

Quelques aspects de la physique du casque TopOwl

Épreuve de Physique — filière PSI

Concours commun Centrale-Supélec, session 2014

I. Affichage par tubes cathodiques

I.A. Canon à électrons

I.A.1) La conservation de l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}mv^2(x) - eV(x)$ entre la cathode ($v = 0, V = 0$) et

l'anode ($v = v_0, V = V_0$) impose $v_0 = \sqrt{\frac{2e}{m}V_0}$.

I.A.2) On trouve $v_0 = 2,65 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; on remarque qu'un traitement non relativiste est très discutable.

I.B. Dispositif de déviation du faisceau

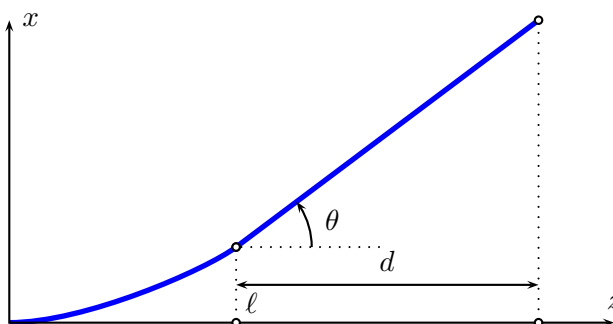
I.B.1) On néglige le poids donc la seule force exercée sur l'électron est la force de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B}$; dans ce référentiel galiléen, le principe fondamental de la dynamique classique impose $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ soit après projections $m\dot{v}_x = eB_y v_z, m\dot{v}_y = -eB_x v_z$ et $m\dot{v}_z = -e(B_y v_x - B_x v_y)$.

I.B.2) Le mouvement conserve l'énergie cinétique car la force de Lorentz ne travaille pas; on a donc $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ donc, tant que v_x et v_y restent négligeables, $v_z = v_0$.

On en déduit $\dot{v}_x = \ddot{x} = \frac{eB_y}{m}v_0$ et $\dot{v}_y = \ddot{y} = -\frac{eB_x}{m}v_0$ qu'on doit intégrer entre $t = 0$ (avec $v_x = v_y = 0$ et $x = y = 0$) et l'instant $t = \frac{\ell}{v_0}$ de sortie de la zone d'action du champ. Il vient alors $v_{xf} = \frac{eB_y}{m}\ell$ et $v_{yf} = -\frac{eB_x}{m}\ell$

d'une part, et $\Delta x_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \frac{eB_y}{m} \frac{\ell^2}{v_0}$ et $\Delta y_{\text{mag}} = -\frac{1}{2} \frac{eB_x}{m} \frac{\ell^2}{v_0}$ d'autre part.

I.B.3) Représentons la trajectoire projetée dans le plan (Oxz) :



Le déplacement vertical pendant le vol en ligne droite est $\Delta x_{\text{vol}} = d \tan \theta$ où $\tan \theta = \frac{v_{xf}}{v_0}$ donc le déplacement

total est $\Delta x_{\text{vol}} + \Delta x_{\text{mag}}$ soit $\Delta x = \frac{eB_y \ell}{mv_0} \left[d = \frac{\ell}{2} \right]$ et bien sûr de même $\Delta y = -\frac{eB_x \ell}{mv_0} \left[d = \frac{\ell}{2} \right]$. Les condi-

tions $|\Delta x| < \Delta x_{\text{max}}$ et $|\Delta y| < \Delta y_{\text{max}}$ imposent donc $|B_x| < B_{\text{max}}$ et $|B_y| < B_{\text{max}}$ où $B_{\text{max}} = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ T}$.

