

Première Partie: Récupération d'énergie thermique dans la chausséeA/ Dimensionnement des aquifères

A.1 $\vec{j}_q = -\lambda \text{grad} T$ $\vec{j}_q = j_q(r) \vec{e}_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$

A.2 $\Phi(r) = \iint \vec{j}_q \cdot \vec{e}_r dS = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2$

A.3 On applique le 1^{er} principe à la coquille sphérique pendant dt : $C \cdot dT = [\Phi(r) - \Phi(r+dr)] dt$

en régime permanent $\frac{dT}{dt} = 0$ donc $\Phi(r) = \Phi(r+dr) = \Phi$

A.4 on a donc $dT = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda_{\text{terre}}} \frac{dr}{r^2}$

$$\int_{T_E}^{T_S} dT = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda_{\text{terre}}} \int_{R_a}^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$T_S - T_E = \frac{\Phi}{4\pi\lambda_{\text{terre}}} \left(-\frac{1}{R_a}\right) \text{ soit } \boxed{\Phi = 4\pi\lambda_{\text{terre}} R_a (T_E - T_S)}$$

A.5 On applique maintenant le 1^{er} principe à l'aquifère pendant un temps dt :

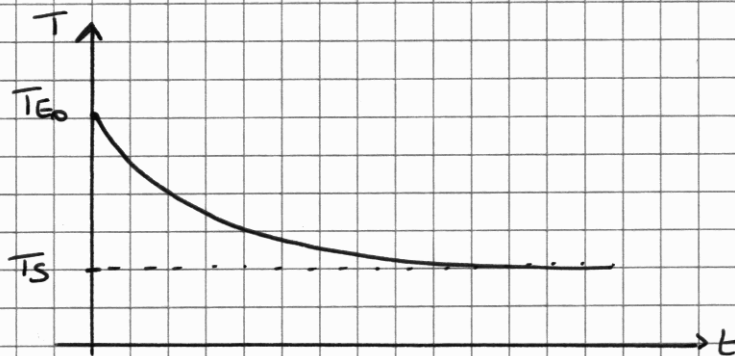
$$P_{\text{eau}} \cdot \frac{4}{3}\pi R_a^3 \cdot C_{\text{eau}} dT_E = -\Phi dt = -4\pi\lambda_{\text{terre}} R_a (T_E - T_S) dt$$

soit $\boxed{\frac{dT_E}{dt} + \frac{T_E}{\tau} = \frac{T_S}{\tau}}$

avec $\boxed{\tau = \frac{P_{\text{eau}} \cdot C_{\text{eau}} \cdot R_a^2}{3 \lambda_{\text{terre}}}}$

A.6 $T_E = T_S + A e^{-\frac{t}{\tau}}$ $T_E(0) = T_S + A = T_{E0}$

$$\boxed{T_E(t) = T_S + (T_{E0} - T_S) e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



A.7 $T_{\text{Eo}} - T_{\text{E}}(t_H) < \Delta T$ si $T_{\text{Eo}} - T_{\text{S}} - (T_{\text{Eo}} - T_{\text{S}}) e^{-\frac{t_H}{\tau}} < \Delta T$

soit $\tau > \frac{-t_H}{\ln\left(1 - \frac{\Delta T}{T_{\text{Eo}} - T_{\text{S}}}\right)}$

A.8 $\tau \geq \frac{-95 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}{\ln\left(1 - \frac{1}{24 - 16}\right)} = \underline{11,8 \cdot 10^7 \text{ s}}$

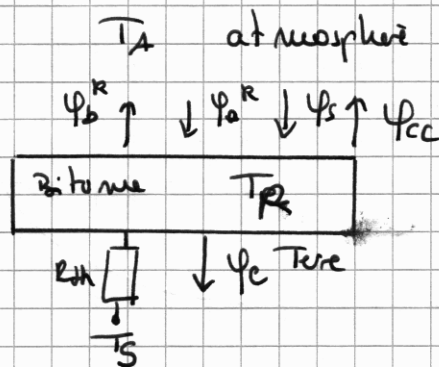
$R_{\text{a, limite}} = \left(\frac{3 \cdot d_{\text{Terre}} \cdot \tau}{\rho_{\text{eau}} \cdot c_{\text{eau}}} \right)^{1/2} = \underline{9,2 \text{ m}}$

A.9 il faut remplacer $\rho_{\text{eau}} c_{\text{eau}}$ par $\rho_{\text{eau}} c_{\text{eau}} + \rho_{\text{vire}} c_{\text{vire}}$
soit $4 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$ par $5 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$

soit $R_{\text{a, limite}}' = R_{\text{a, limite}} \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} = \underline{8,2 \text{ m}}$

