

CORRIGÉ DES PARTIES I ET II

I. L'orbite de l'ISS

I.A - Préliminaire gravitationnel

1. $\vec{F}_G = -\frac{Gmm'}{r^2}\vec{u}_r$, $\vec{F}_e = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$
2. $\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{\text{int}}$
3. Par symétrie sphérique, $\vec{A} = A(r)\vec{u}_r$, $M_{\text{int}} = M_T$, $\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = A(r)4\pi r^2$, d'où le résultat.
4. $k = GM_T = g_0 R_T^2$

I.B - L'orbite circulaire de l'ISS

1. TMC dans $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ au mobile de masse m , soumis à la seule force $\vec{F}_G(T \rightarrow M)$ centrale $\Rightarrow \vec{L}_O = \text{cte}$.
La trajectoire étant circulaire, $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = mrv\vec{u}_z$, où $\vec{u}_z$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la trajectoire. Puisque $r = \text{cte}$, on a $||\vec{v}|| = \text{cte}$.

Le mouvement est donc circulaire uniforme.

2. On applique le PFD au mobile dans $\mathcal{R}_{\text{géo}}$:

$$m\vec{a} = -m\frac{v^2}{r}\vec{u}_r = -\frac{km}{r^2}\vec{u}_r$$

d'où $v = \sqrt{\frac{k}{r}}$ et $\omega = \sqrt{\frac{k}{r^3}}$.

3. On peut réécrire ce résultat sous la forme :

$$r^3\omega^2 = k \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$$

qui constitue la troisième loi de Kepler (r étant remplacé par le demi-grand axe a de l'ellipse dans le cas général).

4. $E_p = -\frac{km}{r}$ et $E_c = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{km}{2r}$. On a donc la relation $E_c = -\frac{E_p}{2}$.

Le théorème du viriel prévoit que si la résultante des forces $\vec{f}$ est telle que $\vec{f} = -\alpha r^n \vec{e}_r$, alors

$$\langle E_c \rangle = \frac{E_p}{n}$$

On peut vérifier ce résultat également par exemple pour une force élastique (oscillateur harmonique) : $n = 1$ et $\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle$

5. $E_m = -\frac{km}{2r}$.

6. $r_s = R_T + d_s = 6770 \text{ km.}$

$$u_s = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_s}} = 7,67 \text{ km s}^{-1}$$

$$\omega_s = \frac{v_s}{r_s} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ rad s}^{-1} \Rightarrow T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = 5540 \text{ s} \simeq 1\text{h}32'$$

II. La phase finale d'approche

II.A - La dérive d'approche

1. $L_0 - L_1 = r_s \Phi \Rightarrow \Phi = \frac{270}{6770} = 3,99 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 2,3^\circ$

2. Soit ω_{ATV} la vitesse angulaire de l'ATV dans le référentiel géocentrique. L'ATV est sur une orbite circulaire de rayon $r_s - h$, d'où :

$$\omega_{ATV} = \sqrt{\frac{k}{(r_s - h)^3}} = \omega_s \left(1 - \frac{h}{r_s}\right)^{-3/2} \simeq \omega_s \left(1 + \frac{3}{2} \frac{h}{r_s}\right)$$

La vitesse angulaire relative $\Delta\omega = \omega_{ATV} - \omega_s$ est donc :

$$\Delta\omega = \frac{3}{2} \frac{h\omega_s}{r_s} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$$

3. $\Delta t = \frac{\Phi}{\Delta\omega} \simeq 16\,000 \text{ s} \simeq 4\text{h}26'$

II.B - La dynamique d'approche

- Le référentiel lié à l'ISS est en translation circulaire uniforme autour de la Terre (mouvement de O), et en rotation uniforme autour de l'axe fixe Ty : il est ainsi non galiléen.
- Les forces s'exerçant sur l'ATV sont alors :

- la force gravitationnelle de la Terre $\vec{F}_G = -\frac{km}{TM^3} \vec{TM}$

- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$

- la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$

3. $\vec{\omega}_s = \omega_s \vec{u}_y = \vec{\omega}_s$, d'où :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}_{\text{géo}}}(O) + \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM})$$

En appliquant le PFD à l'ISS dans $\mathcal{R}_{\text{géo}}$, on obtient :

$$M \vec{a}_{\mathcal{R}_{\text{géo}}}(O) = -\frac{kM}{TO^3} \vec{TO}$$

d'où le résultat proposé.