I.B.4)

a. À partir de $\dot{v}_x = \frac{eB_y}{m}\dot{z}$ et à partir de $v_x = 0$ et $z = 0$ en $t = 0$, l'intégration fournit $v_{xf} = \frac{eB_y\ell}{m}$. De

même, on obtient $v_{yf} = -\frac{eB_x\ell}{m}$.

b. Par dérivation, $\ddot{v}_z = -\frac{e}{m}(B_y\dot{v}_x - B_x\dot{v}_y)$ donc en remplaçant $\dot{v}_x$ et $\dot{v}_y$ par leurs expressions il vient $\ddot{v}_z - \omega_c^2 v_z = 0$ où on a posé $\omega_c = \frac{e}{m}\sqrt{B_x^2 + B_y^2}$. La solution générale de cette équation est $v_z = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t)$. Compte tenu des conditions initiales $v_z(0) = v_0$ et $\dot{v}_z(0) = 0$ car à cet instant $v_x = v_y = 0$, il vient $v_z = v_0 \cos(\omega_c t)$.

c. On intègre encore $\dot{z} = v_0 \cos(\omega_c t)$ avec $z(0) = 0$ pour trouver $z(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$; le temps de vol est l'instant Δt tel que $z = \ell$ donc $\sin(\omega_c t) = \frac{\ell\omega}{v_0}$.

d. La vitesse de sortie est alors $v_{zf} = v_0 \sqrt{1 - \sin^2(\omega_c \Delta t)}$ soit $v_{zf} = v_0 \sqrt{1 - \frac{\ell^2 \omega^2}{v_0^2}}$; numériquement,

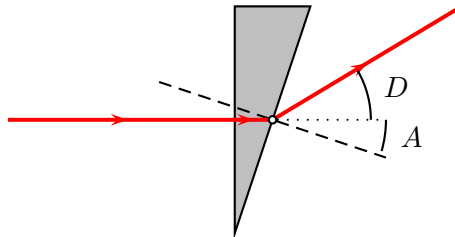
$\frac{v_{zf}}{v_0} = 0,96$ et l'approximation utilisée ci-dessus est raisonnable à 4% près.

II. Affichage par LCD

II.A. Expérience préliminaire

II.A.1) On utilisera un polariseur en tant qu'analyseur de polarisation rectiligne : en tournant ce polariseur dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde observée, la direction d'analyse sera colinéaire à la direction de polarisation lorsque l'éclairement transmis est maximal, et perpendiculaire à la direction de polarisation lorsque l'éclairement transmis est minimal.

II.A.2) Les lois de Snell-Descartes imposent ici $n = \frac{\sin(A + D)}{\sin(A)}$.



On obtient alors $n_{\parallel} = 1,60$ et $n_{\perp} = 1,42$.

II.B. Cellule d'affichage à nématique torsadé

II.B.1)

a. L'application de la tension V impose un champ électrostatique intense le long de l'axe (Oz) . Les dipôles moléculaires s'alignent alors le long de (Oz) sous l'action d'un couple de moment $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$.

b. La polarisation du champ électrique de l'onde incidente est perpendiculaire à (Oz) car l'onde est transverse ; elle est donc aussi perpendiculaire au vecteur $\vec{n}$ donc c'est l'indice $n_{\perp}$ qui est perçu. On a alors

$\vec{E}_s(z = d, t) = E'_0 \exp \left[j\omega \left(t - n_{\perp} \frac{d}{c} \right) \right] \vec{n}_0$ à la sortie, avec $E'_0 = E_0$ si on néglige tout phénomène

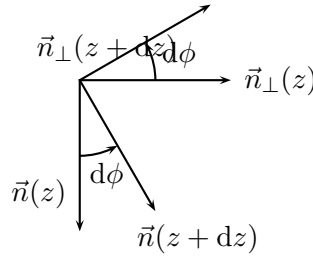
d'absorption ou de réflexion à l'entrée de la cellule. Cette onde est polarisée perpendiculairement à l'analyseur placé en sortie et le pixel est éteint.

II.B.2)

- a. $\phi(z)$ varie linéairement de 2π sur une distance p et de $\frac{\pi}{2}$ sur une distance d à partir de $\phi(0) = 0$, dans le sens négatif, donc $\phi(z) = -\frac{2\pi z}{p} = -\frac{\pi z}{2d}$ et $\boxed{\frac{d\phi}{dz} = -\frac{2\pi}{p} = -\frac{\pi}{2d}}$.

