

DE LA PHYSIQUE AUTOUR D'UN TORE

I. — Modélisation d'un hula hoop

1. Le moment d'inertie est une grandeur extensive, proportionnelle à la masse, donc additive.

$$\text{D'où : } J_{\Delta}(\Sigma = S_1 \cup S_2) = J_{\Delta}(S_1) + J_{\Delta}(S_2).$$

$$\text{Autrement : } J_{\Delta}(\Sigma) = \int_{M \in \Sigma} HM^2 dm = \int_{M_1 \in S_1} H_1 M_1^2 dm + \int_{M_2 \in S_2} H_2 M_2^2 dm = J_{\Delta}(S_1) + J_{\Delta}(S_2).$$

2. - Par superposition, $\frac{\mu\pi b^2 c}{2} b^2 = \frac{\mu\pi a^2 c}{2} a^2 + J \Rightarrow J = \frac{\mu\pi c}{2} (b^4 - a^4).$

- Calcul direct : $J = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^c r^2 \mu r dr d\theta dz = \frac{\mu \times 2\pi c}{4} (b^4 - a^4).$ Soit : $J = \frac{\mu\pi c}{2} (b^4 - a^4).$

3. La condition du roulement sans glissement du tore T par rapport au cylindre C s'écrit :

$$\vec{v}_{g_I}(T/C) = \vec{v}(I \in T/C) = \vec{0}. \text{ Or :}$$

$$\vec{v}(I \in T/C) = \vec{v}(I \in T/R_0) = \vec{v}_{R_0}(G) + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{GI} = (a-r)\dot{\theta}\hat{u}_{\theta} + \Omega\hat{u} \times (-a\hat{u}_r) = [(a-r)\dot{\theta} - a\Omega]\hat{u}_{\theta}.$$

$$\text{D'où la CRSG : } (a-r)\dot{\theta} = a\Omega.$$

$$\text{D'après le théorème de Koenig : } E_C(T/R_0) = E_C^*(T) + \frac{1}{2}mv_{R_0}^2(G).$$

$$E_C^*(T) = \frac{1}{2}J\Omega^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu\pi c}{2}(b^4 - a^4)\Omega^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu\pi c}{2}(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)\Omega^2, \quad m = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^c \mu r dr d\theta dz = \mu\pi c(b^2 - a^2) \text{ et}$$

$$\frac{1}{2}mv_{R_0}^2(G) = \frac{1}{2}\mu\pi c(b^2 - a^2)a^2\Omega^2. \text{ D'où : } E_C(T/R_0) = \frac{1}{2}\mu\pi c(b^2 - a^2)\left[\frac{b^2 + a^2}{2} + a^2\right]\Omega^2.$$

$$\text{Soit : } E_C(T/R_0) = \frac{1}{2}\mu\pi c(b^2 - a^2)\left[\frac{b^2 + 3a^2}{2}\right]\Omega^2 = \frac{1}{2}J_0\Omega^2.$$

4. Le théorème du mouvement du centre de masse appliqué au tore s'écrit : $m\vec{a}_{R_0}(G) = \vec{R} + m\vec{g}$. Dans la

$$\text{CRSG et pour } \Omega = \text{cste}, \quad \vec{a}_{R_0}(G) = -(a-r)\dot{\theta}^2\hat{u}_r = -\frac{a^2}{a-r}\Omega^2\hat{u}_r. \text{ D'où la résultante des actions de contact}$$

$$\text{subies par le tore : } \vec{R} = m\vec{a}_{R_0}(G) - m\vec{g} = \mu\pi c(b^2 - a^2)\left[g\hat{u}_z - \frac{a^2}{a-r}\Omega^2\hat{u}_r\right] = \vec{R}_T + \vec{R}_N.$$

$$\vec{R}_T = \mu\pi c(b^2 - a^2)g\hat{u}_z \text{ et } \vec{R}_N = -\mu\pi c(b^2 - a^2)\frac{a^2}{a-r}\Omega^2\hat{u}_r. \text{ Le non glissement persiste tant que :}$$

$$\|\vec{R}_T\| < f\|\vec{R}_N\|, \text{ soit : } \Omega > \frac{\sqrt{(a-r)g}}{a} \quad (1). \text{ Si la vitesse de rotation n'est pas assez grande, le tore chute en glissant sur le cylindre.}$$

