

Composition de Physique (XULRC)

Centrale inertielle

I. Étude d'un accéléromètre pendulaire

1. Considérons le mouvement d'un bras de longueur $\ell = 60$ cm qui effectue un demi-tour en une durée $\tau = 0,5$ s (mouvement rapide). Il lui correspond une vitesse moyenne $v_{moy} = \frac{v_{moy}}{\tau} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Si l'on considère qu'en fin de parcours, le bras est freiné de v_{moy} à 0 en $\tau' = 0,1$ s, l'accélération finale est de l'ordre de $a_{rapide} \simeq 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 4g$. Si l'on double les durées pour décrire un mouvement lent, on obtient le quart de la valeur précédente, soit $a_{lent} \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = g$. On se situe donc dans les intervalles précisés par la fiche constructeur. Les mesures effectuées sur des volleyeurs montrent que leur bras peuvent atteindre une accélération de l'ordre de $20g$ lors de la frappe du ballon !
2. Le boîtier peut être considéré comme formant un référentiel non galiléen en translation par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$, d'accélération $\vec{a}(t)$. Ainsi, l'équation du mouvement de la masse m dans ce référentiel est donnée par :

$$m\ddot{\vec{e}}_x = -kX\vec{e}_x - 2m\gamma\dot{X}\vec{e}_x - m\vec{a}(t).$$

Après projection et simplification, on obtient :

$$\ddot{X} + 2\gamma\dot{X} + \omega_r^2 X = -a(t).$$

3. Dans tous les cas, la solution particulière est $X_p = -\frac{a}{\omega_r^2}$. Le discriminant réduit de l'équation caractéristique associée à l'équation est $\delta = \gamma^2 - \omega_r^2$.
1^{er} cas : $\gamma < \omega_r \Rightarrow \delta < 0$. Les solutions s'écrivent :

$$X(t) = -\frac{a}{\omega_r^2} + \exp(-\gamma t) \left(A \cos \sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2} t + B \sin \sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2} t \right).$$

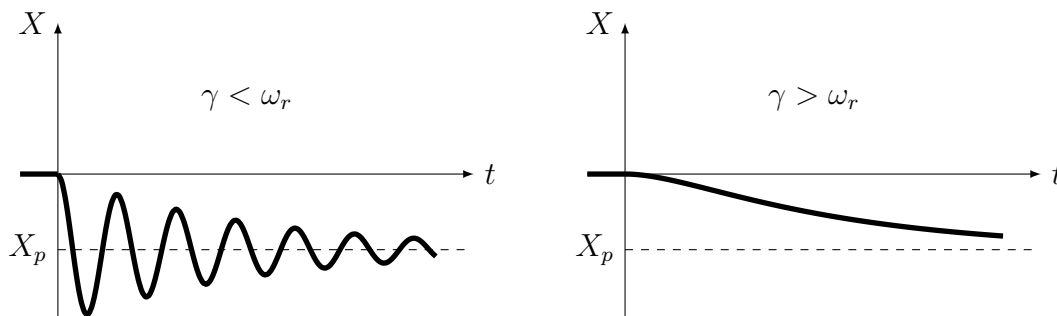
A et B sont les constantes d'intégration.

2^e cas : $\gamma > \omega_r \Rightarrow \delta > 0$.

$$X(t) = -\frac{a}{\omega_r^2} + A \exp \left(\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2} \right) t \right) + B \exp \left(\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2} \right) t \right).$$

4. Dans tous les cas, $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = -\frac{a}{\omega_r^2}$.

5. Les courbes sont tracées ci-dessous (X et $\dot{X}$ sont continues) :

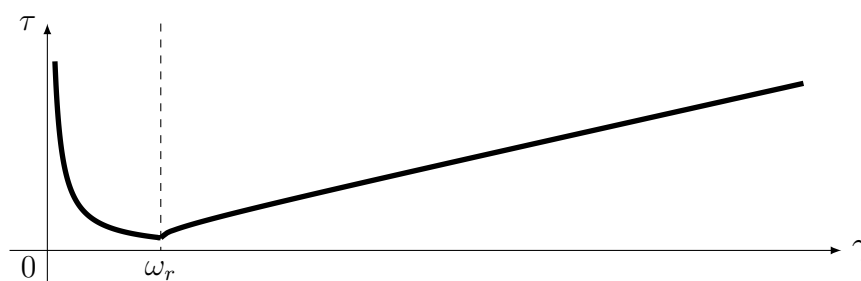


6. 1^{er} cas : oscillateur faiblement amorti. Le temps de réponse est $\tau = \frac{1}{\gamma}$.