- b. La composante polarisée parallèlement à $\vec{n}_{\parallel}$ se propage avec l'indice $n_{\parallel}$ donc avec le vecteur d'onde $\vec{k}_{\parallel} = n_{\parallel}k_0\vec{e}_z$. Cette propagation se traduit par une variation de la phase proportionnelle à $e^{-jk_0n_{\parallel}z}$ donc $\boxed{\frac{E(z+dz)}{E(z)} = e^{-jk_0n_{\parallel}dz}}$, ce qui établit le résultat demandé pour la composante proportionnelle à $a(z)$; on fait le même raisonnement avec l'autre composante et l'indice $n_{\perp}$ pour obtenir le résultat demandé.

- c. $\vec{E}_s(z, t)$ n'est autre que $\vec{E}_e(z+dz, t)$, mais on l'écrit en projection sur une autre base. À partir du schéma ci-dessus, $\vec{n}(z) = \vec{n}(z+dz)\cos(d\phi) - \vec{n}_{\perp}(z+dz)\sin(d\phi)$ ou, en se limitant au premier ordre, $\vec{n}(z) = \vec{n}(z+dz) - d\phi\vec{n}_{\perp}(z+dz)$ et, de même, $\vec{n}_{\perp}(z) = \vec{n}_{\perp}(z+dz) + d\phi\vec{n}(z+dz)$.



On peut donc recopier (sauf les termes en $e^{j\omega t}$, qui sont en facteur partout) le champ en $z+dz$ $\vec{E}_e(z+dz) = a(z)e^{-jk_0n_{\parallel}dz} \left[\vec{n}(z+dz) - \frac{d\phi}{dz}\vec{n}_{\perp}(z+dz)dz \right] + b(z)e^{-jk_0n_{\perp}dz} \left[\vec{n}_{\perp}(z+dz) + \frac{d\phi}{dz}\vec{n}(z+dz)dz \right]$ donc $\boxed{\vec{E}_e(z+dz) = a(z+dz)\vec{n}(z) + b(z+dz)\vec{n}_{\perp}(z+dz)}$ où $\boxed{a(z+dz) = a(z)e^{-jk_0n_{\parallel}dz} + b(z)d\phi e^{-jk_0n_{\perp}dz}}$ et $\boxed{b(z+dz) = b(z)e^{-jk_0n_{\perp}dz} - a(z)d\phi e^{-jk_0n_{\parallel}dz}}$.

- d. Écrivant $e^{-jk_0ndz} = 1 - jk_0ndz$ avec $n = n_{\parallel}$ ou $n = n_{\perp}$ et en négligeant tous les termes du second ordre, on obtient $a(z+dz) = a(z) - a(z)jk_0n_{\parallel}dz + b(z)\frac{d\phi}{dz}dz$ et $b(z+dz) = b(z) - b(z)jk_0n_{\perp}dz - b(z)\frac{d\phi}{dz}dz$ d'où, en divisant par dz et en remplaçant $\frac{d\phi}{dz}$ par son expression, $\boxed{\frac{da}{dz} = -jk_0n_{\parallel}a(z) - \frac{\pi}{2d}b(z)}$ et $\boxed{\frac{db}{dz} = -jk_0n_{\perp}b(z) + \frac{\pi}{2d}a(z)}$.

- e. Avec des solutions de la forme proposée, on peut recopier ce système d'équations différentielles sous la forme du système linéaire $\begin{cases} a_0(\alpha + jk_0n_{\parallel}) + b_0\frac{\pi}{2d} = 0 \\ -a_0\frac{\pi}{2d} + b_0(\alpha + jk_0n_{\perp}) = 0 \end{cases}$, après simplification par $e^{\alpha z}$. La solution de ce système est identiquement nulle sauf s'il est dégénéré, d'où la condition nécessaire $0 = (\alpha + jk_0n_{\parallel})(\alpha + jk_0n_{\perp}) + \left(\frac{\pi}{2d}\right)^2$ qu'on recopie $\boxed{\alpha^2 + jk_0(n_{\perp} + n_{\parallel})\alpha + \left(\frac{\pi}{2d}\right)^2 - k_0^2n_{\parallel}n_{\perp} = 0}$.

