

À propos de l'émission de lumière

Solution proposée par JR Seigne MP,
avec la collaboration de M Libourel Sciences Industrielles pour l'Ingénieur MP*,
Clemenceau Nantes

Ce sujet ne comporte aucune partie relative aux Sciences Industrielles pour l'Ingénieur.

1 Production du signal

1.1 Caractérisation de l'excitation

1. La loi de STEFAN-BOLTZMANN est $j_{ray} = \sigma_{St} T^4 = 1,5 \times 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. La puissance surfacique associée au laser est $\frac{P_0}{\sigma} = 5 \times 10^6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. On a donc bien $j_{ray} \ll j_{LASER}$. Ce raisonnement impose que l'on considère la puissance du laser comme uniformément répartie dans toute la section du faisceau.

2. On a immédiatement $\vec{\phi} = F h \nu_0 \vec{u}_x$ puisque F représente le nombre de photons traversant une section unité par unité de temps.

3. Le terme $\frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/(2\mu_0))}{\partial t}$ représente la dérivée par rapport au temps de la densité volumique d'énergie électromagnétique. Le terme $\text{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}/\mu_0)$ est la divergence du vecteur de POYNTING. En intégrant cette formule sur un volume, on obtient le théorème de POYNTING qui exprime le fait que le flux sortant du vecteur de POYNTING à travers la surface fermée - définissant le volume précédent - correspond à la diminution de l'énergie électromagnétique contenue dans ce volume par unité de temps. Dans une situation unidimensionnelle, l'énergie contenue pour une section σ entre x et $x + dx$ est $N(x, t) h \nu \sigma dx$. Le bilan du flux entrant associé au vecteur de POYNTING est $F(x, t) h \nu \sigma - F(x + dx, t) h \nu \sigma$. La variation d'énergie dans le volume $S dx$ est donc $\frac{\partial N}{\partial t} h \nu \sigma dx = F(x, t) h \nu \sigma - F(x + dx, t) h \nu \sigma$. On obtient facilement l'équation locale exprimant la conservation de l'énergie : $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0$.

1.2 Génération de porteurs

4. On calcule en électron-volts l'énergie $h \nu_0$. On a $h \nu_0 \simeq 2 \text{ eV}$. On constate bien que $h \nu_0 > E_g$. L'onde peut donc créer des paires électrons-trous.

5. L'énoncé donne $\beta = 10^5 \text{ cm}^{-1}$ et incite, donc, à le considérer comme constant. L'équation différentielle à laquelle obéit F est donc $\frac{dF}{dx} + \beta F = 0$. La solution est donc $F(x) = F(0^+) \exp -\beta x$. Le flux surfacique de photons arrivant sur la surface est $\frac{P_0}{h \nu_0 \sigma}$. Seule la fraction $(1 - r)$ pénètre dans le matériau. On a donc :

$$F(x) = \frac{P_0(1-r)}{h \nu_0 \sigma} \exp -\beta x. \text{ En posant } F_0 = \frac{P_0}{h \nu_0 \sigma}, \text{ on trouve alors } F(x) = F_0(1 - r) \exp -\beta x.$$

6. On a $\frac{F(D)}{F(0^+)} = \exp -\beta D = 10^{-3}$. Cela conduit à $D = \frac{3 \ln 10}{\beta}$. La valeur numérique correspond à $D = 7 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ce qui fait encore $D = 0,7 \mu\text{m}$. Le faisceau laser est donc absorbé très rapidement à l'intérieur du matériau.

7. Bien qu'il ne soit pas défini et au vu de la question suivante, le taux de génération est le nombre de paires électrons-trous créé par unité de temps et de volume. Il faut retenir qu'à une paire électron-trou

correspond un photon absorbé. Il faut donc trouver le nombre de photons absorbés par unité de temps et de volume. On raisonne toujours sur le volume σdx compris entre x et $x + dx$. Le nombre de photons absorbés par unité de temps est $F(x)\sigma - F(x + dx)\sigma = -\frac{dF}{dx}\sigma dx$. On a donc $G_e(x) = -\frac{dF}{dx}$. En dérivant l'expression trouvée pour $F(x)$, on obtient¹ : $G_e(x) = \beta F_0(1 - r) \exp -\beta x$.

