

Merci de nous indiquer toute erreur ou imprécision trouvée dans l'énoncé ou la correction.

Correction du sujet Mines 2 PC 2014

Petite coquille dans le texte introductif, μ_0 est bien la perméabilité magnétique du vide.

□ **1** - Soit $\hat{e}_{MM'}$ le vecteur unitaire orienté de la charge q vers la charge q' (situées en M et M' respectivement). La force électrostatique exercée par la charge q sur la charge q' s'écrit :

$$\vec{F}_{q \rightarrow q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q'}{r^2} \hat{e}_{MM'}$$

Cette loi est attribuée à Charles-Augustin Coulomb et a été énoncée en 1785.

L'unité des deux charges q et q' est le Coulomb (C), soit l'Ampère.seconde (A.s) en unités SI.

L'unité de la permittivité électrique du vide est le F.m⁻¹ soit en unités SI : A².s⁴.kg⁻¹.m⁻³.

L'unité de r est le m.

L'unité de F est le N, soit kg.m.s⁻² en unités SI.

□ **2** - La force de gravitation entre les deux particules est :

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{m^2}{r^2} \hat{e}_{MM'}$$

La force de gravitation de la Terre sur une particule (poids) est :

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

$$F_{elec} \simeq 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ N} \gg F_{grav} \simeq 6,7 \cdot 10^{-51} \text{ N}$$

De même, si l'on note P le poids de la particule : $F_{elec} \gg P \simeq 10^{-29} \text{ N}$.

On peut donc en conclure que les forces de gravitation (entre les deux particules et entre une particule et la Terre) sont négligeables devant la force d'interaction électrostatique entre les deux particules élémentaires.

□ **3** -

$$\vec{F}_{q \rightarrow q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q'}{r^2} \hat{u} = q' \vec{E}_q(M')$$

où M' est la position de la charge q' .

Le champ électrostatique créé par q s'écrit au niveau de M' :

$$\vec{E}_q(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{e}_{MM'}$$

Le champ électrostatique est en V.m⁻¹.

Tout plan de symétrie de la distribution de charge est plan de symétrie pour le champ électrostatique. Tout plan d'antisymétrie de la distribution de charge est plan d'antisymétrie pour le champ électrostatique.

Ces deux propriétés s'appuient sur le principe de superposition, lui-même conséquence de la linéarité des équations de Maxwell.

□ **4** - D'après la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \hat{e}_{PM}}{r^2}$$

Le champ magnétique est en Tesla (T) soit en kg. A⁻¹.s⁻² pour l'unité SI.

La perméabilité magnétique est en H.m⁻¹ soit en kg.m.A⁻².s⁻².

L'unité de r est le m. L'unité de I est A. L'unité de dl est le m.

Tout plan de symétrie de la distribution de courant est plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique. Tout plan d'antisymétrique de la distribution de courant est plan de symétrie pour le champ magnétostatique.

□ **5** - D'après la loi de Laplace : $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$.

□ **6** - Soit (C) un contour fermé orienté et (S) une surface quelconque reposant sur (C) orientée par celui-ci. Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k \epsilon_k I_k$$

avec $d\vec{l}$ le déplacement infinitésimal sur (C) , I_k les intensités algébriques des courants traversant (S) .

Si I_k est orientée positivement selon le sens d'orientation de la surface (S) : $\epsilon_k = +1$, dans le cas contraire : $\epsilon_k = -1$.

□ **7** - Il y a invariance par rotation autour de l'axe (Oz) et invariance par translation selon l'axe (Oz) donc $\vec{B}_\infty(M) = \vec{B}(\rho)$. De plus, le plan passant par M et contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie pour la distribution de courant. Le champ magnétique en M est donc orthogonal à ce plan : $\vec{B}_\infty(M) = B(\rho)\hat{e}_\theta$.