5. D'après le TPC appliqué au système {tore+cylindre} : $\frac{dE_C}{dt}_{/R_0} = m\vec{g} \cdot \vec{v}_{R_0}(G) + \vec{A} \cdot \vec{v}_{R_0}(B).$ Or $\vec{g} \cdot \vec{v}_{R_0}(G) = 0,$

$$\vec{v}_{R_0}(B) = \vec{v}_{R_0}(I \in T) + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{IB} = \Omega\hat{u}_z \times \beta\hat{u}_{\theta} = -\beta\Omega\hat{u}_r \text{ et } E_C = E_C(T/R_0) = \frac{1}{2}J_0\Omega^2 \Rightarrow J_0 \frac{d\Omega(t)}{dt} = -A\beta.$$

$$\text{D'où : } \Omega(t) = \Omega_0 - \frac{A\beta}{J_0}t. \text{ A cause de la force d'adhésion la vitesse angulaire diminue avec le temps et}$$

la condition (1) de non glissement risque de ne plus être vérifiée. Dans la pratique du hula hoop, le déhanchement permet de compenser la puissance dissipée par les forces d'adhésion.

II. — Etude d'un conducteur ohmique torique

6. ϵ_0 Est la permittivité diélectrique du vide. Elle s'exprime en $F.m^{-1}$.

7. D'après l'EMA, et l'EMG : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$: équation de conservation de la charge électrique.

Dans un conducteur Ohmique $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. d'où : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$: le conducteur relaxe vers

la neutralité électrique sur une durée caractéristique $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$. On peut donc considérer $\rho \approx 0$ dans le conducteur si τ est négligeable devant la durée caractéristique T des variations du champ électromagnétique.

AN : $\tau \approx 10^{-19} s$. Trop faible.

8. En régime sinusoïdal de pulsation, $\left| \frac{j_D}{j_C} \right| = \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma} = \frac{2\pi}{T} \tau \ll 1$. Dans l'EMA, le terme $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ représentant le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

9. En régime permanent $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$. Dans le conducteur $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \approx 0$. V vérifie donc l'équation de Laplace : $\vec{\nabla}^2 V = 0$.

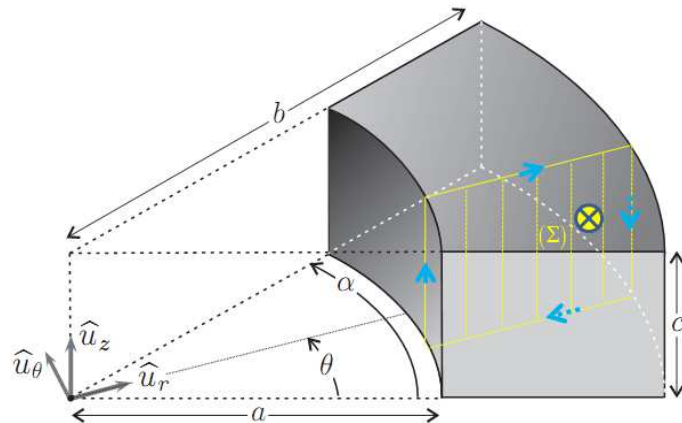
10. $\vec{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = cst = \frac{V(\alpha) - V(0)}{\alpha} = -\frac{U}{\alpha}$ et par suite : $V(\theta) = -\frac{U}{\alpha}(\theta - \alpha)$.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \hat{u}_\theta = \frac{U}{\alpha r} \hat{u}_\theta$$

$$\text{et } \vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma U}{\alpha r} \hat{u}_\theta.$$

$$11. I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \int_0^c \frac{\gamma U}{\alpha r} dr dz.$$

$$\text{Soit : } I = U \frac{\gamma c}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad R = \frac{U}{I} = \frac{\alpha}{\gamma c \ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$



12. La résistance d'un fil filiforme de conductivité γ de longueur L de section S est $R = \frac{L}{\gamma S}$.

$$\text{Pour } e = b - a \ll a, \quad R = \frac{\alpha}{\gamma c \ln\left(1 + \frac{e}{a}\right)} \approx \frac{\alpha a}{\gamma c e} = \frac{L}{\gamma S}.$$
 Cohérente avec l'expression précédente.

($L = \alpha a$ est la longueur du fil, $S = ce = c(b - a)$ sa section)

III. — Etude d'une pince ampèremétrique

13. L'AEQS néglige le retard à la propagation. Dans l'AEQS, les potentiel retardés s'expriment :

$$\vec{A}(M, t) = \iiint_{(D)} \frac{\mu_0 \vec{j}(P - PM/c, t)}{4\pi PM} \approx \iiint_{(D)} \frac{\mu_0 \vec{j}(P, t)}{4\pi PM} \text{ et } V(M, t) = \iiint_{(D)} \frac{\rho(P - PM/c, t)}{4\pi \epsilon_0 PM} \approx \iiint_{(D)} \frac{\rho(P, t)}{4\pi \epsilon_0 PM}.$$