B) Etude thermique de la chaussée durant l'été

B.1



B.2 $\varphi^R = \sigma T^4$

B.3 $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$ et $T_R - T_S = R_{th} \cdot \varphi_c S = \frac{L}{\lambda S} \varphi_c S$

soit $\boxed{\varphi_c = \frac{\lambda (T_R - T_S)}{L}}$

B.4 En régime permanent: $\varphi_a^R + \varphi_s = \varphi_b^R + \varphi_{cc} + \varphi_c$

soit $\sigma T_A^4 + \varphi_s = \sigma T_R^4 + h(T_R - T_A) + \frac{\lambda}{L} (T_R - T_S)$

B.5, $\varphi_b^R - \varphi_a^R = \sigma (T_R^4 - T_A^4) = \sigma (T_R^2 + T_A^2)(T_R + T_A)(T_R - T_A)$

si $T_A \approx T_R$ $\varphi_b^R - \varphi_a^R = 4\sigma T_A^3 (T_R - T_A)$

B.6 Dans ces conditions $\varphi_s = 4\sigma T_A^3 (T_R - T_A) + h(T_R - T_A) + \frac{\lambda}{P} (T_R - T_s)$

d'où
$$T_R = \frac{\varphi_s + 4\sigma T_A^4 + hT_A + \frac{\lambda}{P} T_s}{4\sigma T_A^3 + h + \frac{\lambda}{P}}$$

B.7 $\varphi_s = 400 \text{ W.m}^{-2}$

$4\sigma T_A^4 = 4 \cdot 5,7 \cdot 10^{-8} \cdot 300^4 = 1,85 \cdot 10^3 \text{ W.m}^{-2}$

$hT_A = 10 \cdot 300 = 3 \cdot 10^3 \text{ W.m}^{-2}$

$\frac{\lambda}{P} T_s = \frac{1 \cdot 290}{10} = 29 \text{ W.m}^{-2}$

$4\sigma T_A^3 = 6,2 \cdot \text{W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

$h = 10 \cdot \text{W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

$\frac{\lambda}{P} = 91 \cdot \text{W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

on peut négliger la conduction vers la Terre

et $T_R \approx \frac{\varphi_s + T_A(4\sigma T_A^3 + h)}{4\sigma T_A^3 + h} = T_A + \frac{\varphi_s}{4\sigma T_A^3 + h}$

B.8 $T_R = 300 + \frac{400}{6,2 + 10} = 324,7 \text{ K}$

B.9 le bilan devient: $\varphi_a^R + \varphi_s = \varphi_b^R + \varphi_{ec} + \varphi_c + \varphi_e$

avec les hypothèses précédentes: on néglige φ_c

et $\varphi_b^R - \varphi_a^R = 4\sigma T_A^3 (T_R - T_A)$

alors $\varphi_e = \varphi_s - 4\sigma T_A^3 (T_R - T_A) - h(T_R - T_A)$ (si $T_R = T_c$)

$\varphi_e = 400 - 6,2(324,7 - 300) - 10(324,7 - 300)$

$\varphi_e = 448,6 \cdot \text{W.m}^{-2}$

B.10 equation de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ D en $m^2 \cdot s^{-1}$

ordre de grandeur de $\tau \approx \frac{e^2}{D} = 5000 s$.

T_R varie très peu dans le temps. l'hypothèse est valable.

C/ Principe et dimensionnement de l'installation

C.1 $P = 10 \cdot 10^4 = 10^5 W$

on doit avoir $P = 480 \cdot S$ soit $S = 222 m^2$

on trouve 2 fois moins que la valeur donnée.

Il y a des pertes dans le stockage.

C.2 A cause des pertes vers l'extérieur.

C.3 $E_T = P \cdot t_H = 10^5 \cdot 0,5 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 1,6 \cdot 10^{12} J$

C.4 $E_T = \rho_{eau} \cdot V \cdot c_{eau} (T_c - T_f)$

d'où $V = \frac{E_T}{\rho_{eau} \cdot c_{eau} (T_c - T_f)} = \frac{1,6 \cdot 10^{12}}{1,0 \cdot 10^3 \cdot 4,2 \cdot 10^3 \cdot 16} = 23,5 \cdot 10^3 m^3$

le rayon $R'_{a, min} = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3} = 17,8 m$

c'est 2 fois plus que le rayon trouvé à la partie A.

debit moyen : $D = 5,4 m^3 \cdot h^{-1}$ (très inférieur à la valeur annoncée.)