Considérons comme contour (C) le cercle d'axe de révolution (Oz) , de rayon ρ , orienté selon $\hat{e}_\theta$. D'après le théorème d'Ampère :

$$\oint_{(C)} \vec{B}_\infty \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Soit :

$$\oint_{(C)} B_\infty(\rho) \cdot dl = \mu_0 I$$

Donc, en sortant $B_\infty(\rho)$ de l'intégrale : $2\pi\rho B_\infty(\rho) = \mu_0 I$

On a donc : $\vec{B}_\infty(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{e}_\theta$

□ **8** - On pourrait être tenté de considérer le plan contenant (Oz) et M comme plan de symétrie et effectuer le même raisonnement que dans la question précédente. Cependant, il faut tenir compte du circuit d'alimentation du fil dont on ne sait rien ici mais qui est à distance finie cette fois-ci. Il va donc falloir effectuer le calcul direct du champ magnétique créé par le tronçon de fil avec la loi de Biot et Savart.

L'élément de courant $I d\vec{l}$ situé en P crée en M un champ magnétique :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \hat{e}_{PM}}{4\pi PM^2} = \frac{\mu_0 I dz \cos \alpha}{4\pi PM^2} \hat{e}_\theta$$

Or, à ρ fixé comme ici, en différenciant l'expression de $\tan \alpha$: $\frac{dz}{\rho} = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$

$$\text{Donc } dz = \frac{\rho d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{De plus : } \cos \alpha = \frac{\rho}{PM}$$

$$\text{On en déduit : } d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I \cos \alpha d\alpha}{4\pi \rho} \hat{e}_\theta$$

En intégrant alors entre le point inférieur A_1 (paramétré par l'angle $-\alpha_m$) et le point supérieur A_2 du fil (paramétré par l'angle $+\alpha_m$) : $\vec{B}(M) = \int_{-\alpha_m}^{+\alpha_m} \frac{\mu_0 I \cos \alpha d\alpha}{4\pi \rho} \hat{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\sin \alpha_m - \sin(-\alpha_m)) \hat{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \sin \alpha_m \hat{e}_\theta$

$$\text{Par ailleurs : } \sin \alpha_m = \frac{OA_2}{MA_2} = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + \rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4/\xi^2}}$$

$$\text{On a donc au final : } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \frac{1}{\sqrt{1 + 4/\xi^2}} \hat{e}_\theta$$

$$\text{Donc : } \vec{B}(M) = f(\xi) \cdot \vec{B}_\infty(M) \text{ avec } f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4/\xi^2}} \text{ ou de manière équivalente : } f(\xi) = \sin(\arctan(\frac{\xi}{2}))$$

Pour $\xi = 1$: $f(1) = 0,447$ et pour $\xi = 20$: $f(20) = 0,995$. On en déduit ainsi que pour $\xi \gg 20$, $f(\xi \simeq 1)$. On retrouve alors le champ magnétique créé par un fil infini. Pour $\xi \gg 20$ la longueur L du fil est en effet très grande devant la distance entre M et le fil. Le fil peut être considéré comme infini.

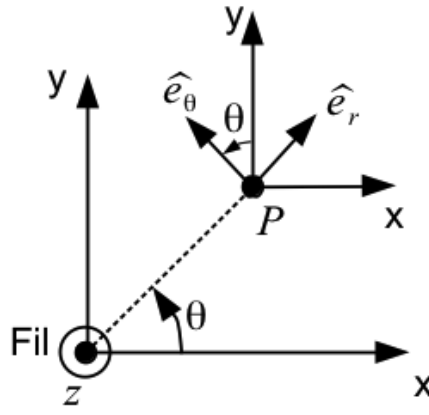
□ **9** - Notons $\hat{n}$ le vecteur unitaire orthogonal à la surface de la spire et orienté par I . Le moment magnétique s'écrit : $\vec{\mu}_c = SI\hat{n}$.

Il s'exprime en $A.m^2$.

La résultante des forces subies par cette boucle indéformable plongée dans le champ magnétique $\vec{B}$ stationnaire s'écrit : $\vec{R} = (\vec{\mu}_c \cdot \text{grad}) \vec{B} = \vec{0}$ puisque le champ magnétique est uniforme.