8. Le nombre total de paires électrons-trous créé correspond au nombre total de photons absorbés. Il faut donc intégrer le taux de génération sur l'ensemble du volume de l'échantillon. On a donc $\frac{dN_T}{dt} = \int_0^\infty G_e(x)\sigma dx = \sigma G_0 \int_0^\infty \exp -\beta x dx$. On trouve facilement : $\frac{dN_T}{dt} = \frac{G_0\sigma}{\beta}$.

1.3 Temps de vie des porteurs

9. n et p sont des concentrations en nombre par unité de volume. On en déduit que leur unité est m^{-3} . On peut donc écrire que $\frac{m^{-3}}{s} \equiv B m^{-6}$. On en déduit que l'unité de B est : $m^3 \cdot s^{-1}$.

10. On a $\frac{dn}{dt} = \frac{dn^*}{dt} = -B(n^*p^* - n_0p_0) = -B[(n_0 + n(t))(p_0 + p(t) - n_0p_0)]$. On effectue le développement du produit, on simplifie le terme n_0p_0 et on tient compte du fait que $n(t) = p(t)$. À partir de là, on arrive à l'expression $\frac{dn}{dt} = -B[(n_0 + p_0)n(t) + n^2(t)]$. En identifiant cette équation avec celle fournie par l'énoncé, on voit que $\frac{1}{\tau(n)} = B[(n_0 + p_0) + n(t)]$. Si l'excitation est faible, cela signifie que l'on fabrique assez peu de paires électrons-trous par rapport à celles présentes initialement dans le matériau semi-conducteur. On écrit que : $n(t) \ll n_0 + p_0$. Dans ce cas de figure, le temps caractéristique τ est bien constant puisqu'il s'exprime selon : $\frac{1}{\tau} = B(n_0 + p_0)$. Si τ est une constante, on tombe dans le cas d'une cinétique d'ordre 1 : $\frac{dn}{dt} + \frac{n}{\tau} = 0$. Cette équation a pour solution $n(t) = n^0 \exp -\frac{t}{\tau}$. On raisonne entre les dates t et $t + dt$, le nombre de paires électrons-trous $n(t) - n(t + dt) = -\frac{dn}{dt}dt$ ont eu finalement la durée de vie t . Le calcul de la vie moyenne correspond donc - comme son nom l'indique - à la moyenne suivante : $\Delta t_{vie} = \frac{1}{n^0} \int_0^\infty \left(-\frac{dn}{dt}\right) t dt$. On a donc $\Delta t_{vie} = \frac{1}{n^0} \int_0^\infty \frac{n^0}{\tau} \exp -\frac{t}{\tau} t dt = \tau \int_0^\infty \exp -u u du$. On effectue une intégration par partie : $\Delta t_{vie} = \tau ([-u \exp -u]_0^\infty + \int_0^\infty \exp -u du)$. Le calcul conduit à $\Delta t_{vie} = \tau$.

1.4 Diffusion de porteurs

11. On effectue un bilan entre les dates t et $t + dt$ pour un système compris entre les abscisses x et $x + dx$. On note N le nombre d'électrons photocréés. On a : $\frac{dN}{dt} = \dot{N}_{entre} - \dot{N}_{sort} + \dot{N}_{créé}$. On a d'une part $\frac{dN}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} \sigma dx$ et d'autre part $\dot{N}_{entre} = -D \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_x \sigma$ et $\dot{N}_{sort} = -D \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x+dx} \sigma$. En ce qui concerne le terme de création, on a deux contributions, une de disparition correspondant au temps de vie des porteurs $-\frac{dn}{dt} \sigma dx$ et une de création effective correspondant au taux de génération étudié précédemment $(G_0 \exp -\beta x) \sigma dx$. Le bilan évolue après simplification par σdx et en écrivant que $\frac{\partial n}{\partial x} \Big|_x - \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x+dx} = -\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} dx$. On obtient bien l'équation différentielle demandée : $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{n}{\tau} + G_0 \exp -\beta x$.