C.5 oui c'est une pompe à chaleur l'hiver

source chaude : l'aquifère

source froide : l'appartement

et refroidir l'appart en été donc c'est une machine frigorifique.

C.6 T_R constante, pas de gelée, pas d'usure...

C.7 Résistance au passage des poids lourds?

Deuxième Partie: Machine de Wehner et Schulze

2) Mesure du coefficient de frottement

D.1 : voir annexe

D.2 : frottement de glissement: $fN = T$ $\vec{T} = -fN\vec{e}_\theta$
s'oppose au glissement

D.3 Théorème de la résultante dynamique pour la tête de mesure:
 $m\vec{a}_G = 3\vec{N} + 3\vec{T} + m\vec{g}$ (contact par les 3 patins)

sur l'axe Oz : $0 = +3N - mg$

$$\text{soit } \boxed{N = \frac{mg}{3}}$$

$$\boxed{T = \frac{fmg}{3}}$$

D.4 $M_{\vec{T}, O_3} = \vec{r}_{T, O_3} \cdot \vec{e}_3$ or $M_{\vec{T}, O_3} = \vec{OC} \wedge \vec{T} = r_m \vec{e}_r \wedge -T\vec{e}_\theta$
 $= -T r_m \vec{e}_3$

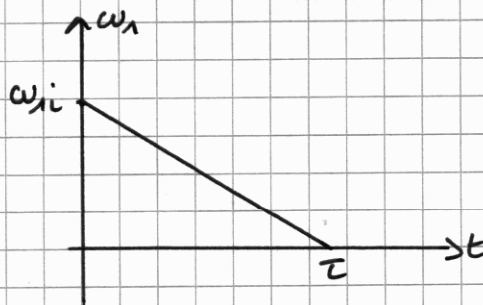
$$\text{d'où } \boxed{M_{\vec{T}, O_3} = -\frac{fmg r_m}{3}}$$

D.5 $\omega_{1,i} = \frac{v_{C1, O_1}}{r_m} = \frac{10000^3}{3600 \cdot 90 \cdot 10^3} = \underline{309 \text{ rad.s}^{-1}}$

D.6 On applique le théorème du moment dynamique en O à la tête de mesure, projeté sur Oz :

$$J_z \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = 3 \cdot M_{\vec{T}, O_3} = -fmg r_m$$

D.7 $\omega_1(t) = \omega_{1,i} - \frac{fmg r_m}{J_z} t = \omega_{1,i} - \frac{2fg r_m}{R^2} t$



D.8 $\tau = \frac{R^2 \omega_{1,i}}{2fg r_m}$

ne dépend pas de la masse m , mais du nombre de patins.

Document-réponse « Mécanique », à compléter et rendre avec la copie

Figure D : Tête de mesure du coefficient de frottement (un seul patin est représenté)