Similaires au cas statique. $\vec{A}$ vérifie donc l'équation de Poisson $\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \mu_0 \vec{j} \approx \vec{0}$ et la condition de jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Ainsi : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \approx \mu_0 \vec{j}$

- Dans l'AEQS, l'EMA devient : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. Similaire au cas statique.
- Théorème d'Ampère : d'après le théorème de Stokes, on a :

$$\iint_{\Sigma} [\vec{\nabla}_P \times \vec{B}(P, t)] \cdot d\vec{s}(P) = \oint_{\Gamma} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{l}(M) = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j}(P, t) \cdot d\vec{s}(P) = \mu_0 I_{\text{enlacé par } \Gamma}(t).$$
- Enoncé :

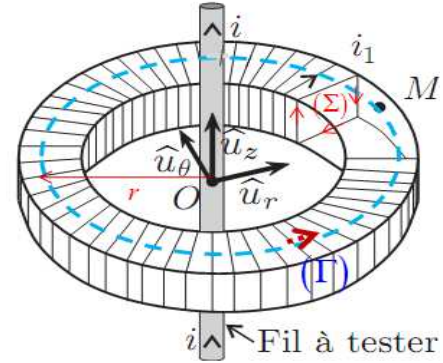
La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé orienté Γ est égale au produit par μ_0 du courant algébrique enlacé par Γ .

14. Le plan $(M, \hat{u}_r, \hat{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc : $\vec{B}(M, t) = B_{\theta}(M, t) \hat{u}_{\theta}$.

De plus, la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe Oz, donc : $\vec{B}(M, t) = \vec{B}(r, z, t)$. C/C : $\vec{B}(M, t) = B_{\theta}(r, z, t) \hat{u}_{\theta}$.

Soit (Γ) le cercle d'axe Oz de rayon r passant par M orienté suivant $\hat{u}_z$. D'après le Th d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{l}(M) = 2\pi r B_{\theta}(r, z, t) = \mu_0 I_{\text{enlacé par } \Gamma}(t) = \mu_0 (i(t) + N i_1(t)).$$



D'où :
$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{2\pi r} [i(t) + N i_1(t)] \hat{u}_{\theta}.$$

15. $\Phi = N \iint_{\Sigma} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{s}(P) = N \int_a^b \int_0^c \frac{\mu_0}{2\pi r} [i(t) + N i_1(t)] dz dr$. Soit : $\Phi = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) [N i(t) + N^2 i_1(t)]$.

$$\Phi = M i(t) + L i_1(t). \quad L = \frac{N^2 \mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{et} \quad M = \frac{N \mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

16. $R_p = 2N\lambda(b - a + c)$.

17. La f.e.m induite dans le bobinage est : $\underline{e} = -\frac{d\Phi}{dt} = R_p \underline{i}_1 \Rightarrow \Phi = -j\omega(M \underline{i} + L \underline{i}_1) = R_p \underline{i}_1$. D'où la transfert :

$$\frac{\underline{H}}{\underline{i}} = \frac{\underline{i}_1}{i} = -\frac{jM\omega}{R_p + jL\omega}.$$

18. Si H est uniforme, i_1 est proportionnel à i . Le dispositif peut alors servir de pince ampèremétrique par simple mesure de i_1 à l'aide d'un multimètre sans avoir besoin de recalibrer sur la fréquence.

$$H = \frac{1}{N \sqrt{1 + \left(\frac{R_p}{NM\omega}\right)^2}} = \frac{1}{N \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_N}{\omega}\right)^2}} \quad \text{où : } \omega_N = \frac{4\pi\lambda(b - a + c)}{N\mu_0 c \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\omega_1}{N}. \quad \text{On se place dans les régimes}$$

$\omega \gg \omega_N$ (tout en restant dans l'AEQS). Dans ce cas le rapport de transformation de la pince est :

$$H = \frac{i_1}{i} \approx \frac{1}{N} : \text{ Ces pinces sont en générale utilisées pour mesurer des courants variables intenses.}$$

IV. — Etude thermique d'un objet torique

19. Le bilan énergétique du premier principe appliqué à l'élément compris entre r et $r + dr$ et entre θ et $\theta + d\theta$ s'écrit : $d^2U(r, t) = \delta^2Q + \delta^2W$ (E1).