Le moment résultant $\vec{\Gamma}$ des forces subies par cette boucle est : $\vec{\Gamma} = \vec{\mu}_c \wedge \vec{B}$.

□ **10** - La difficulté de cette question consiste à bien se représenter la géométrie du problème.



La distance entre le fil et le point $P(x, y, z)$ vaut : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

De plus : $\hat{e}_\theta = -\sin\theta\hat{e}_x + \cos\theta\hat{e}_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{e}_y$

En utilisant l'expression du champ magnétique de la question 7 : $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2 + y^2)}(-y\hat{e}_x + x\hat{e}_y)$

□ **11** - La portion d'aiguille située au point P subit du champ magnétique un couple :

$$d\vec{\Gamma} = d\vec{\mu} \wedge \vec{B}(P) = (d\mu \sin\varphi\hat{e}_x + d\mu \cos\varphi\hat{e}_z) \wedge \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2 + y^2)}(-y\hat{e}_x + x\hat{e}_y) \right)$$

D'où :

$$d\Gamma_y = -\frac{y\mu_0 \cos\varphi I d\mu}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

L'énoncé n'est pas clair dans la définition de $\vec{B}_\infty(y)$. Nous supposons qu'il s'agit du champ magnétique créé par le fil infini en $(x = 0, y)$.

Notons $\mathcal{V}$ le volume total de l'aiguille. $d\vec{\mu} = \vec{\mu} \frac{d\tau}{\mathcal{V}}$.

$$d\Gamma_y = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \mu \cos\varphi \frac{y^2 d\tau / \mathcal{V}}{x^2 + y^2} = \mu \cos\varphi \left(\vec{B}_\infty(y) \cdot \hat{e}_y \right) \frac{y^2 d\tau / \mathcal{V}}{x^2 + y^2}$$

En intégrant sur toute l'aiguille (φ et y sont constants sur toute l'aiguille) :

$$\Gamma_y = \mu \cos\varphi \left(\vec{B}_\infty(y) \cdot \hat{e}_y \right) \int_{\text{aiguille}} \frac{y^2 d\tau / \mathcal{V}}{x^2 + y^2}$$

$$\text{On pose alors : } \gamma = \int_{\text{aiguille}} \frac{y^2 d\tau / \mathcal{V}}{x^2 + y^2}$$

□ **12** - Dans le cas d'une aiguille infiniment fine, on passe à une distribution linéique de moment magnétique : $d\vec{\mu} = \frac{dl}{\Lambda} \vec{\mu}$.

$$\text{Or : } dl = \frac{dx}{\sin\varphi}$$

$$\text{Donc : } \gamma = \int_{\text{aiguille}} \frac{y^2 dx}{\Lambda \sin\varphi (x^2 + y^2)} = \int_{\text{aiguille}} \frac{dx}{\Lambda \sin\varphi (1 + (x/y)^2)}$$

Lorsque l'on intègre sur toute l'aiguille, x varie de $-\frac{\Lambda}{2} \sin\varphi$ à $+\frac{\Lambda}{2} \sin\varphi$.

$$\text{L'intégrale précédente donne : } \gamma = \frac{1}{\Lambda \sin\varphi} \left[y \arctan\left(\frac{\Lambda}{2y} \sin\varphi\right) - y \arctan\left(-\frac{\Lambda}{2y} \sin\varphi\right) \right] = \frac{2y}{\Lambda \sin\varphi} \arctan\left(\frac{\Lambda}{2y} \sin\varphi\right)$$

$$\text{En posant, comme indiqué par l'énoncé : } \delta = \frac{\Lambda}{2y} \sin\varphi$$

$$\text{on obtient : } \gamma = \frac{\arctan\delta}{\delta}$$

□ **13** - Dans le référentiel terrestre galiléen on étudie le système {aiguille}. L'aiguille subit le couple dû au champ magnétique du fil et le couple dû au champ magnétique terrestre :

$$\vec{\Gamma}_{\text{terr}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_t = -\mu \sin\varphi B_t \hat{e}_y$$

