

CORRIGE CCP PHYSIQUE-CHIMIE PSI 2014 - CUIVRE ET SUPRACONDUCTIVITE

Corrigé rédigé par Nicole ADLOFF (nicole.adloff0212@orange.fr), relu par Marc STRUBEL (marc.strubel@wanadoo.fr).

Merci de nous faire part de vos remarques et commentaires !

Ce corrigé peut être diffusé à vos élèves dès 2014.

Partie chimie :

A. Etude cristallographique du cuivre :

1. cfc :
2. Coordinence : nombre de plus proches voisins : 12
3. Relation de tangence : diagonale d'une face : $a\sqrt{2} = 4R$
4. Nombre d'atomes par maille : $8 \cdot (1/8) + 6 \cdot (1/2) = 4$
5. $C = \text{volume occupé par les atomes de la maille} / \text{volume de la maille} = \frac{4 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{a^3} = \frac{\pi}{6}\sqrt{2} = 0,74$
structure compacte
6. $\rho = \frac{m}{V} = \frac{4M}{N_a a^3} = \frac{M\sqrt{2}}{8N_a R^3}$
7. $M = \frac{\rho 8N_a R^3}{\sqrt{2}} = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot (128 \cdot 10^{-12})^3}{\sqrt{2}} = 63,6 \text{ g.mol}^{-1}$...soit environ 64 nucléons dans le noyau, soit environ 32 protons et 32 neutrons, donc environ 32 électrons, soit une structure électronique $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^2$...Cu est certainement dans la 4^e période du tableau périodique, mais les candidats auront plus vite fait de consulter le tableau périodique de leur calculatrice.

B. Diagramme E-pH du cuivre :

8. Diagramme de prédominance

no	Domaine de prédominance	pH	Domaine d'existence
+II	Cu^{2+}	5	$\text{Cu}(\text{OH})_2$
+I	Cu^+	1	$\text{Cu}_2\text{O}_{(s)}$
0	$\text{Cu}_{(s)}$		

pH de début de précipitation de $\text{Cu}(\text{OH})_2$:
 $\text{Cu}^{2+} + 2 \text{HO}^- = \text{Cu}(\text{OH})_2 \quad K_{s2} = [\text{Cu}^{2+}] \cdot [\text{HO}^-]^2$

$$[\text{HO}^-] = \sqrt{\frac{K_{s2}}{c}} = \sqrt{\frac{10^{-20}}{10^{-2}}} = 10^{-9} \text{ d'où pH} = 5$$

pH de début de précipitation de Cu_2O :

$$2\text{Cu}^+ + 2 \text{HO}^- = \text{Cu}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} \quad K_{s1} = [\text{Cu}^+]^2 \cdot [\text{HO}^-]^2 \quad [\text{HO}^-] = \sqrt{\frac{K_{s1}}{c^2}} = \sqrt{\frac{10^{-30}}{10^{-4}}} = 10^{-13} \text{ d'où pH} = 1$$

Etude du couple Cu(II)/Cu(I)

9. I = Cu^+ ; II = Cu_2O ; III = Cu^{2+} ; IV = $\text{Cu}(\text{OH})_2$

10. segment (a) : Frontière $\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}^+$: $\text{Cu}^{2+} + e^- = \text{Cu}^+$

$$\text{Loi de Nernst } E = E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+) + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Cu}^+]} \right) = E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+) = \mathbf{0,16 \text{ V}}$$

(Égalité des concentrations en espèces dissoutes sur la frontière)

11. segment (b) : Frontière $\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}_2\text{O}$: $2\text{Cu}^{2+} + \text{H}_2\text{O} + 2e^- = \text{Cu}_2\text{O} + 2\text{H}^+$

Loi de Nernst $E = E^\circ + 0,03 \log \left(\frac{[Cu^{2+}]^2}{[H^+]^2} \right) = E^\circ + 0,06.c + 0,06pH$.

La pente de la droite est donc de 0,06V/upH.

Pour trouver l'ordonnée à l'origine on utilise la continuité en pH = 1, frontière entre Cu⁺ et Cu₂O : 0,16 = a + 0,06*1 d'où a = 0,1 V et l'équation du segment (b) : $E = 0,1 + 0,06pH$.