- f. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = -k_0^2(n_{\parallel} - n_{\perp})^2 - \frac{\pi^2}{d^2} < 0$ d'où les solutions générales de l'équation, $\alpha_{\pm} = -\frac{j}{2} \left[k_0(n_{\parallel} + n_{\perp}) \pm \sqrt{k_0^2\Delta n^2 + \frac{\pi^2}{d^2}} \right]$. La condition proposée permet de négliger, dans les équations ci-dessous, le terme en π/d car $d\Delta n \gg \frac{\lambda_0}{2}$ s'écrit aussi $k_0\Delta n \gg \frac{\pi}{d}$. On a alors plutôt intérêt à recopier directement les équations différentielles $\frac{da}{dz} = -jk_0n_{\parallel}a(z)$ et $\frac{db}{dz} = -jk_0n_{\perp}b(z)$ pour trouver $a(z) = Ae^{\alpha_1 z}$ avec $\boxed{\alpha_1 = -jk_0n_{\parallel}}$ et $b(z) = Be^{\alpha_2 z}$ avec $\boxed{\alpha_2 = -jk_0n_{\perp}}$.

- g. L'expression demandée se déduit immédiatement de ce qui précède.

h. En $z = 0$, il vient $A\vec{n}(0) + B\vec{n}_\perp(0) = E_0\vec{n}(0)$; ces deux vecteurs forment une famille libre donc $A = E_0$ et $B = 0$ d'où finalement $\vec{E}(z, t) = e^{j(\omega t - k_0 n_\parallel z)} \vec{n}(z)$: le champ électrique tourne en même temps que les molécules du cristal liquide, en restant alignées avec celles-ci. En $z = d$, $\vec{n}(d)$ et $\vec{E}$ sont parallèles à l'analyseur de sortie et le pixel est donc allumé.

i. Il faut imposer $d \gg \frac{\lambda_0}{2\Delta n} = 1,5 \mu\text{m}$ soit une longueur au moins égale à $150 \mu\text{m} = 0,15 \text{ mm}$.

II.B.3)

a. $b(0) = 0$ donc $b_2 = -b_1$; on a donc $b(z) = b_1 \left[e^{-j(w_+ - w_-)z} - e^{-j(w_+ + w_-)z} \right]$ avec $w_+ = \frac{k_0}{2}(n_\parallel + n_\perp)$ et $w_- = \frac{1}{2}\sqrt{k_0^2 \Delta n^2 + \frac{\pi^2}{d^2}}$, qu'on écrit aussi $w_- = \frac{\pi}{d}\sqrt{1 + u^2}$ en posant $u = \frac{k_0 d \Delta n}{\pi}$ comme l'énoncé le propose. On peut encore regrouper ces termes selon $b(z) = b_1 e^{-jw_+ z} \cdot 2j \sin(w_- z)$ qui s'écrit bien

$$b(z) = 2jb_1 e^{-jk_0 \frac{n_\parallel + n_\perp}{2} z} \sin\left(\frac{\pi z}{2d} \sqrt{1 + u^2}\right).$$

b. Les intensités sont proportionnelles au module carré du champ électrique, donc à $|a(0)|^2$ à l'entrée dans la cellule et $|b(d)|^2$ en sortie, après projection sur la direction d'analyse qui est, dans ce cas, $\vec{n}_\perp(d)$.

Il reste donc $T = \frac{|b(d)|^2}{|a(0)|^2}$; comme $a(0) = -2jb_1 \sqrt{1 + u^2}$ on obtient la formule de Gooch-Tarry,

$$T = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{1 + u^2}}{1 + u^2}.$$

c. Pour obtenir l'allumage du pixel, on impose la tension électrique V , les molécules s'alignent, le dispositif ne modifie plus l'état de polarisation; comme les polariseurs d'entrée et de sortie sont colinéaires, il y a bien transfert de l'onde et le pixel est allumé. Si on supprime cette tension, les molécules reprennent leur conformation hélicoïdale et, si on choisit de se placer sur une des annulations de T , le pixel est éteint. On veut d minimal sont on choisit la plus faible valeur de u qui réalise cette condition,