Le corps est indilatable incompressible, donc : $d^2U(r, t) = \mu c a r d\theta dr [T(r, t + dt) - T(r, t)]$

$$= \mu c a r d\theta dr \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt.$$

Le corps est incompressible donc : $\delta^2 W = 0$.

$$\delta^2 Q = j_{th}(r,t) a r d\theta dt - j_{th}(r+dr,t) a(r+dr) d\theta dt = -\frac{\partial [r j_{th}(r,t)]}{\partial r} dr d\theta dt. \text{ Et d'après la loi de}$$

$$\text{Fourier : } \vec{j}_{th}(r,t) = -\lambda \vec{\nabla} T(r,t) = -\lambda \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \hat{u}_r.$$

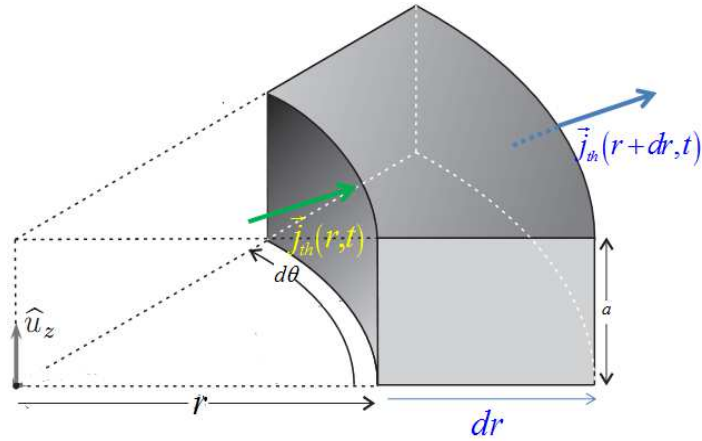
(E1) devient alors :

$$\mu c r \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = -\frac{\partial [r j_{th}(r,t)]}{\partial r} = \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right].$$

$$\text{de la forme : } \xi r \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right] \quad (E2).$$

$$\text{Avec : } \xi = \frac{\mu c}{\lambda} : \frac{1}{\xi} \text{ est la diffusivité thermique du}$$

$$\text{milieu. } [\mu c] L^3 \theta = [\lambda] \frac{\theta}{L} T L^2 \Rightarrow [\xi] = T L^{-2}. \xi \text{ s'exprime donc en : } s.m^{-2}.$$



$$20. \text{ On cherche } T(r,t) = \rho(r) \eta(t). (E2) \Rightarrow \frac{1}{T(r,t)} \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)} = \frac{1}{\xi r \rho(r)} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\rho(r)}{dr} \right] = \chi (E3).$$

$$\text{Soit : } \boxed{\frac{d \ln(\eta(t))}{dt} = \chi} (E3'). \quad \boxed{r \rho''(r) + \rho'(r) - \chi \xi r \rho(r) = 0} (E3'').$$

$$21. (E3') \quad \eta(t) = A \exp(\chi t). T \text{ reste finie quand } t \rightarrow \infty \Rightarrow \chi < 0.$$

$$22. \rho(r) \text{ est bornée de classe } C^\infty, \text{ donc développable en série entière.}$$

$$\rho(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n. \quad \rho'(r) = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n r^{n-1}. \quad \rho''(r) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \alpha_n r^{n-2}. \quad \text{D'après (E3'') :}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \alpha_n r^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n r^{n-1} = \xi \chi \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^{n+1} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \text{ et } n(n-1) \alpha_n + n \alpha_n = n^2 \alpha_n = \xi \chi \alpha_{n-2} \text{ pour } n \geq 2.$$

$$\text{pour } p \geq 1: \alpha_{2p} = \frac{\xi \chi \alpha_{2(p-1)}}{4p^2} = \frac{(\xi \chi)^2 \alpha_{2(p-2)}}{4^2 [p(p-1)]^2} = \frac{(\xi \chi)^3 \alpha_{2(p-3)}}{4^3 [p(p-1)(p-3)]^2} = \dots = \left(\frac{\xi \chi}{4} \right)^p \frac{\alpha_0}{[p!]^2} \text{ et } \alpha_{2p+1} = 0.$$

23. - La face interne $r = a$ est placée dans le vide donc il n'y a pas d'échange thermique à travers cette face ni par conduction ni par convection.

- les disques sont isolants ; leurs faces internes en $z = 0$ et $z = a$ sont parfaitement réfléchissantes, donc

$$\text{ils n'échangent pas d'énergie thermique avec le tore. D'où : } \vec{j}_{th}(a^+) = \vec{j}_{th}(a^-) = \vec{0}. \text{ Soit : } \left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{r=a} = 0.$$

$$24. j_{th,r}(2a^+, t) = \sigma T^4(2a, t) \Rightarrow \sigma \eta^3(t) \rho^4(2a) = -\lambda \left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{r=2a}. \eta \text{ doit être constante, en contradiction avec 21.}$$

La surface n'est pas en équilibre thermique.

25. A cause du rayonnement la température en un point du tore diminue avec le temps. La taille du tore étant finie, son énergie, et par conséquent sa température, tendent uniformément vers zéro après un temps infini.