Autre calcul (exact) : $E = E^\circ \left(\frac{Cu^{2+}}{Cu} \right) + 0,06 \cdot \log \left(\frac{[Cu^{2+}]}{[Cu^+]^2} \right) =$
 $= E^\circ \left(\frac{Cu^{2+}}{Cu} \right) + 0,06 \cdot \log \left(\frac{[Cu^{2+}]}{K_s} [OH^-]^2 \right) =$
 $= E^\circ \left(\frac{Cu^{2+}}{Cu} \right) + 0,06 \cdot \log \left(\frac{K_e^2 [Cu^{2+}]}{K_s [H^+]^2} \right) =$

qui montre que :

$$E^\circ \left(\frac{Cu^{2+}}{CuO} \right) = E^\circ \left(\frac{Cu^{2+}}{Cu} \right) + 0,06 \cdot \log \left(\frac{K_e^2}{K_s} \right) = 0,10 \text{ V.}$$

NB : il n'est pas précisé qu'on est à 25°C et que $RT \ln 10 / F = 0,06$

Etude du couple Cu(I)/Cu(0)

12. Frontière Cu⁺ / Cu : Cu⁺ + e⁻ = Cu $E = E^\circ(Cu^+/Cu) + 0,06 \cdot \log[Cu^+] = 0,52 - 0,12 = 0,40 \text{ V}$

C'est l'équation du segment (α)

Le point A est à la frontière entre Cu⁺ et Cu₂O, donc pour pH = 1 et E = 0,40 V

Segment (β) : frontière entre Cu₂O et Cu : Cu₂O + 2H⁺ + 2e⁻ = 2Cu + H₂O $E = E^\circ - 0,06pH$

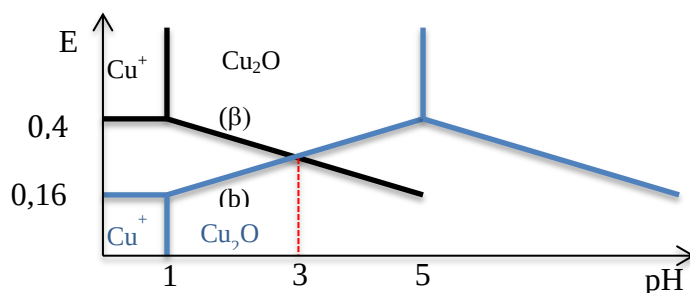
donc une pente de -0,06 V/upH et par continuité en A 0,4 = E[°] - 0,06*1 soit E[°] = 0,46 V et

l'équation du segment (β) : $E = 0,46 - 0,06pH$

Encore une fois un calcul théorique est possible, mais le sujet est déjà assez long comme ça !

Diagramme E-pH provisoire :

13. Les ions Cu⁺ et le solide Cu₂O ne peuvent pas avoir deux domaines de disjoints. Les ions Cu⁺



n'ont donc aucun domaine d'existence, alors que Cu₂O existera à partir du pH d'intersection de (b) et (β).

Intersection de (b) et (β) :

$$E = 0,46 - 0,06pH ; \quad E = 0,1 + 0,06pH$$

$$\text{Pour } pH = 0,36/0,12 = 3$$

Pour pH < 3 Cu(I) se dismute en Cu(0) et

Cu(II).

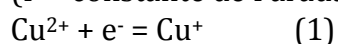
Diagramme E-pH du cuivre :

14. Potentiel standard de Cu²⁺ / Cu : procédons par combinaison linéaire des enthalpies libres standard de réaction

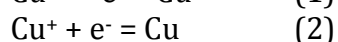


$$\Delta_r G^\circ (*) = \Delta_r G^\circ (1) + \Delta_r G^\circ (2) = -2FE^\circ (*)$$