12. En régime indépendant du temps, l'équation différentielle devient : $\frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{1}{D\tau} n = -\frac{G_0}{D} \exp -\beta x$. Sa solution générale est de la forme $n_g(x) = \mu_1 \exp -\frac{x}{L} + \mu_2 \exp \frac{x}{L}$. Pour la solution particulière, il faut tester une forme $\mu_3 \exp -\beta x$ dans l'équation différentielle. On obtient $\mu_3 [\beta^2 - \frac{1}{L^2}] \exp -\beta x = -\frac{G_0}{D} \exp -\beta x$. On suppose que l'on se trouve dans un cas où $\beta L \neq 1$. On en déduit donc que $\mu_3 = \frac{G_0\tau}{1-\beta^2 L^2}$. La solution possède donc la forme $n(x) = \mu_1 \exp -\frac{x}{L} + \mu_2 \exp \frac{x}{L} + \frac{G_0\tau}{1-\beta^2 L^2} \exp -\beta x$. Le milieu est considéré comme illimité pour $x > 0$, la solution qui diverge ne peut pas être acceptée. On a donc $\mu_2 = 0$. L'autre condition porte sur le courant de diffusion en $x = 0$. Ce courant est donné par l'expression $-D \frac{dn}{dx} \Big|_0$. Il est nul puisque le milieu est limité en $x = 0$ il ne peut pas y avoir de diffusion à l'extérieur. Or, nous avons $\frac{dn}{dx} = -\frac{\mu_1}{L} \exp -\frac{x}{L} - \beta \mu_3 \exp -\beta x$. En se plaçant en $x = 0$, on trouve donc la relation $\mu_1 = -\beta L \mu_3$. Finalement la solution que l'on obtient correspond bien à celle proposée par l'énoncé : $n(x) = \frac{G_0\tau}{\beta^2 L^2 - 1} [\beta L \exp -\frac{x}{L} - \exp -\beta x]$.

1. Cette formule ne correspond pas à l'expression donnée dans l'énoncé, celle-ci était manifestement fausse !

13. Le coefficient de diffusion est $D = \frac{k_B T}{e} |\mu| = 3,3 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. On trouve $L = \sqrt{D\tau} = 0,3 \text{ }\mu\text{m}$ et $\beta^{-1} = 0,1 \text{ }\mu\text{m}$. Les longueurs d'atténuation du faisceau sont très petites, en quelques L , c'est-à-dire pour des distances de l'ordre de $1 \text{ }\mu\text{m}$, le faisceau est complètement atténué. Il est donc préférable de détecter la luminescence par la face avant. On a $\sqrt{\sigma} = 32 \text{ }\mu\text{m}$. La taille transversale est grande devant les longueurs caractéristiques précédentes. Il est difficile de considérer le milieu comme unidimensionnel.

1.5 Recombinaison en surface

14. Dans la formule proposée, on voit que S doit s'identifier à D divisé par une longueur. Or, D est un coefficient de diffusion en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. On en déduit que S est une vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

15. $-D \frac{dn}{dx} \Big|_0$ est un courant de diffusion, on peut donc dire d'après l'équation proposée que le courant de particules - ici des électrons - de SCHOKLEY doit compenser le terme de diffusion vers la surface.