4. On réalise un DL au premier ordre en OM/TO :

$$\begin{aligned}
 \frac{\overrightarrow{TM}}{TM^3} &= \frac{\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OM}}{\left[(\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OM})^2 \right]^{3/2}} \\
 &\simeq \frac{\overrightarrow{TO}}{\left[(\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OM})^2 \right]^{3/2}} + \frac{\overrightarrow{OM}}{TO^3} \\
 &= \frac{\overrightarrow{TO}}{(TO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{TO})^{3/2}} + \frac{\overrightarrow{OM}}{TO^3} \\
 &\simeq \frac{\overrightarrow{TO}}{TO^3} \left(1 + \frac{2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{TO}}{TO^2} \right)^{3/2} + \frac{\overrightarrow{OM}}{TO^3}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \frac{\overrightarrow{TM}}{TM^3} - \frac{\overrightarrow{TO}}{TO^3} &\simeq \frac{\overrightarrow{TO}}{TO^3} \left(-3 \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{TO}}{TO^2} \right) + \frac{\overrightarrow{OM}}{TO^3} \\
 &= \frac{\vec{u}_z}{TO^3} (-3z) + \frac{x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z}{TO^3}
 \end{aligned}$$

Soit $\boxed{\frac{\overrightarrow{TM}}{TM^3} - \frac{\overrightarrow{TO}}{TO^3} \simeq \frac{1}{TO^3} (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y - 2z\vec{u}_z)}$

5.

$$\vec{F}_{ic} = -2m\omega_s \vec{u}_y \wedge (\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z) = -2m\omega_s \dot{z}\vec{u}_x + 2m\omega_s \dot{x}\vec{u}_z$$

et

$$-m\vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \overrightarrow{OM}) = m\omega_s^2 \overrightarrow{HM} = m\omega_s^2 (x\vec{u}_x + z\vec{u}_z)$$

puisque l'axe de rotation est Oy .

Le PFD dans le référentiel de l'ISS appliqué à l'ATV donne donc :

$$m\vec{a}(M) = -\frac{km\overrightarrow{TM}}{TM^3} + \frac{km\overrightarrow{TO}}{TO^3} + m\omega_s^2 \overrightarrow{HM} + \vec{F}_{ic}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -\frac{k}{TO^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_s^2 x \\ 0 \\ \omega_s^2 z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\omega_s \dot{z} \\ 0 \\ 2\omega_s \dot{x} \end{pmatrix}$$

Or $\frac{k}{TO^3} = \frac{k}{r_s^3} = \omega_s^2$, d'où le système différentiel proposé :

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_s \dot{z} = 0 & (1) \\ \ddot{y} + \omega_s^2 y = 0 & (2) \\ \ddot{z} - 2\omega_s \dot{x} - 3\omega_s^2 z = 0 & (3) \end{cases}$$

6. $\forall t, y(t) = 0$ (le mouvement est plan).

En intégrant (1), on obtient $\dot{x}(t) - \dot{x}_0 = -2\omega_s(z(t) - z_0)$

On injecte cette solution dans (3), ce qui conduit à :

$$\ddot{z} + \omega_s^2 z(t) = 2\omega_s(\dot{x}_0 + 2\omega_s z_0)$$

La solution générale est de la forme :

$$z(t) = \left(4z_0 + 2\frac{\dot{x}_0}{\omega_s}\right) + B \cos(\omega_s t) + C \sin(\omega_s t)$$

Ainsi, $\boxed{A = 4z_0 + 2\frac{\dot{x}_0}{\omega_s}}$.

$$z(0) = z_0 \Rightarrow \boxed{B = -3z_0 - 2\frac{\dot{x}_0}{\omega_s}}$$

$$\dot{z}(0) = C\omega_s \Rightarrow \boxed{C = \frac{\dot{z}_0}{\omega_s}}$$

7. À partir de la solution obtenue de $z(t)$, comme :

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + 2\omega_s z_0 - 2\omega_s z(t) \Rightarrow x(t) - x_0 = (\dot{x}_0 + 2\omega_s z_0)t - 2\omega_s \int_0^t z(t) dt$$

soit

$$x(t) = x_0 + (\dot{x}_0 + 2\omega_s z_0)t - 2\omega_s \left[At + \frac{B}{\omega_s} \sin(\omega_s t) - \frac{C}{\omega_s} (\cos(\omega_s t) - 1) \right]$$

Enfin, en remplaçant A :

$$\boxed{x(t) = x_0 - 3(\dot{x}_0 + 2z_0\omega_s)t - 2(B \sin(\omega_s t) + C(1 - \cos(\omega_s t)))}$$

8. a) $\ddot{x} = 0$ (le mouvement de dérive est uniforme), donc $\dot{z} = 0$ (et $\boxed{\dot{z}_0 = 0}$).
 $y = 0$ (mouvement suivant l'axe des x)

La dernière équation de Clohessy-Wilshire donne $\boxed{z_0 = -\frac{2}{3}\frac{\dot{x}_0}{\omega_s}}$.

b) En remplaçant dans les expressions de $z(t)$ et $x(t)$ trouvées, on trouve bien pour le mouvement de dérive $\boxed{B = C = 0}$, soit $\boxed{z = z_0 = -\frac{2\dot{x}_0}{3\omega_s}}$, et $x(t) = x_0 - 3\left(\dot{x}_0 - \frac{4}{3}\dot{x}_0\right)t \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t}$, ce qui est bien cohérent pour la dérive (rectiligne uniforme).