En appliquant le théorème du moment cinétique à l'aiguille projeté sur l'axe (Oy) , on obtient :

$$J_y \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\mu \sin\varphi B_t + \mu \cos\varphi \left(\vec{B}_\infty(y) \cdot \hat{e}_y \right) \gamma(\delta)$$

□ **14** - À l'équilibre : $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ et $\sin\varphi_e B_t = \cos\varphi_e \left(\vec{B}_\infty(y) \cdot \hat{e}_y \right) \gamma(\delta)$

$$\text{Donc : } \frac{\tan\varphi_e}{\gamma(\delta)} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y B_t} = -\frac{I}{I_t} \text{ en posant } I_t = \frac{2\pi y B_t}{\mu_0}$$

On a ainsi $B_t = \frac{\mu_0 I_t}{2\pi y}$

I_t est l'intensité du courant parcourant un fil fictif infini qui serait situé à la distance y de l'aiguille et qui produirait le champ magnétique B_t au niveau de celle-ci.

Application numérique : $\delta = 2,1$; $I = 12.5$ A

Cette valeur d'intensité est très élevée comparée aux valeurs des intensités usuelles dans les travaux pratiques.

□ **15** - Le centre de gravité G du système est défini par : $\vec{O} = m\vec{OG} + m_a\vec{GA}$.
En introduisant C dans $\vec{GA}$ par une relation de Chasles, on obtient : $\vec{CG} = \frac{m_a}{m + m_a}\vec{CA}$

Puisqu'à l'équilibre A est sur le segment $[OC]$: $\vec{CG} = -\frac{m_a}{m + m_a}d\hat{e}_z$

Donc $h = \frac{m_a}{m + m_a}d$

□ **16** - Le système subit son poids $(m + m_a)\vec{g}$, dérivant d'une énergie potentielle et la réaction du support. Comme il y a roulement sans glissement, cette réaction du support ne travaille pas. Le système est donc conservatif.

□ **17** - D'après la formule de Varignon : $\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \vec{OG}$ avec $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantané du solide par rapport au référentiel du laboratoire. Le solide tourne autour de l'axe Δ avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ donc : $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{e}_x$. De plus, le solide roule sans glissement sur le sol en O, donc : $\vec{v}_O = \vec{0}$. En écrivant : $\vec{OG} = \vec{OC} + \vec{CG} = R\hat{e}_z + h\sin(\theta)\hat{e}_y - h\cos(\theta)\hat{e}_z$.

On trouve : $\vec{v}_G = \dot{\theta}(h\cos(\theta) - R)\hat{e}_y + h\dot{\theta}\sin(\theta)\hat{e}_z$

Pour trouver l'énergie cinétique, utilisons le théorème de Koenig : $E_c = \frac{1}{2}m_t v_G^2 + E_c^*$

On obtient finalement : $E_c = \frac{1}{2}m_t\dot{\theta}^2(h^2 + R^2 - 2hR\cos(\theta)) + \frac{1}{2}J_{\Delta G}\dot{\theta}^2$

□ **18** - $E_p = m_t g z_G = m_t g(R - h\cos(\theta))$ en prenant l'origine des z en O et $E_p=0$ pour cette altitude.

□ **19** - La conservation de l'énergie mécanique s'écrit : $E_c + E_p = cste$

En remplaçant E_c et E_p par leurs expressions, puis en dérivant par rapport au temps et en simplifiant par $\dot{\theta}$, on obtient l'équation différentielle sur θ :

$$(m_t(h^2 + R^2 - 2hR\cos(\theta)) + J_{\Delta G})\ddot{\theta} + m_thR\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + m_tgh\sin(\theta) = 0$$

□ **20** - Avec les simplifications proposées : $\cos(\theta) \simeq 1$ et $\sin(\theta) \simeq \theta$. Le deuxième terme devient de l'ordre 3 en θ et on peut le négliger.