(F = constante de Faraday)



$$\Delta_r G^\circ (1) = -FE^\circ (1)$$



$$\Delta_r G^\circ(2) = -FE^\circ(2)$$

$$\text{d'où } E^\circ(*) = (E^\circ(1) + E^\circ(2)) / 2 =$$

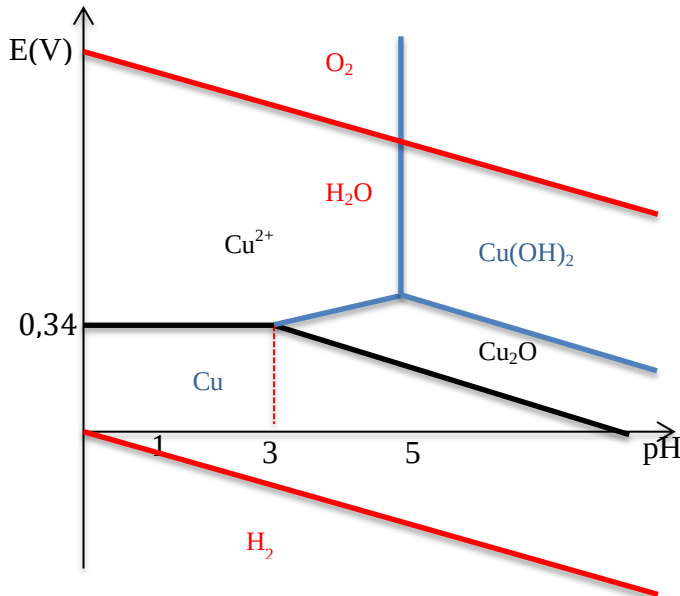
$$(0,16 + 0,52) / 2 \quad E^\circ(*) = 0,34 \text{ V}$$

15. On applique la loi de Nernst au couple $\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}$:

$$E = E^\circ(*) + 0,03 \log[\text{Cu}^{2+}] = 0,34 - 0,06 = 0,28 \text{ V pour pH} < 3.$$

Pour $\text{pH} > 3$ intervient le cuivre (I) donc il n'est plus nécessaire d'étudier le couple $\text{Cu(II)} / \text{Cu(0)}$. Il faut donc revenir au tableau initial.

16.



17. La réaction envisagée est une dismutation : $2\text{Cu}^+ = \text{Cu}_{(s)} + \text{Cu}^{2+}$
 C'est la combinaison linéaire des réactions notées (1) et (2) dans la question 14 :
 $(\text{dis}) = (2) - (1)$ donc
 $\Delta_r G^\circ(\text{dis}) = \Delta_r G^\circ(2) - \Delta_r G^\circ(1) = -RT \ln K_{\text{dis}}^\circ = -FE^\circ(2) + FE^\circ(1)$
 soit
 $\ln K_{\text{dis}}^\circ = (E^\circ(2) - E^\circ(1)) * F / RT = \ln 10 * \log K_{\text{dis}}^\circ$
 d'où $\log K_{\text{dis}}^\circ = (E^\circ(2) - E^\circ(1)) * F / RT \ln 10 = (E^\circ(2) - E^\circ(1)) / 0,06 = (0,52 - 0,16) / 0,06 = 18$ à 25°C
 $K_{\text{dis}}^\circ = 10^{18}$ valeur très grande, c'est normal réaction totale...

C. Diagramme E-pH de l'eau ou de ses ions :

18. H^+ / H_2 : $\text{H}^+ + e^- = \frac{1}{2} \text{H}_2$ $E = -0,06 \text{ pH}$; $\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}$: $\frac{1}{2} \text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2e^- = \text{H}_2\text{O}$ $E = 1,23 - 0,06\text{pH}$

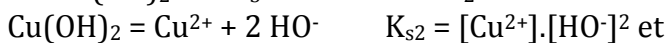
19. cf diagramme question 16

20. Cu est un métal noble car il a un domaine commun avec l'eau et ne sera donc pas corrodé par l'eau de mer d'où son utilisation en « marine antique ». D'autres métaux nobles sont l'argent, l'or, le platine...

D. Lixiviation du cuivre et préparation d'une solution de cuivre II :

21. Lixiviation acide : action d'un acide fort sur un minerai pour le solubiliser.

22. $\text{Cu(OH)}_2 + 2 \text{H}_3\text{O}^+ = \text{Cu}^{2+} + 4 \text{H}_2\text{O}$ est une combinaison linéaire de



$$\text{Et } K_{\text{lix}}^\circ = [\text{Cu}^{2+}] / [\text{H}_3\text{O}^+]^2 = K_{s2} / K_e^2 = 10^{-20} / 10^{-28} = 10^8 = K_{\text{lix}}^\circ$$

23. On veut $[\text{Cu}^{2+}] \geq 1 \text{ mol/L}$ donc $[\text{H}_3\text{O}^+] \geq 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ soit $\text{pH} < 4$.