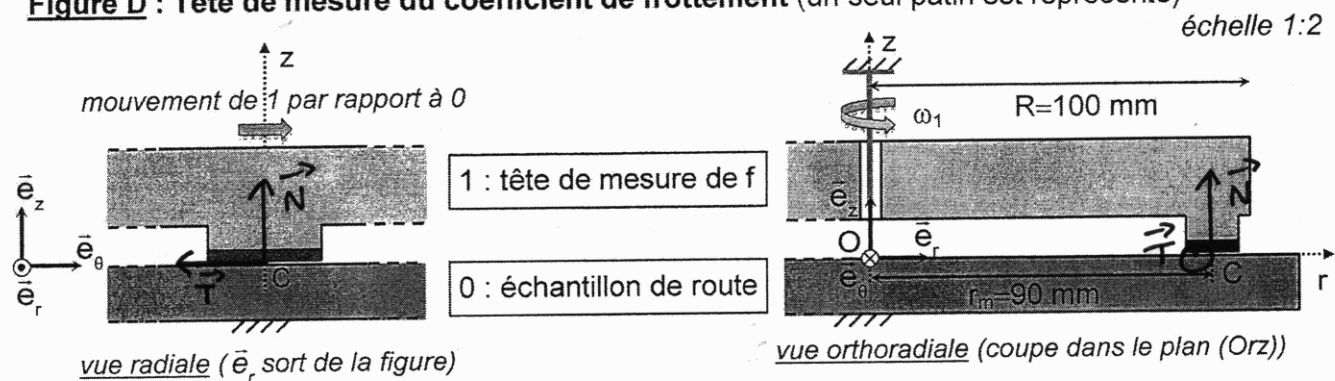
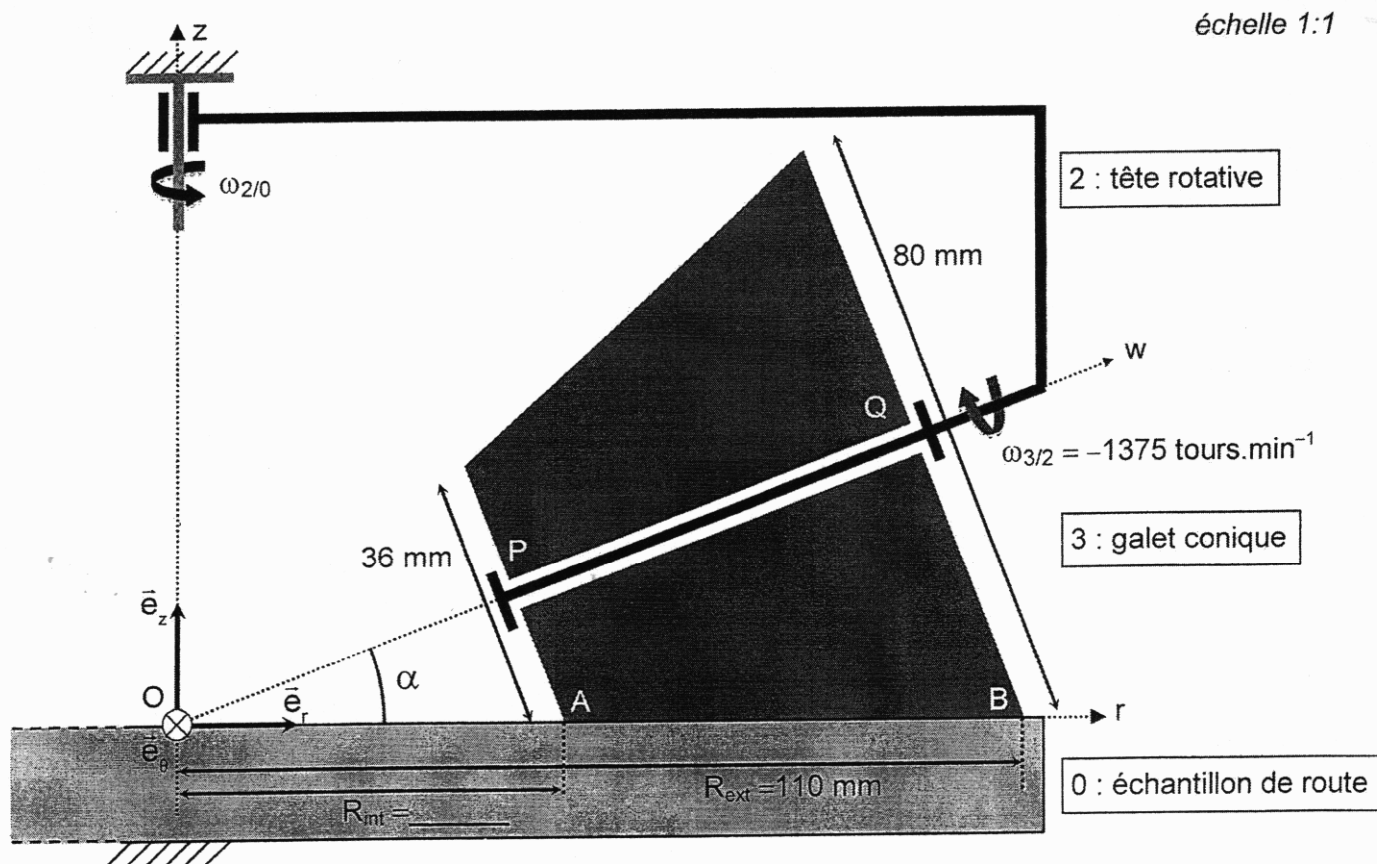


Figure E : Détail d'un galet de la tête de polissage (la tête rotative est simplement schématisée)



Tournez la page S.V.P.

(B)

D.9 $f = \frac{R^2 \omega_i}{2 \pi g r_m} = \frac{(10 \cdot 10^2)^2 \cdot 309}{2 \cdot 4,2 \cdot 9,8 \cdot 90 \cdot 10^{-3}} = 0,4$ (grande valeur) ⑥

D.10 Erreur dans l'énéré ?