Finalement : $(m_t(h^2 + R^2 - 2hR) + J_{\Delta G})\ddot{\theta} + m_tgh\theta = 0$

On obtient donc un mouvement de petite oscillation harmonique à la période :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_t(h - R)^2 + J_{\Delta G}}{m_tgh}}$$

□ **21** - En remarquant que $\hat{e}_z = \cos(\theta)\hat{e}_r - \sin(\theta)\hat{e}_\theta$, on trouve :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\hat{e}_r + \sin(\theta)\hat{e}_\theta)$$

La distribution de courant est invariante par rotation autour de Oz, le problème est donc invariant par rotation autour de Oz et donc ne dépend pas de φ .

Projection de $\vec{B}$ sur $\hat{e}_z$:

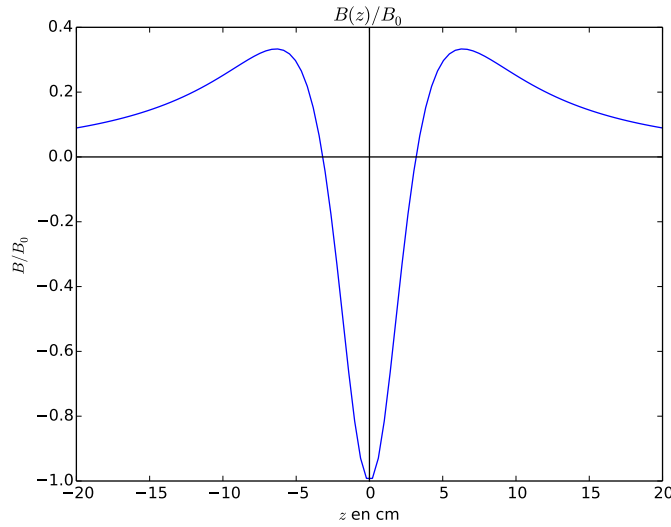
$$B_z(M) = \vec{B}(M) \cdot \hat{e}_z = \frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}(2\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$$

$$\text{Or } r^2 = \rho_c^2 + z^2, \cos(\theta) = \frac{z}{\sqrt{\rho_c^2 + z^2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\rho_c}{\sqrt{\rho_c^2 + z^2}}$$

$$\text{D'où : } B_z(\rho_c, z) = B_0\rho_c^3 \frac{2z^2 - \rho_c^2}{(\rho_c^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\text{Finalement, } B_z(\rho_c, z) = B_0\psi(\eta) \text{ avec } \eta = \left(\frac{z}{\rho_c}\right)^2 \text{ et } \alpha = 2.$$

□ **22** - Tracé de $B_z(\rho_c, z)$ pour ρ_c fixé à 4,5 cm :



□ **23** - Les contributions de chacun des dipôles élémentaires de la couronne sont égales. On les somme sur la couronne en remplaçant le μ du résultat précédent par $d\mu = \mu_l dl = \mu_l \rho_c d\theta$ pour l'élément de couronne dl .

$$B_{cz}(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 \mu_l}{4\pi \rho_c^3} \psi(\eta) \rho_c d\theta$$

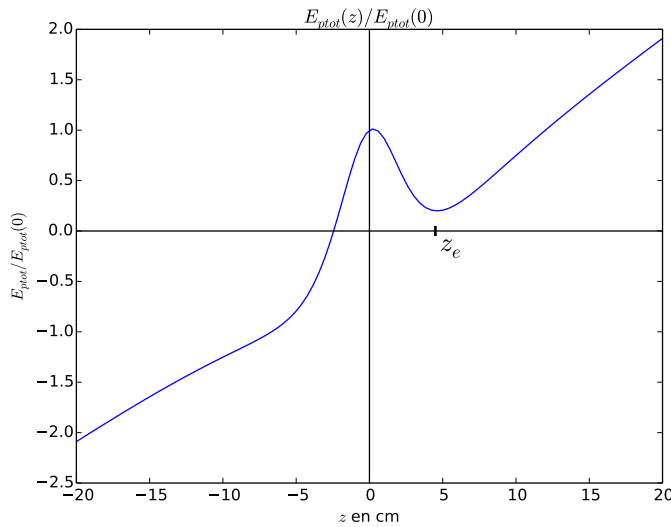
$$B_{cz}(z) = \frac{\mu_0 \mu_l}{2\rho_c^2} \psi((z/\rho_c)^2)$$