24. Pour $\text{pH} < 4$ on est dans le domaine de prédominance de SO_4^{2-}

D'après les données 1ère acidité forte

2è acidité faible : $\text{HSO}_4^- = \text{H}^+ + \text{SO}_4^{2-}$ donc $[\text{H}^+] = h$ et $[\text{SO}_4^{2-}] = C+h$ et $[\text{HSO}_4^-] = C-h$

$$K_{a2} = \frac{h(C+h)}{C-h}$$

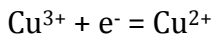
25. D'où $C = h(h+K_{a2}) / (K_{a2} - h)$ avec $K_{a2} \gg h$ soit $C = h$. Pour $\text{pH} < 4$ il faut donc que $C > 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

E. Détermination expérimentale de la composition d'une céramique supraconductrice :

26. Les ions Cu^{3+} peuvent réagir sur l'eau pour former O_2 et Cu^{2+} .

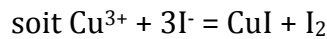
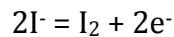
27. A froid, cinétique trop lente.

28. a. A chaud, les ions Cu^{3+} ont réagi avec l'eau pour se transformer en Cu^{2+} , on peut supposer que cette réaction est totale car Cu^{3+} et H_2O ont des domaines disjoints à $\text{pH} = 0$.

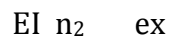
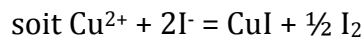
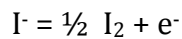
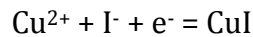


b. A froid, les ions Cu^{3+} ne réagissent pas, il y a donc Cu^{3+} et Cu^{2+} en solution.

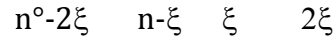
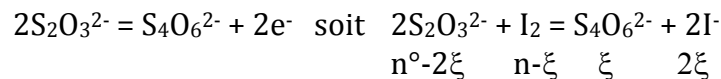
29. On peut écrire $\text{Cu}^{3+} + \text{I}^- + 2\text{e}^- = \text{CuI}$



Et



30. Réaction de dosage : $\text{I}_2 + 2\text{e}^- = 2\text{I}^-$



31. A l'équivalence $\xi_{\text{eq}} = n^\circ / 2 = c_1 V_{\text{eq}} / 2 = n$ quantité de I_2 formée ; c_1 = concentration de thiosulfate

A chaud tout le cuivre se trouve sous forme Cu^{2+} donc l'iode formé ne provient que de la réduction de Cu^{2+} : $n = (x + y) / 2 = c_1 V_{1\text{eq}} / 2$

A froid une partie de l'iode provient de la réduction de Cu^{3+} : y

L'autre partie de l'iode provient de la réduction de Cu^{2+} : $x/2$ donc $n = y + x/2 = c_1 V_{2\text{eq}} / 2$

On obtient donc le système : $x + y = c_1 V_{1\text{eq}}$ $x + 2y = c_1 V_{2\text{eq}}$

soit $y = c_1 (V_{2\text{eq}} - V_{1\text{eq}})$ et $x = c_1 (2V_{1\text{eq}} - V_{2\text{eq}})$

d'où $x/y = (2V_{1\text{eq}} - V_{2\text{eq}}) / (V_{2\text{eq}} - V_{1\text{eq}}) = (2 \cdot 26,7 - 35,6) / (35,6 - 26,7) = 2 = x/y$

Pour un ion Cu^{3+} il y a 2 ions Cu^{2+}

32. La céramique $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_n$ est électriquement neutre et la charge d'un ion oxyde étant de -2e, $2n = 3 + 2 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot 2$ en supposant que les 3 ions cuivre se répartissent en un ion Cu^{3+} et en deux ions Cu^{2+} , d'où $n = 7$.