2^e cas : oscillateur fortement amorti. Il y a *a priori* deux constantes, car il y a deux exponentielles décroissantes. Il faut considérer le temps de réponse le plus grand, puisque c'est celui qui décrira l'amortissement le plus lent.

Ainsi, $\tau = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}}$.

7. Il faut bien sûr séparer les différents cas, qui se rejoignent pour $\gamma = \omega_r$:



8. Le temps de réponse minimal est celui correspondant au régime critique $\gamma = \omega_r$. Il

vaut $\tau = \frac{1}{\omega_r}$.

9. On se trouve dans le cas pseudo-périodique, d'où $\tau = \frac{1}{\gamma} = 100 \mu\text{s}$. Le déplacement

stationnaire est, en valeur absolue, $X_p = \frac{a}{\omega_r^2} = 8 \text{ nm}$.

10. Le temps de réponse et la sensibilité caractérisée par X_p sont tous deux des fonctions **décroissantes** de la pulsation ω_r . Ainsi, un temps de réponse court est incompatible avec une grande sensibilité.

11. Le dispositif mesure la composante de la différence entre la pesanteur $\vec{g}$ et l'accélération $\vec{a}$ du boîtier sur $\vec{u}$, soit $\boxed{(\vec{g} - \vec{a}) \cdot \vec{u}}$.

II. Détection électrostatique

12. L'expression du champ électrique est $\boxed{E = \frac{U}{e + X}}$. Cette expression est obtenue, selon le modèle des armatures infinies et parallèles, en considérant le potentiel entre les armatures dépendant uniquement de X . Les lignes de champs sont rectilignes et orthogonales aux armatures.
13. La capacité est inversement proportionnelle à la distance entre les armatures, d'où $\boxed{C_1 = C \frac{e}{e + X}}$ avec $\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}}$ où ε_0 est la permittivité du vide et S l'aire des armatures.
14. La charge Q de l'armature fixe crée un champ électrique égal à la moitié du champ total, soit $E_Q = \frac{U}{2(e + X)}$. Ce champ exerce sur la charge $-Q$ de l'armature mobile une force d'intensité $f = Q \frac{U}{2(e + X)}$. Comme $Q = C_1 U$, il vient $\boxed{f = \frac{1}{2} C U^2 \frac{e}{(e + X)^2}}$. Cette force est attractive, car exercée par deux charges de signes opposés.
15. L'intensité de la force est $\boxed{f = 50 \text{ nN}}$. Cette force engendre une accélération $a = \frac{f}{m} = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, soit $5g$, ce qui perturbe fortement la mesure. Celle-ci est donc impossible.
16. Le potentiel n'est pas perturbé par l'électrode de mesure neutre. Sa valeur est donnée par une fonction affine de X valant V_s pour $X = -e$ et $-V_s$ pour $X = e$ d'où $\boxed{V = -V_s \frac{X}{e}}$.
17. La force résultante est la différence (car forces opposées) entre les forces dues aux deux électrodes extrêmes. Sa composante sur l'axe OX est :

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{2} C \left(V_s + V_s \frac{X}{e} \right)^2 \frac{e}{(e + X)^2} + \frac{1}{2} C \left(-V_s + V_s \frac{X}{e} \right)^2 \frac{e}{(e - X)^2} \\ &= -\frac{1}{2} C V_s^2 \left(1 + \frac{X}{e} \right)^2 \frac{e}{(e + X)^2} + \frac{1}{2} C V_s^2 \left(-1 + \frac{X}{e} \right)^2 \frac{e}{(e - X)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La force résultante est nulle quel que soit } X}$.

Remarque : on obtient rapidement ce résultat en remarquant que les charges opposées portées par les deux faces de l'électrode mobile sont soumises au même champ électrique.