□ **24** - **A.N.** $B_{cz}(5, 5\text{cm}) = 6.7 \cdot 10^{-3} T$

□ **25** - $E_{pm} = -\vec{\mu}_g \cdot \vec{B}_c(z) = -\mu_g B_{cz}(z)$

Et $E_{ptot} = E_{pm} + E_{ppes} = -\mu_g B_{cz}(z) + m_t g z$ à une constante arbitraire près.

Tracé de $E_{ptot}(z)$ (somme d'une fonction affine et de l'opposé de la fonction précédente) :



Il existe donc un minimum local pour $E_{ptot}(z)$ en z_e qui correspond à une position d'équilibre stable.

□ **26** - La conservation de l'énergie mécanique s'écrit (pas de force autre que celles dues au champ magnétique et à la pesanteur) : $\frac{1}{2}m_t \dot{z}^2 + E_{ptot}(z) = cste$

Puisque ce mouvement se fait autour de la position d'équilibre, on pose : $z = z_e + \epsilon$ avec $\epsilon \ll z_e$.

D'où $\dot{z} = \dot{\epsilon}$ et $E_{ptot}(z) \simeq E_{ptot}(z_e) + \epsilon \frac{\partial E_{ptot}}{\partial z}(z_e) + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 E_{ptot}}{\partial z^2}(z_e)$ avec $\frac{\partial E_{ptot}}{\partial z}(z_e) = 0$ et $\frac{\partial^2 E_{ptot}}{\partial z^2}(z_e) > 0$ car E_{ptot} est minimale en z_e .

On peut donc réécrire la conservation de l'énergie mécanique au voisinage de la position d'équilibre :

$$\frac{1}{2}m_t \dot{\epsilon}^2 + E_{ptot}(z_e) + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 E_{ptot}}{\partial z^2}(z_e) = cste$$

En dérivant par rapport au temps, puis en simplifiant par $\dot{\epsilon}$, on trouve l'équation différentielle du mouvement :

$$m_t \ddot{\epsilon} + \frac{\partial^2 E_{ptot}}{\partial z^2}(z_e) \epsilon = 0$$

De plus $\frac{\partial^2 E_{ptot}}{\partial z^2}(z_e) = -\mu_g \frac{\partial^2 B_{cz}}{\partial z^2}(z_e) = \mu_g \kappa$
 Finalement : $m_t \ddot{\epsilon} + \mu_g \kappa \epsilon = 0$

Le globe oscille de manière harmonique autour de sa position d'équilibre avec une période : $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_t}{\mu_g \kappa}}$

□ **27** - Question posée de manière trompeuse. La simplification de l'expression et la démonstration de $\hat{e}_z \cdot \Delta \vec{B}_c = 0$ n'ont rien à voir.

Commençons par la deuxième partie de la question. D'après l'équation de Maxwell-Ampère : $\vec{rot} \vec{B}_c = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_c}{\partial t} = \vec{0}$ car il n'y a pas de courant qui produit ce champ en dehors de la couronne et le régime est stationnaire.

D'où $\vec{0} = \vec{rot} \vec{rot} \vec{B}_c = \vec{grad}(\text{div} \vec{B}_c) - \Delta \vec{B}_c = -\Delta \vec{B}_c$ avec l'équation de Maxwell de conservation du flux du champ magnétique.