Partie physique :

F. Création d'un champ magnétique intense à l'aide d'un solénoïde :

Résistance électrique d'un conducteur ohmique :

33. Le conducteur ohmique vérifie la loi d'Ohm locale $\vec{j}_e = \gamma \vec{E}$.

34. Par définition $I = j_e S$ et $U = E h = j_e h / \gamma$.

35. $R_\Omega = U/I = h / S \gamma$.

Caractéristiques de la bobine à haute température :

36. a. Sur une longueur L de bobinage et sur une couche il y a N spires telles que $L = Nd$ d'où $N/L = 1/d$

b. Sachant qu'il y a p couches, le solénoïde comporte p/d spires par unité de longueur.

37. a. Pour un solénoïde infini $B = \mu_0 p I / d$

NB : cette expression n'est pas exigible dans le programme actuel...

b. $p = Bd / \mu_0 I = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} / (4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 35) = 136$

38. a. Pour 1 spire : $2\pi R_{\text{moy}}$; Pour p couches : $p 2\pi R_{\text{moy}}$; Pour $N = L/d$ spires $L_{\text{fil}} = L p 2\pi R_{\text{moy}} / d$.

b. $AN : L_{\text{fil}} = 1,8 \cdot 136 \cdot 2\pi \cdot 0,5 / 3 \cdot 10^{-3} = 2,6 \cdot 10^5 \text{ m} = 260 \text{ km} !!!$

39. a. $R_{\text{elec}} = 4L_{\text{fil}} / (\gamma_{\text{Cu}} \cdot \pi d^2)$

b. $P_J = R_{\text{elec}} I^2$; $R_{\text{elec}} = 4 \cdot 2,6 \cdot 10^5 / (6 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2) = 606 \Omega$ et $P_J = 743 \text{ kW}$ pas mal

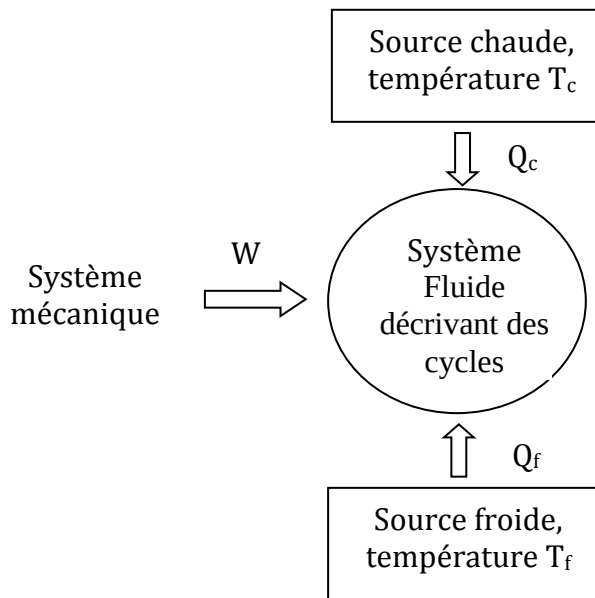
Caractéristique de la bobine refroidie à 77 K :

40. a. On veut $p' = Bd / \mu_0 I' = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} / (4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80) = 60$ couches.

b. $L'_{\text{fil}} = 1,8 \cdot 60 \cdot 2\pi \cdot 0,4 / 3 \cdot 10^{-3} = 9,0 \cdot 10^4 \text{ m} = 90 \text{ km}$

$R'_{\text{elec}} = 4 \cdot 9 \cdot 10^4 / (3,3 \cdot 10^8 \cdot \pi \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2) = 39 \Omega$; $P'_J = 250 \text{ kW}$

41. a. Machine ditherme réversible



D'après le premier principe, appliqué au fluide caloporteur qui décrit des cycles :

$$\Delta E = W + Q_c + Q_f = 0$$

D'après le second principe, appliqué au fluide décrivant des cycles réversibles:

$$\Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + \mathcal{S}_{\text{création}} = 0$$

Avec $\mathcal{S}_{\text{création}} = 0$.

