda} (\sin \theta - 2 \sin \alpha) \right) + \frac{b^2}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi \ell}{\lambda} \sin \theta \right) \right]$$

IIIA.4.a. On obtient donc une expression proche de celle de la question IIIA3.b. :

$$\underline{a}_{1diff}(\theta) = Ae^{j\omega t} L e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SOP)} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \left[a + \frac{b}{2} \left(e^{i(\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha)} + e^{-i(\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha)} \right) \right] \cdot e^{i\frac{2\pi}{\lambda_1} x (\sin \theta - \sin \alpha)} \cdot dx$$

$$\underline{a}_{1diff}(\theta) = Ae^{j\omega t} L e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SOP)} \left[a \text{sinc} \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \ell (\sin \theta - \sin \alpha) \right) + \frac{b}{2} e^{i\varphi_0} \text{sinc} \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \ell (\sin \theta - \sin \alpha) - \frac{\pi}{\lambda_0} \ell \sin \alpha \right) + \right. \\ \left. + \frac{b}{2} e^{-i\varphi_0} \text{sinc} \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \ell (\sin \theta - \sin \alpha) + \frac{\pi}{\lambda_0} \ell \sin \alpha \right) \right]$$

$$\text{et } I_{0diff}(\theta) = (AL\ell)^2 \left[a^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \ell (\sin \theta - \sin \alpha) \right) + \frac{b^2}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \ell \sin \theta - \pi \ell \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_0} \right) \sin \alpha \right) \right. \\ \left. + \frac{b^2}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \ell \sin \theta - \pi \ell \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \sin \alpha \right) \right]$$

On a un décalage entre les différents maxima ici les max sont obtenus pour $\sin \theta = \sin \alpha$ pour les deux longueurs d'onde, $\sin \theta = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) \sin \alpha$ et $\sin \theta = \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) \sin \alpha$

IIIA.5.a. On voit donc une image irisée.

IIIA.5.b Si on tourne la tête on voit différentes couleurs, qui ne sont pas les couleurs d'origine.

$$\text{IIIB.1.a. } \Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin \theta - \sin i)$$

IIIB.1.b. Le texte ne demande aucun raisonnement apparemment... $\Delta \varphi = 2\pi p_x$

IIIB.2.a. Pour la couche épaisse, on a : $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} z (\cos \theta - \cos i)$

IIIB.2.b. les ondes émergentes sont cohérentes, on somme leurs amplitudes complexes :

soit $A(\theta) = A_0 \int_0^d e^{\frac{2\pi}{\lambda}z(\cos\theta - \cos i)} dz = A_0 \cdot d \cdot e^{\frac{\pi}{\lambda}d(\cos\theta - \cos i)} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda}d(\cos\theta - \cos i)\right)$

III.B.2.c. d est typiquement de $100 \mu\text{m}$ donc très grande devant λ . on peut considérer que la largeur angulaire des pics de diffraction est très petite. On aura donc $I \neq 0$ pour $\cos\theta = \cos i$ soit $\theta = i$ ou $\theta = -i$.

III.B.2.d. $\theta = -i$

III.B.3. On a à la fois $\sin\theta = \sin i - \frac{\lambda}{a}$ et $\theta = -i$ soit donc $2 \cdot \sin i = \frac{\lambda}{a}$.

III.B.4. On a donc l'équivalent d'un filtre en fréquence. On récupère une image d'une seule couleur.

III.B.5.a. On a choisit bleu vert rouge, ce sont les couleurs de base RGB

III.B.5.b. Les ondes sont incohérentes temporellement.

III.B.5.c. On reconstruit alors l'hologramme en couleurs avec les couleurs initiales.