16. L'équation différentielle est inchangée, seule la condition à la limite en $x = 0$ évolue. Le courant de diffusion n'est plus nul. En $x \rightarrow \infty$, la densité $n(x)$ ne peut pas diverger. La forme générale de la solution est donc $n(x) = \mu_1 \exp -x/L + \mu_3 \exp -\beta x$ où μ_3 possède la même expression que précédemment puisque l'équation différentielle n'a pas évolué. On en déduit que $\frac{dn}{dx} \Big|_0 = -(\frac{\mu_1}{L} + \beta \mu_3)$. Or, $\frac{dn}{dx} \Big|_0 = \frac{S}{D} n(0)$. On a donc $\mu_1 = -\frac{SL}{D} n(0) - \beta L \mu_3$. Or, la vitesse de SCHOKLEY est $S = \frac{\xi L}{\tau}$. On peut alors organiser - après calculs - l'expression de $n(x)$ pour obtenir $n(x) = -\xi n(0) \exp -\frac{x}{L} + \frac{G_0 \tau}{\beta^2 L^2 - 1} (\beta L \exp -\frac{x}{L} - \exp -\beta x)$. Pour $\xi = 0$, on retrouve de façon tout à fait évidente le résultat obtenu précédemment.

17. En effectuant $n(0) = n(x = 0)$, on arrive à $n(0) = \frac{G_0 \tau}{1 + \beta L} \frac{1}{1 + \xi}$. On a aussi $\frac{dn}{dx} \Big|_0 = \frac{\xi n(0)}{L}$. On obtient donc $\frac{dn}{dx} \Big|_0 = \frac{G_0 \tau}{L(1 + \beta L)} \frac{\xi}{1 + \xi}$. Pour obtenir l'abscisse du maximum, il faut calculer la fonction dérivée. On obtient $\frac{dn}{dx} = \frac{G_0 \tau}{L(1 + \beta L)} \left[\frac{\beta L}{\beta L - 1} \exp -\beta x + \left(\frac{\xi}{1 + \xi} - \frac{\beta L}{\beta L - 1} \right) \exp -\frac{x}{L} \right]$. Cette dérivée s'annule pour x_m tel que $\exp -(\beta L - 1) \frac{x_m}{L} = \frac{\beta L + \xi}{\beta L (1 + \xi)}$. On trouve que l'abscisse du maximum de la courbe est donnée par : $x_m = \frac{L}{\beta L - 1} \ln \frac{1 + \xi}{1 + \frac{\xi}{\beta L}}$.

Ce maximum existe toujours - x_m est défini et positif - lorsque $\beta L > 1$. Au vu des valeurs numériques fournies cette situation est toujours valable. Si $\xi \ll 1$ alors le maximum se situe à l'abscisse correspondant au développement limité effectué ci-dessus : $\ln \frac{1 + \xi}{1 + \frac{\xi}{\beta L}} \simeq \ln(1 + \xi \frac{\beta L - 1}{\beta L}) = \xi \frac{\beta L - 1}{\beta L}$. On obtient l'expression $x_m \simeq \frac{\xi}{\beta}$. Avec les calculs précédents, on peut conclure sur l'expression $n(x) = \frac{n(0)}{\beta L - 1} [(\beta L + \xi) \exp -\frac{x}{L} - (1 + \xi) \exp -\beta x]$. Sur le graphique de la figure 1, on peut voir plusieurs courbes de $n(x)$ pour différentes valeurs de ξ dans le cas où $\beta L = 3$.