La machine est un **réfrigérateur** $W > 0$, $Q_f > 0$ et $Q_c < 0$ son efficacité est

$$e_{\text{rév}} = \left| \frac{\text{gain}}{\text{dépende}} \right| = \left| \frac{Q_f}{W} \right| = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{-Q_c - Q_f} = \frac{1}{-1 + T_c / T_f} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

b. $AN : e_{\text{rév}} = 77 / (300 - 77) = 0,35$

42. On suppose que P' est la puissance mécanique reçue par le fluide caloporteur, P'_J est la puissance thermique dégagée par la source froide, c'est-à-dire la bobine qui doit se refroidir.

$e_{\text{rév}} = P'_J / P'$ soit $P' = P'_J / e_{\text{rév}} = 250 / 0,35 = 714 \text{ kW}$.

Commentaire : C'est beaucoup !

G. Puissance dissipée dans le supraconducteur lors des régimes transitoires :

43. I_c est obtenu lorsque toute la section du conducteur est parcourue par j_0 . $I_c = j_0 \pi R^2$.

Etude de la première montée du courant dans le supraconducteur :

44. $u = I_0 / I_c = I_0 / j_0 \pi R^2$

45. a. $I(t) = j_0 \pi (R^2 - r_1(t)^2)$

b. $I_0 t / T = j_0 \pi (R^2 - r_1(t)^2)$ d'où $r_1(t)^2 = R^2 - I_0 t / T j_0 \pi$

c. $r_1(t)^2 = R^2 (1 - ut/T)$ d'où $r_1(T) = R \sqrt{1 - u}$

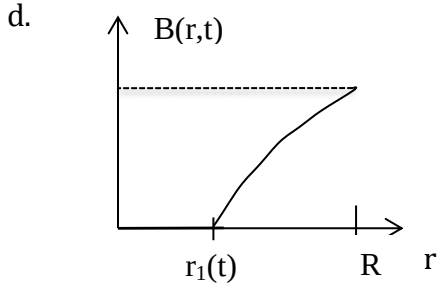
46. a. La distribution de courants qui crée le champ magnétique est invariante par rotation autour de Oz et par translation selon Oz, donc les coordonnées de B ne dépendent que de r, distance à l'axe z. Tout plan contenant l'axe z est un plan de symétrie de la distribution de courant, B étant un pseudovecteur il est perpendiculaire à ces plans. B est orthoradial.

$$\vec{B}(M,t) = B(r,t)\vec{u}_\theta$$

b. On applique le théorème d'Ampère sur un cercle C de rayon r : $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r,t) \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacés}}$

Si $r < r_1(t)$ alors $I_{\text{enlacés}} = 0$ donc **B = 0**

c. Si $r_1(t) < r < R$ alors $I_{\text{enlacé}} = j_0 \pi(r^2 - r_1(t)^2)$ et **$B(r,t) = \mu_0 j_0 (r^2 - r_1(t)^2) / 2r$**



47. a. MF : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ régit les phénomènes d'induction

découvert au 19^è S, relation explicitée par Maxwell au 19^è

b. Pour $r < r_1(t)$ B = 0 donc E = 0

c. Pour $r_1(t) < r < R$ et sachant que $\vec{E} = E(r,t)\vec{e}_z$,

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial E(r,t)}{\partial r} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 j_0}{r} r_1(t) \cdot \frac{dr_1(t)}{dt} \vec{e}_\theta \text{ d'où}$$

$$E(r,t) = -\mu_0 j_0 r_1(t) \cdot \frac{dr_1(t)}{dt} \ln(r) + \text{cst avec } E(r_1,t) = 0 \text{ cst} = \mu_0 j_0 r_1(t) \cdot \frac{dr_1(t)}{dt} \ln(r) \text{ soit}$$

$$E(r,t) = -\mu_0 j_0 r_1(t) \cdot \frac{dr_1(t)}{dt} \ln\left(\frac{r}{r_1(t)}\right)$$

En différenciant la relation obtenue en 45. b : $2r_1(t) \frac{dr_1}{dt} = -I_0 / T j_0 \pi$ on trouve

$$E(r,t) = \mu_0 \frac{I_0}{2T\pi} \ln\left(\frac{r}{r_1(t)}\right) \text{ cqfd}$$

48. E est exprimé en V.m⁻¹.

Pour mesurer E(R,t) à l'aide d'un oscilloscope, il faut mesurer une différence de potentiel entre le cœur du supraconducteur où E = 0 et l'extérieur où E(R)...