Le disque subit τ_0 et $-3\tau_{1,03}$ donc si on le maintient en équilibre $\tau_0 = 3\tau_{1,03} = -fmg r_m$

soit $f = \frac{|\tau_0|}{mg r_m}$

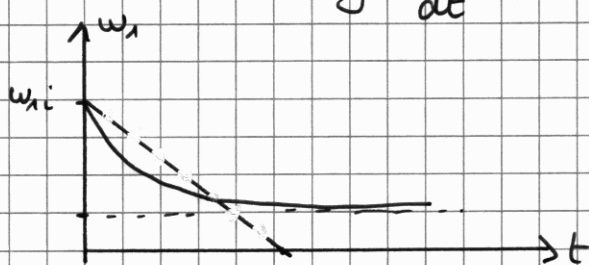
D.11. si $v_c < 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ f décroît rapidement avec v_c

si $20 < v_c < 95 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ f a un comportement affine
 $f = -a \cdot v_c + b$

si v entre 95 et 100 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ f varie de façon oscillante.

D.12 pour $f = 0,40$ on est dans la partie linéaire $f = -a \omega_i + b$

d'où $J \frac{d\omega_i}{dt} = -k \cdot \omega_i + cte$



D.13 $\theta_p = \frac{b}{r_m} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{90 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{3} \text{ rad} = 19^\circ$

$P_A = \frac{N}{S} = \frac{mg}{3 \left(\frac{r_2^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} \right) \theta_p} = \frac{26 \cdot 9,8}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot ((97 \cdot 10^{-3})^2 - (83 \cdot 10^{-3})^2)} = 2,0 \text{ bar}$

D.14 On découpe le patin en élément de surface $ds = r dr d\theta$ autour du point P

$d\vec{T} = -f \cdot P_A ds \vec{e}_\theta$

$d\vec{M}_{1,0} = \vec{OP} \wedge d\vec{T} = -f P_A r^2 dr d\theta \vec{e}_z$

$$M'_{T,O_3} = -f P_A \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr \int_0^{\theta_p} d\theta = -f \theta_p \cdot \frac{P_A}{3} [r_2^3 - r_1^3]$$

D.15 $\frac{M'_{T,O_3} - M_{T,O_3}}{M'_{T,O_3}} \approx 1$ donc $M_{T,O_3} \ll M'_{T,O_3}$

le modèle précédent sous estime beaucoup le moment de la force de contact.

E/ Polissage de l'échantillon.

E.1. $\sin \alpha = \frac{40}{110}$ donc $\alpha = 0,37 \text{ rad} = 21^\circ$

$\sin \alpha = \frac{18}{R_{int}}$ donc $R_{int} = 49,5 \text{ mm}$

et $R_{moy} = 79,8 \text{ mm}$

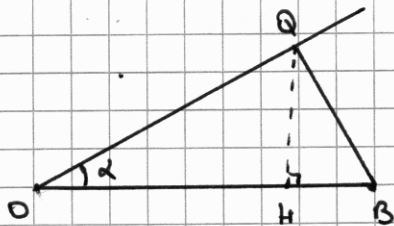
E.2 $\vec{v}_{A \in 3/2} = \vec{v}_{P \in 3/2} + \vec{AP} \wedge \vec{\omega}_{3/2} = (\vec{AO} + \vec{OP}) \wedge \vec{\omega}_{3/2}$
 $= \vec{AO} \wedge \vec{\omega}_{3/2} = -R_{int} \vec{e}_r \wedge \omega_{3/2} (\cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_\theta)$
 $\vec{v}_{A \in 3/2} = R_{int} \cdot \omega_{3/2} \sin \alpha \vec{e}_\theta$

$\vec{v}_{A \in 3/0} = R_{int} \cdot \omega_{2/0} \vec{e}_\theta$

E.3 le galet roule sans glisser donc $\vec{v}_{A \in 3/2} - \vec{v}_{A \in 3/0} = \vec{0}$

soit $\omega_{2/0} = \omega_{3/2} \sin \alpha$

E.4 $\omega_{2/0} = -500 \text{ tours/min} = 52,4 \text{ rad.s}^{-1}$



$v_{Q \in 2/0} = OQ \cdot \omega_{2/0} = \frac{BQ}{\sin \alpha} \cos^2 \alpha \cdot \omega_{2/0}$

$v_{Q \in 2/0} = BQ \cdot \omega_{2/0} \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) = 5,0 \text{ m.s}^{-1}$

durée du polissage : $\Delta t = \frac{m}{\omega_{2/0}} = \frac{9 \cdot 10^4}{500} = 180 \text{ min} = 3 \text{ heures}$

E.5

$$\vec{v}_{Be3/2} = R_{\alpha} \omega_{3/2} \sin \alpha \vec{e}_0$$

$$\vec{v}_{Be3/6} = R_{\alpha} \omega_{3/6} \vec{e}_0$$

} on retrouve la même chose. (8)

E.6

si l'axe était horizontal, l'usure ne serait pas la même en A et B.

on aura $\alpha = 0 \dots$