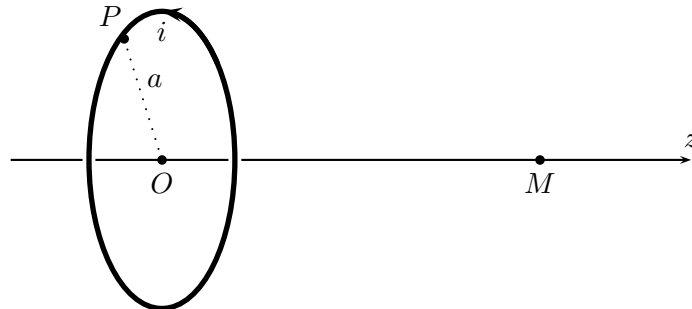
$u = \sqrt{3}$ donc aussi $d = \frac{\sqrt{3}\lambda_0}{2\Delta n} = 2,6 \mu\text{m}$. C'est une valeur beaucoup plus favorable que la situation précédente, dans l'approximation de Mauguin qui correspond à $u \gg 1$.

d. On récupère l'autre composante du champ électrique de sortie. Le milieu n'étant pas absorbant, on a dans ce cas $T' = 1 - T$

III. Détection électromagnétique de posture

III.A. Paire de bobines parallèles

III.A.1) On remarque d'abord (voir sur le schéma ci-dessous) que tout plan contenant l'axe (OMz) de la bobine est un plan de symétrie négative (antisymétrie) des courants, donc $\vec{B}(M)$ est contenu dans chacun de ces plans, $\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_z$.



La relation de Biot et Savart $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{ad\theta \vec{u}_\theta \wedge [z\vec{e}_z - a\vec{e}_r]}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$ s'écrit, après projection sur $\vec{e}_z$, $B(M) = \frac{\mu_0 i a^2}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$ donc $\vec{B} = \frac{\mu_0 N i a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$.

III.A.2)

- a. On additionne deux champs magnétostatiques « décalés » comme le sont les centres des bobines,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N i a^2}{2} \vec{e}_z [f_d(z) + f_{-d}(z)] \text{ où on a posé } f_u(z) = [a^2 + (z - u)^2]^{\frac{3}{2}}.$$

- b. Faisant le développement à l'ordre 2 en u/z et a/z , $f_u(z) = \frac{1}{z^3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{u^2 + a^2 + 2uz}{z^2} + \frac{15}{8} \left(\frac{2u}{z} \right)^2 \right]$.

En sommant les deux termes avec $u = \pm d$, seules subsistent les termes pairs en d et il vient $f_d(z) + f_{-d}(z) = \frac{1}{z^3} \left[2 - 3 \left(\frac{a}{z} \right)^2 + 12 \left(\frac{d}{z} \right)^2 \right]$ d'où l'expression demandée pour le champ magnétique créé sur

l'axe des deux bobines,
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N i a^2}{2z^3} \left[2 - 3 \left(\frac{a}{z} \right)^2 + 12 \left(\frac{d}{z} \right)^2 \right] \vec{u}_z.$$

III.A.3) On se trouve sur l'axe en un point tel que $\theta = 0$ et on s'attend donc à trouver un terme en $1/z^3$; il faut donc annuler les termes en $1/z^5$ et le champ sera dipolaire à des termes en $1/z^7$ près (au moins sur cet axe...). La condition $12d^2 = 3a^2$ impose donc $a = 2d$ et, par identification à la formule de l'énoncé, $\vec{m} = 2\pi N i a^2 \vec{u}_z$, normal pour 2 bobines de N spires et de surface πa^2 parcourues par le courant i !

III.B. Détection de posture : principe de fonctionnement

III.B.1) Il faut comparer c à L/T où $L \sim 1$ m (c'est dans la cabine d'un avion de chasse semble-t-il) et $T = \frac{1}{f} = 2 \cdot 10^{-5}$ s; on vérifie bien que $c \gg \frac{L}{T} \sim 5 \cdot 10^4$ m · s⁻¹; il n'est pas utile de tenir compte de la propagation et on peut se placer dans le cadre de l'ARQS, c'est-à-dire des lois de l'induction. La formule utilisée, de nature magnétostatique pour l'expression de $\vec{B}$, est donc licite.