Comme

$$E(R,t) = -\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_R - \left(\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)_R$$

le potentiel vecteur nous embete un peu...

sinon je mettrais plutôt deux électrodes à la surface du supra, et je dériverais la tension observée.

49. La densité volumique locale de puissance instantanée dissipée par le supraconducteur est donnée par $p_V(r,t) = \vec{j}_e(r,t) \cdot \vec{E}(r,t)$.

a. si $r < r_1(t)$ alors $p_V(r,t) = 0$

b. si $r_1(t) < r < R$ alors $p_V(r,t) = j_0 \mu_0 \frac{I_0}{2T\pi} \ln\left(\frac{r}{r_1(t)}\right)$

$$50. P_{\text{élec}}(t) = \int_{\text{tout l'espace}} p_V(r,t) d\tau = \int_{r_1(t)}^R j_0 \mu_0 \frac{I_0}{2T\pi} \ln\left(\frac{r}{r_1(t)}\right) 2\pi r dr L_{\text{supra}} = j_0 \mu_0 \frac{I_0}{T} L_{\text{supra}} \int_{r_1(t)}^R \ln\left(\frac{r}{r_1(t)}\right) r dr$$

En utilisant la primitive donnée dans l'énoncé

$$P_{\text{élec}}(t) = j_0 \mu_0 \frac{I_0}{T} L_{\text{supra}} \left[\frac{r^2}{2} \ln\left(\frac{r}{r_1(t)}\right) - \frac{r^2}{4} \right]_{r_1(t)}^R = j_0 \mu_0 \frac{I_0}{T} L_{\text{supra}} \left(\frac{R^2}{2} \ln\left(\frac{R}{r_1(t)}\right) - \frac{R^2}{4} + \frac{r_1(t)^2}{4} \right)$$

Avec $j_0 = I_0 / \pi R^2$ (question 44) et $r_1(t)^2 = R^2 (1 - ut/T)$ (question 45.c)

$$P_{\text{elec}}(t) = \mu_o \frac{I_o^2}{2Tu\pi R^2} L_{\text{supra}} \left(\frac{R^2}{2} \ln \left(\frac{1}{1-ut/T} \right) - \frac{uR^2}{4T} t \right) = -\mu_o \frac{I_o^2}{2Tu\pi} L_{\text{supra}} \left(\ln(1-ut/T) + \frac{u}{2T} t \right)$$

$$51.a. Q = \int_0^T P_{\text{elec}}(t) dt = -\mu_o \frac{I_o^2}{2Tu\pi} L_{\text{supra}} \int_0^T \left(\ln(1-ut/T) + \frac{u}{2T} t \right) dt$$

En utilisant la primitive donnée dans l'énoncé avec $\alpha = u/T$

$$Q = -\mu_o \frac{I_o^2}{2Tu\pi} L_{\text{supra}} \left[\frac{(1-ut/T) - (1-ut/T) \ln(1-ut/T)}{u/T} + \frac{u}{2T} \frac{t^2}{2} \right]_0^T =$$

$$-\mu_o \frac{I_o^2}{2Tu\pi} L_{\text{supra}} \left(\frac{(1-u) - (1-u) \ln(1-u)}{u/T} + \frac{u}{2T} \frac{T^2}{2} - \frac{1}{u/T} \right) = \mu_o \frac{I_o^2}{2u^2\pi} L_{\text{supra}} \left(u + (1-u) \ln(1-u) - \frac{u^2}{4} \right)$$

$$Q = \mu_o \frac{I_o^2}{2\pi} L_{\text{supra}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{u} + \frac{(1-u)}{u^2} \ln(1-u) \right)$$

b. L'énergie dissipée ne dépend pas de T, il n'est donc pas utile d'augmenter cette valeur.

52. Q est le transfert thermique dissipée par la source froide à 4,2 K, on reprend l'expression de l'efficacité de la question 42 avec des transferts thermiques $Q_{\text{amb}} = Q/e =$

$$\frac{1}{1,5 \cdot 10^{-3}} 2 \cdot 10^{-7} * 445^2 * 14000 * \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{0,7} + \frac{(1-0,7)}{0,7^2} \ln(1-0,7) \right) = 1,6 \cdot 10^5 \text{ J} = \mathbf{160 \text{ kJ} = Q_{\text{amb}}}$$

...valeur non négligeable.