On en déduit : $\Delta \vec{B}_c = \vec{0}$ et $\hat{e}_z \cdot \Delta \vec{B}_c = 0$

Enfin, l'expression donnée se simplifie car le problème ne dépend pas de φ (invariance par rotation autour de l'axe Oz) :

$$\hat{e}_z \cdot \Delta \vec{B}_c = 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_{cz}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 B_{cz}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 B_{cz}}{\partial z^2}$$

□ **28** - Nous avons vu que E_{ptot} est minimum par rapport à z en z_e , position d'équilibre stable. D'après son expression, E_{ptot} est minimum au voisinage d'un maximum de B_{cz} . Donc en z_e , $\frac{\partial^2 B_{cz}}{\partial z^2} < 0$.

De plus, si B_{cz} présentait un maximum selon ρ à cette cote au voisinage de l'axe, on aurait : $\frac{\partial B_{cz}}{\partial \rho} = 0$ et $\frac{\partial^2 B_{cz}}{\partial \rho^2} < 0$. Ce qui contredirait l'expression trouvée à la question précédente. Il est donc impossible que B_{cz} présente un maximum selon ρ en z_e . Puisque B_{cz} n'est pas maximale selon ρ en z_e , alors E_{ptot} n'est pas minimale selon ρ en z_e . La position d'équilibre axiale z_e n'est donc pas une position d'équilibre radiale.

□ **29** - D'après l'énoncé, u_{H_1} est une fonction affine (et non linéaire) décroissante de la distance, telle que $u_{H_1}(x_0) = u_{H_m}$. On en déduit $u_{H_1}(x) = -k(x_0 - x) + cste$. La condition aux limites permet de déterminer la constante.

Finalement : $u_{H_1}(x) = -k(x_0 - x) + u_{H_m}$. De même : $u_{H_2}(x) = -k(x_0 + x) + u_{H_m}$.

□ **30** - Ce sont des montages suiveurs. $u'_{H_1} = u_{H_1}$ et $u'_{H_2} = u_{H_2}$.

Ils permettent de découpler la source et la charge (résistance d'entrée infinie et résistance de sortie nulle). Ainsi $u'_{H_1} = u_{H_1}$ et $u'_{H_2} = u_{H_2}$ quelles que soient les charges qu'on leur adjoint.

□ **31** - Loi des noeuds en terme de potentiels à l'entrée - :

$$\frac{v-v_-}{R} + \frac{u'_{H_2}-v_-}{R} = 0. \text{ Donc : } v = -u'_{H_2} + 2v_-.$$

A la borne + de l'AO, on reconnaît un diviseur de tension : $v_+ = \frac{u'_{H_1}}{2}$.

De plus, l'AO est idéal et en régime linéaire : $v_- = v_+$.

Finalement : $v = u'_{H_1} - u'_{H_2} = 2kx$. Cet étage est un soustracteur.

□ **32** - Loi des noeuds à l'entrée - :

$$\frac{v'-v_-}{R} + \frac{v-v_-}{R} + C \frac{d(v-v_-)}{dt} = 0.$$

De plus, l'AO est idéal et en régime linéaire : $v_- = v_+ = 0$.

$$\text{D'où : } v' = -v - CR \frac{dv}{dt} = -2kx - 2kCR \frac{dx}{dt}$$

□ **33** - La force appliquée par les 2 bobines à l'aimant est : $F_x = -2k''k'(x + CR \frac{dx}{dt})$.

On applique le PFD à l'aimant en projection sur $\hat{e}_x$: $m_t \ddot{x} = -2k''k'(x + CR \dot{x})$.

Cette équation différentielle peut se mettre sous la forme : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{2k''k'k}{m_t}} \text{ et } Q = \frac{1}{CR} \sqrt{\frac{m_t}{2k''k'k}}.$$

Quel que soit le régime (pseudo périodique, critique ou apériodique), x tend vers sa position d'équilibre en $x = 0$.

Pour que le retour à l'équilibre se fasse le plus rapidement possible après une perturbation, il faut se placer au régime critique.

$$\text{On trouve donc : } Q = \frac{1}{2} = \frac{1}{CR} \sqrt{\frac{m_t}{2k''k'k}}$$