II.C - La phase d'approche guidée : du pre-homing au homing

1. À $t = 0$, $z(0) = -\frac{2}{3}\frac{v_s}{\omega_s} = -h$, et $x(0) = x_0$

soit $\boxed{v_s = \frac{3}{2}h\omega_s = r_s\Delta\omega}$: il s'agit de la vitesse relative entre l'ATV et l'ISS à l'issue de la phase d'approche circulaire.

2. $\boxed{\Delta v = \dot{x}_0 - v_s}$, et $x_0 = -L_2$, d'où en remplaçant :

$$\begin{cases} z(t) = \frac{2}{\omega_s} \left(\Delta v (1 - \cos(\omega_s t)) - \frac{v_s}{3} \right) \\ x(t) = (v_s - 3\Delta v)t + \frac{4\Delta v}{\omega_s} \sin(\omega_s t) - L_2 \end{cases}$$

3. $z(t_f) = 0 \Rightarrow \boxed{\cos(\omega_s t_f) = 1 - \frac{v_s}{3\Delta v}}$. Pour que la solution existe, il faut $\frac{v_s}{3\Delta v} \leq 2$, soit $\boxed{\Delta v \geq \frac{v_s}{6}}$.

L'énergie dépensée par les moteurs (pendant un temps très bref) en $t = 0$ est égale à l'énergie cinétique acquise par le vaisseau ΔE_c . Or,

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_s + \Delta v)^2 - \frac{1}{2}mv_s^2 \simeq mv_s \Delta v$$

On minimisera donc l'énergie dépensée en choisissant $\boxed{\Delta v = \frac{v_s}{6}}$.

4. La position de départ est ($x_0 = -15\text{km}$, $z_0 = -10\text{ km}$). On souhaite arriver derrière l'ISS, il faut donc $X < 1,5$. De même, il faut arriver à l'altitude de l'ISS, il faut donc $Z = 1$. La trajectoire (6) croise la droite $Z = 1$ en $X > 2$, il faut donc l'éliminer. Les trajectoires (4) et (5) conviennent, mais la trajectoire (5) permet d'amener l'ATV juste en-dessous de $X = 1,5$, ainsi l'ATV sera très proche de l'ISS avant d'entamer la dernière manœuvre, ce qui est souhaité : $\boxed{\text{Trajectoire (5)}}$.

On remarque bien que la trajectoire (6) correspond au cas limite où l'on parvient à atteindre l'orbite de l'ISS ($\Delta v = v_s/6$), pour la trajectoire (7) c'est impossible.

Avec $v_s = 17\text{ m/s}$, on obtient $\boxed{\Delta v = \frac{v_s}{5} \simeq 3,4\text{ m/s}}$.

5. Dans ce cas (trajectoire 6), $\cos(\omega_s t_f) = -1$ soit pour $\boxed{t_f = \frac{\pi}{\omega_s} = \frac{T_s}{2} \simeq 46'}$.
6. Il doit y avoir un nouveau changement de vitesse pour revenir en $Z = 1$, à l'altitude de l'ISS. On remarque que la direction de l'ATV n'a pas besoin d'être modifiée avant la phase de closing avec la trajectoire retenue (la trajectoire entre A_3 et A_4 ayant une forme de demi-ellipse où A_3 est situé sur le grand axe, comme on le verra). Il va falloir ralentir l'ATV.

II.D - Phase finale : le closing

- Il s'agit de l'équation paramétrique d'une demi-ellipse dont :
 - petit axe suivant z , de longueur $b = \frac{2v_f}{\omega_s} \Rightarrow \boxed{b = \frac{L_3 - L_4}{2}}$
 - grand axe suivant x , de longueur $\boxed{a = L_3 - L_4}$ ($a = 2b$)
 - centre $(-L_3 + \frac{2v_f}{\omega_s}, 0)$, soit $\boxed{(-\frac{L_3 + L_4}{2}, 0)}$
- Le temps de vol de A_3 à A_4 correspond alors à une demi-période, soit à nouveau $\boxed{\Delta t_f = 46'}$.
- On remarque que la navigation « à vue » n'est pas évidente : en communiquant de la vitesse vers une direction « visée », on est dirigé dans une direction différente...