18. Le système de mesure n'exerce ici aucune force perturbant la grandeur accélération que l'on cherche à mesurer.

III. Accéléromètre vibrant

19. La force inertielle F_e est compensée par deux forces de tension opposées et égales en norme, $\pm F_e/2$, d'où l'expression de la différence de pulsation $\boxed{\delta\omega = \alpha F_e}$.

20. Contrairement aux accéléromètres pendulaires, la sensibilité ne dépend pas de l'amplitude du déplacement de la masse d'épreuve mais du terme α . Le déplacement de la masse y est plus faible, ce qui diminue le temps de réponse et permet une plus grande amplitude de mesure de l'accélération.

21. La vitesse d'un point de la lame à l'abscisse x est $\dot{y}(x, t) = -\omega Y(x) \sin(\omega t)$ d'où $E_c(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M}{L} \omega^2 Y^2(x) \sin^2(\omega t) dx$, soit $\boxed{E_c(t) = \frac{M\omega^2}{2L} \sin^2(\omega t) \int_0^L Y^2(x) dx}$.

22. La distance D séparant les centres de deux tranches voisines est donnée par $D = \sqrt{dx^2 + (y(x+dx) - y(x))^2}$ et l'allongement $\delta(x) = D - dx$. En développant au premier ordre $y(x+dx) = y(x) + \frac{\partial y}{\partial x} dx$, on obtient $\delta(x) = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - dx$. Pour les faibles flexions, l'angle de la tangente à la lame reste petit, ce qui est le cas pour une lame peu souple. L'expression précédente se simplifie donc selon : $\delta(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$.

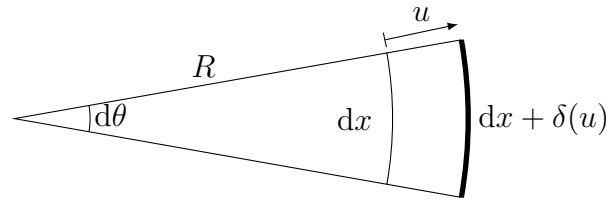
Ainsi, $\boxed{\delta(x, t) = \frac{1}{2} Y'^2(x) \cos^2(\omega t) dx}$. Pour la lame entière, il faut intégrer cette dernière entre 0 et L , soit $\boxed{\Delta(t) = \frac{1}{2} \cos^2(\omega t) \int_0^L Y'^2(x) dx}$.

23. L'allongement $\delta(x, t)$ d'une tranche s'effectue sous la tension extérieure T uniforme et constante. Le travail fourni par l'extérieur à la tranche est donc $\delta W = \delta(x, t) T$ d'où $dE_{\text{tension}} = \delta(x, t) T$. Pour la lame complète, $E_{\text{tension}}(t) = \Delta(t) T$, soit

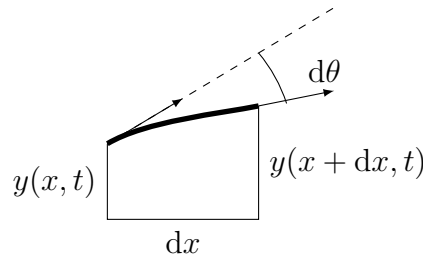
$$\boxed{E_{\text{tension}}(t) = \frac{1}{2} T \cos^2(\omega t) \int_0^L Y'^2(x) dx}.$$

24. Considérons une tranche horizontale d'ordonnée $y(x, t) + u$, $u \in [-h/2; h/2]$. Son allongement $\delta(u)$ est donné par $\delta(u) = (R+u)d\theta - dx = u d\theta$ puisque $dx = R d\theta$. Il correspond à cet allongement une énergie potentielle élastique de courbure $e_{\text{courbure}} = \frac{Eb}{2 dx} u^2 d\theta^2$, soit, pour l'élément de lame, $e_{\text{courb}} = \frac{1}{2} \kappa d\theta^2 \int_{-h/2}^{h/2} u^2 du$

ce qui donne : $\boxed{e_{\text{courbure}} = \frac{Eb h^3 d\theta^2}{24 dx}}$.