H. Stabilité thermique des filaments supraconducteurs :

Equation de la diffusion thermique en régime permanent

53. Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = j_Q \vec{e}_z = -k \overrightarrow{\text{grad}T}$ avec $\vec{j}_Q$ en W.m^{-2} .

54. Appliquons le 1er principe de la thermodynamique au système immobile de l'énoncé pendant la durée dt : $dE = E(t+dt) - E(t) = 0 = \delta Q$ car l'énergie E du système en régime permanent ne varie pas.

$$\delta Q = \delta Q(z) - \delta Q(z+dz) + \sigma_V S dz dt = 0,$$

où $\delta Q(z)$ est la chaleur entrant dans le système par conduction à l'abscisse z pendant dt et $\delta Q(z+dz)$ est la chaleur sortant du système par conduction à l'abscisse z+dz pendant dt.

$$\delta Q_{\text{cond}} = j_Q S dt, \text{ d'où } j_Q(z) - j_Q(z+dz) + \sigma_V dz = 0 \quad -\frac{dj_Q}{dz} + \sigma_V = 0 \text{ avec la loi de Fourier}$$

$$k \frac{d^2 T}{dz^2} = -\sigma_V \text{ cqfd}$$

Application au supraconducteur :

55. a. La dissipation de puissance dans la Zone normale est l'effet Joule.

$$b. P_J / S dz = \sigma_V = j_o \cdot E = j_o^2 \cdot \rho_n$$

56. Pour $-3L/2 < z < -L/2$ le profil de température est linéaire croissant car dans la zone supraconductrice il n'y a pas de production de chaleur, car pas de résistance électrique et l'équation de la chaleur est $\frac{d^2 T}{dz^2} = 0$. La chaleur produite dans la zone normale diffusion par conduction vers le milieu supraconducteur.

57. La puissance produite dans la zone normale par effet Joule est $P_{\text{diss}} = \sigma_V SL$.

58. a. j_{Q1} est donné par la loi de Fourier dans la zone supraconductrice $[-3L/2 ; -L/2]$:

$$\vec{j}_{Q1} = -k \overrightarrow{\text{grad}T} = -k \frac{T_o - T_c}{-3L/2 + L/2} \vec{e}_z = -k \frac{T_c - T_o}{L} \vec{e}_z$$

b. j_{Q2} est donné de même par la loi de Fourier dans la zone supraconductrice $[L/2 ; 3L/2]$:

$$\vec{j}_{Q2} = -k \overrightarrow{\text{grad}T} = -k \frac{T_o - T_c}{3L/2 - L/2} \vec{e}_z = k \frac{T_c - T_o}{L} \vec{e}_z$$

59. D'où la puissance thermique sortant de la zone normale : $P_{th} = \vec{j}_{Q1} \cdot S(-\vec{e}_z) + \vec{j}_{Q2} \cdot S\vec{e}_z = 2k \frac{T_c - T_o}{L} S$.

60. a. La puissance produite par effet Joule P_{diss} dans la zone normale doit intégralement diffuser par conduction vers les zones supraconductrices donc $P_{diss} = P_{th}$ pour $L = L_{max}$ d'où $\sigma_v S L_{max} = 2k \frac{T_c - T_o}{L_{max}} S$

$$\text{soit } L_{max}^2 = 2k \frac{T_c - T_o}{\sigma_v}.$$

$$\text{b. AN : } \sigma_v = \rho_n j_o^2 ; L_{max}^2 = 2k \frac{T_c - T_o}{\rho_n j_o^2} = 2 * 0,3 \frac{6,5 - 4,2}{4.10^{-7} * 10^{18}} \text{ soit } L_{max} = 1,9 \mu m$$

c. d'où des filaments submicroniques qui permettent d'absorber spontanément l'énergie dissipée lorsqu'une perturbation fait passer la température d'un morceau du filament supraconducteur au-dessus de sa température critique...