III.B.2)

- a. Au point O' on applique la formule proposée avec $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_x$ donc le champ magnétique

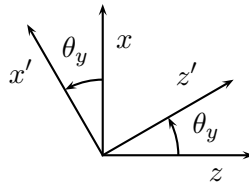
ressenti au centre du récepteur est $\vec{B}(O', t) = -\frac{\mu_0 m}{4\pi D^3} \vec{u}_x$ donc
$$\vec{B}(O', t) = -\frac{\mu_0 a^2 N I \cos(\omega_0 t)}{2D^3} \vec{u}_x.$$

- b. $e_x(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$ où le flux de $\vec{B}(O', t)$ à travers la paire de bobines est $\Phi = 2N\pi a^2 \vec{B}(O', t) \cot \vec{u}_x$; il

vient donc
$$e_x(t) = -\frac{\mu_0 N^2 \pi a^4 I \omega_0}{2D^3} \sin(\omega_0 t).$$
 Par contre, les deux autres paires de bobines ont leur surface perpendiculaire à $\vec{B}$ donc $e_y(t) = e_z(t) = 0$.

- c. Dans une rotation d'angle θ_x autour de $\vec{u}_x$, le vecteur unitaire $\vec{u}'_x$ des bobines d'axe (Ox) est inchangé, tandis que les deux autres bobines restent perpendiculaires au champ magnétique : rien de change et cette mesure ne permet donc pas de détecter l'angle θ_x .

- d. Les nouveaux vecteurs directeurs des axes des bobines du récepteur sont représentés ci-dessous. Le champ magnétique créé par l'émetteur est toujours dirigé selon $-\vec{u}_x$ mais les composantes selon $\vec{u}'_x$, $\vec{u}'_y$ et $\vec{u}'_z$ sont modifiées, $B'_x = B_x \cos \theta_y$, $B'_y = 0$ est en fait inchangée et $B'_z = B'_x \sin \theta_y$.



La même modification affecte les flux, donc les forces électromotrices induites et $e'_x(t) = e_x(t) \cos \theta_y$, $e'_y(t) = 0$ et $e'_z(t) = e_x(t) \sin \theta_y$.

- e. Le raisonnement est exactement le même, il suffit de chercher les nouvelles projections de $\vec{B}$ et on trouve $e'_x(t) = e_x(t) \cos \theta_z$, $e'_y(t) = -e_x(t) \sin \theta_z$ et $e'_z(t) = 0$.

f. En présence des trois rotations, la force électromotrice $e'_y(t)$ est affectée par la rotation θ_z et elle-seule,

tandis que $e'_z(t)$ est affectée par θ_y seule, donc

$$\begin{bmatrix} e'_x(t) \\ e'_y(t) \\ e'_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots \\ -\sin \theta_z & \dots & \dots \\ \sin \theta_y & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{où les}$$

pointillés peuvent représenter n'importe quelle valeur.

III.B.3) On répète le procédé pour trouver

$$\begin{bmatrix} e'_x(t) \\ e'_y(t) \\ e'_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \sin \theta_z & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & -\sin \theta_x & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e_y(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

III.B.4) On trouve de même

$$\begin{bmatrix} e'_x(t) \\ e'_y(t) \\ e'_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & -\sin \theta_y \\ \dots & \dots & \sin \theta_x \\ \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_z(t) \end{bmatrix}.$$

III.B.5) On regroupe ces résultats,

$$\begin{bmatrix} e'_x(t) \\ e'_y(t) \\ e'_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \theta_z & -\sin \theta_y \\ -\sin \theta_z & 0 & \sin \theta_x \\ \sin \theta_y & -\sin \theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_y(t) \\ e_z(t) \end{bmatrix};$$

le dispositif permet donc de mesurer les trois angles (ou en fait leur sinus; il reste une indétermination qui correspond au passage du voisinage de 0 à celui de π , donc à un retournement complet qui ne serait pas détecté ici), ce qui est bien une détection de la posture du casque. Il faut enfin 5 ms pour chacune des trois mesures donc le temps de réponse est $3\tau < 20$ ms, correspondant au cahier des charges (50 mesures par seconde).