25. L'angle $d\theta$ est celui entre les deux tangentes en x et $x + dx$.



On obtient ainsi l'expression $d\theta = \arctan\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t)\right) - \arctan\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x, t)\right)$.

À l'ordre 1, $d\theta \simeq \frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \simeq \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$.

On en déduit $E_{\text{courbure}} = \frac{Ebh^3}{24} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx$ et $B = E \frac{bh^3}{12}$.

26. La somme des énergie cinétique, potentielle de tension et de courbure est conservée. Alors,

$$\frac{M\omega^2}{2L} \sin^2(\omega t) \int_0^L Y^2 dx + \frac{1}{2} \cos^2(\omega t) \left(T \int_0^L Y'^2 dx + B \int_0^L Y''^2 dx \right) = cte.$$

Pour que cette énergie mécanique soit une fonction constante, il faut que les termes en facteur des fonctions $\sin^2(\omega t)$ et $\cos^2(\omega t)$ soient égaux, d'où :

$$\frac{M}{L} \omega^2 \int_0^L Y^2 dx = T \int_0^L Y'^2 dx + B \int_0^L Y''^2 dx,$$

ce qui aboutit à $\omega^2 = \frac{BL \int_0^L Y''^2 dx}{M \int_0^L Y^2 dx} + T \frac{L \int_0^L Y'^2 dx}{M \int_0^L Y^2 dx}$. Les termes demandés sont :

$$\omega_0^2 = \frac{BL \int_0^L Y''^2 dx}{M \int_0^L Y^2 dx} \quad ; \quad \beta = \frac{L \int_0^L Y'^2 dx}{M \int_0^L Y^2 dx}$$

L'expression (1) est obtenue si $\beta T \ll \omega_0^2$. Dans ce cas, $\alpha = \frac{\beta}{2\omega_0}$.

Remarque : dans le cas où l'on peut négliger le terme de courbure et où l'onde est sinusoïdale stationnaire $Y(x) = Y_0 \cos(kx)$, il vient $\omega^2 = T \frac{L}{M} k^2$ qui est la relation de dispersion classique d'une onde transverse sur une corde, avec $c = \sqrt{TL/M}$.

27. Pour $Y(x) = Y_0(1 - \cos(2\pi x/L))$, $\int_0^L Y^2 dx = \frac{3}{2} Y_0^2 L$, $\int_0^L Y'^2 dx = \frac{2\pi^2}{L} Y_0^2$ et $\int_0^L Y''^2 dx = \frac{8\pi^4}{L^3} Y_0^2$. On en déduit $\omega_0 = 4\pi^2 \sqrt{\frac{B}{3ML^3}}$ et $\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3L}{MB}}$.

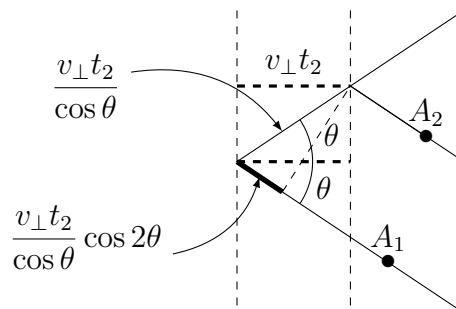
28. On calcule $f_0 = 2 \cdot 10^2 \text{ Hz}$ et $\alpha = 2 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{N}^{-1}$.

La tension exercée sur la lame est $T = 5 \cdot 10^{-5} \text{ N}$ ce qui fournit une variation de fréquence $\delta f = 1 \cdot 10^1 \text{ Hz}$ mesurable.

IV. Gyromètre laser

29. En cinématique classique, dans le référentiel du miroir, la célérité de l'onde perpendiculairement au miroir est $v_\perp + c \cos \theta$. La distance à parcourir, toujours perpendiculairement, est $d \cos \theta$ d'où $t_2 = \frac{d \cos \theta}{v_\perp + c \cos \theta}$.

30. À l'instant $t > t_2$, la point A_1 a parcouru la distance ct sur le premier rayon réfléchi, tandis que le point A_2 a parcouru la distance $c(t - t_2)$ sur le second rayon réfléchi. En terme de distance, le point A_1 est en retard de $v_\perp t_2 \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$. On en déduit $d' = ct_2 - v_\perp t_2 \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$, soit $d' = d \frac{c \cos \theta - v_\perp \cos 2\theta}{c \cos \theta + v_\perp}$.



31. On déduit du résultat précédent $\lambda' = \lambda \frac{c \cos \theta - v_\perp \cos 2\theta}{c \cos \theta + v_\perp}$.

32. La pulsation est donnée en fonction de la longueur d'onde par $\omega' = \frac{2\pi c}{\lambda'}$ d'où $\omega' = \omega_\ell \frac{c \cos \theta + v_\perp}{c \cos \theta - v_\perp \cos 2\theta} \simeq \omega_\ell \left(1 + \frac{v_\perp}{c \cos \theta}\right) \left(1 + \frac{v_\perp \cos 2\theta}{c \cos \theta}\right) = \omega_\ell \left(1 + \frac{v_\perp}{c} \frac{1 + \cos 2\theta}{\cos \theta}\right)$.

Comme $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$, on obtient $\boxed{\omega' \simeq \omega_\ell \left(1 + 2 \frac{v_\perp \cos \theta}{c}\right)}$.

- 33.** C'est l'effet Doppler-Fizeau, doublé car ici il y a réflexion et non émission seule. Cet effet est perçu lorsqu'un véhicule bruyant (ambulance, train, moto, ...) passe devant nous. Le son est plus aigu lorsque le véhicule s'approche et plus grave lorsqu'il s'éloigne. L'effet est utilisé par les radars routiers pour mesurer la vitesse des véhicules, ou en échographie Doppler pour mesurer le débit sanguin dans les vaisseaux.

- 34.** La réponse attendue est $\boxed{I_{\text{photodétecteur}} = \frac{I_0}{2}}$ puisqu'on perd la moitié de l'intensité initiale mais il ne s'agit que d'une valeur moyenne, obtenue lorsque la différence de marche varie uniformément. Il faut considérer l'action de la lame séparatrice, dont les coefficients (complexes) de réflexion ρ et de transmission τ en amplitude vérifient $|\rho|^2 + |\tau|^2 = 1$ et $\rho\tau^* + \rho^*\tau = 0$. Une solution symétrique est $\rho = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\tau = \frac{i}{\sqrt{2}}$. Le faisceau qui arrive dans le photodétecteur est la superposition des ondes d'amplitude ρ^2 et $\tau^2 = -\rho^2$. En l'absence de différence de marche, l'amplitude totale est nulle. En revanche, l'amplitude de l'onde totale se dirigeant vers le laser source est $2\rho\tau = -i$, ce qui fournit l'intensité initiale I_0 .

- 35.** La lame semi-réfléchissante est la seule qui possède une vitesse orthogonale à son plan. C'est donc uniquement sur elle que l'effet Doppler-Fizeau se manifeste.

- 36.** L'onde trigonométrique se réfléchit sur la lame selon l'angle $\theta = \pi/4$. La vitesse normale est $v_\perp = \frac{a\sqrt{2}}{2}\Omega$, d'où $\boxed{\omega_t = \omega_\ell \left(1 + \frac{a\Omega}{c}\right)}$. L'onde anti-trigonométrique traverse la lame. Elle ne subit pas l'effet Doppler-Fizeau, donc $\boxed{\omega_a = \omega_\ell}$.

- 37.** Le chemin optique vaut $4a$ dans les deux cas. Le déphasage φ est donné par $\varphi = \frac{\omega}{c}4a$ d'où $\boxed{\varphi_t = \frac{4\omega_\ell a}{c} \left(1 + \frac{a\Omega}{c}\right)}$ et $\boxed{\varphi_a = \frac{4\omega_\ell a}{c}}$. On en déduit $\boxed{\varphi_t - \varphi_a = \frac{4\omega_\ell a^2 \Omega}{c^2}}$.

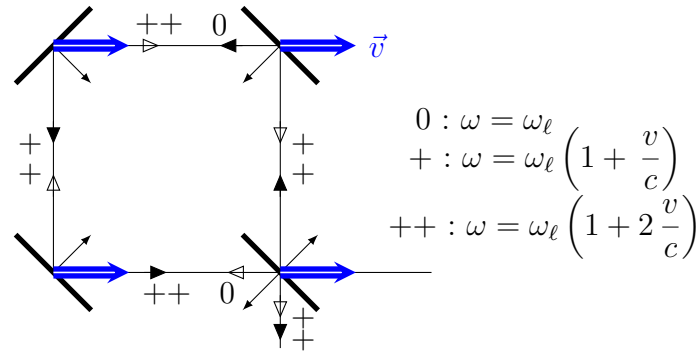
- 38.** L'onde trigonométrique se réfléchit une seconde fois sur la lame semi-réfléchissante mais cette fois-ci la vitesse normale a changé de signe. Ainsi,

$$\omega'_t = \omega_\ell \left(1 + \frac{a\Omega}{c}\right) \left(1 - \frac{a\Omega}{c}\right) = \omega_\ell \left(1 - \left(\frac{a\Omega}{c}\right)^2\right) \simeq \omega_\ell$$

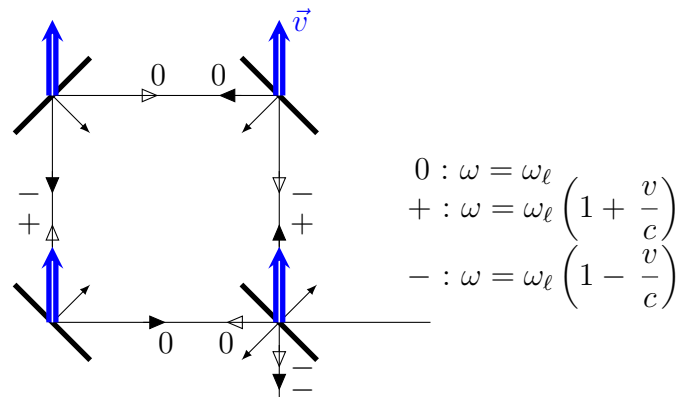
au premier ordre en $a\Omega/c$. L'onde anti-trigonométrique ne change pas de fréquence puisqu'elle traverse deux fois la lame. L'intensité mesurée est donc le résultat de l'interférence entre les deux ondes déphasées de $\varphi_t - \varphi_a = \frac{8\pi a^2 \Omega}{\lambda c}$, soit (les deux ondes

interfèrent en opposition de phase dans le cas $\Omega = 0$) : $\boxed{I = \frac{I_0}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{8\pi a^2 \Omega}{\lambda c}\right)\right)}$.

39. Il faut montrer que les effets Doppler-Fizeau se compensent sur les deux faisceaux trigonométrique et anti-trigonométrique. Pour cela, considérons, comme le suggère l'énoncé, une vitesse de translation selon $\vec{e}_x$, $\vec{v} = v \vec{e}_x$.



Les fréquences sont modifiées lors des réflexions sur la lame et sur les miroirs, selon le schéma ci-dessus. On remarque que les deux faisceaux auront parcouru des chemins de même longueur à la même fréquence, il n'y a donc pas de différence de phase. On peut faire un schéma équivalent pour une vitesse selon $\vec{e}_y$, avec le même résultat :



Comme le calcul du déphasage est linéaire en $\vec{v}$ au premier ordre, il n'y a aucun effet mesurable, à cet ordre, de la translation du dispositif. Le principe de relativité restreinte impose d'ailleurs que l'effet soit absent à tout ordre.

40. La fibre optique a l'avantage de permettre de cumuler plusieurs tours du dispositif. La limitation vient de l'absorption de la lumière par la fibre mais actuellement il est possible de guider la lumière sur plusieurs kilomètres. Dans le cas de N tours, chacun enlaçant une aire S , l'expression de la différence de phase est : $\varphi_t - \varphi_a = \frac{4\omega_\ell N S \Omega}{c^2}$.

41. L'application numérique fournit $\varphi_t - \varphi_a = 5 \text{ rad}$ ce qui est facilement mesurable.

Toute remarque peut m'être envoyée à l'adresse mventuri@club.fr