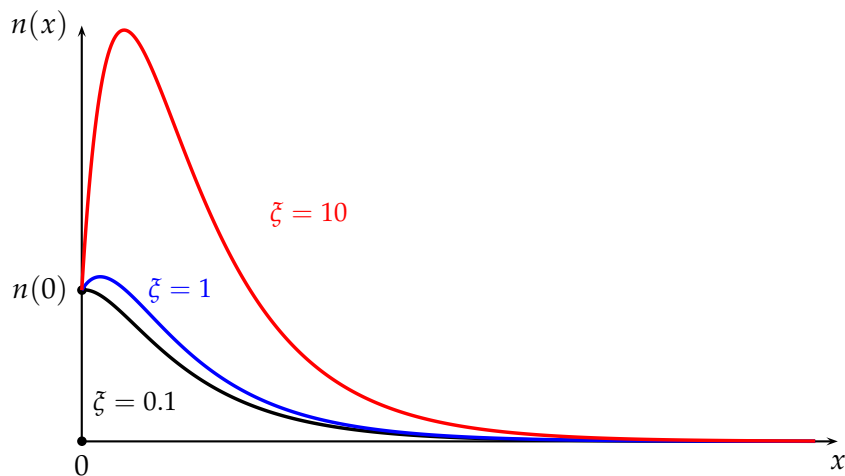


FIGURE 1 – Évolution de la densité de paires en régime stationnaire

1.6 Réabsorption de la lumière émise

18. Le nombre de photons est le même que le nombre de paires électrons-trous. Or, ces paires sont générées par les photons absorbés du laser de stimulation. Il y aura donc autant de photons produits que de paires générées. Entre x et $x + dx$, il y a $n(x) \sigma dx$ paires créées. Les photons créés doivent parcourir la distance x pour atteindre la surface. Le nombre de photons participant au flux est donc $n(x) [\exp -\alpha x] \sigma dx$. Le nombre total sur l'échantillon est donc l'intégrale sur toutes les valeurs de x . On peut donc écrire que le nombre total de photons produit à l'énergie $h\nu$ est proportionnel à : $\int_0^\infty n(x) \exp -\alpha x dx$.

19. On a $A(h\nu) = K\alpha(h\nu) (h\nu)^3 \int_0^\infty n(x) \exp -\alpha(h\nu)x dx$. On peut considérer que $A(h\nu)$ est à l'image de $\alpha(h\nu)$ si le terme $(h\nu)^3 \int_0^\infty n(x) \exp -\alpha(h\nu)x dx$ peut être considéré comme constant. L'énoncé propose de supposer que l'absorption est faible, le terme d'absorption est donc $\exp -\alpha(h\nu)x \simeq 1$. Comme la raie est très fine $h\nu \simeq h\nu_0$. On peut donc écrire que $A(h\nu) = K'\alpha(h\nu)$ avec $K' = K(h\nu_0)^3 \int_0^\infty n(x) dx$.

20. Sur les graphiques de la figure proposée dans l'énoncé, on peut constater que les maxima diffèrent entre $I(h\nu)$ et $A(h\nu)$, on peut donc se tromper de fréquence ν_0 comme par exemple dans le cas du second graphique. De plus, l'intensité d'une raie est très différente entre celle de la courbe $I(h\nu)$ et celle de la courbe $A(h\nu)$. On peut donc être amené à considérer un raie secondaire par rapport à la raie principale qui apparaît sur le graphique de $A(h\nu)$. Ce sont les deux erreurs que l'on peut commettre apparemment. ...

2 Détection du signal

2.1 Détection synchrone (analogique)

2.1.1 Principe de la détection synchrone

21. Un filtre passe-bas du premier ordre correspond à une fonction de transfert $\underline{H} = \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}}$. En passant dans le domaine temporel, cela correspond à l'équation différentielle $\tau \frac{ds}{dt} + s = e$. Si l'on se place dans le domaine où $\omega\tau \gg 1$, on a $j\omega\tau \underline{s} = \underline{e}$ ce qui s'écrit encore $\tau \frac{ds}{dt} = e$ et par conséquent $s(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e(t') dt'$. Le filtre passe-bas est donc bien un intégrateur pour le domaine des fréquences f telle que $f \gg \frac{1}{2\pi\tau}$. D'après l'opération réalisée, on a $P(t) = \Gamma s(t) \cos(\omega_0 t - \varphi) + b(t) \cos(\omega_0 t - \varphi)$. En utilisant la formule de trigonométrie rappelée dans l'énoncé, on obtient $P(t) = \frac{\Gamma}{2} s(t) [\cos(2\omega_0 t - \varphi) + \cos \varphi] + b(t) \cos(\omega_0 t - \varphi)$. On en déduit le calcul de la moyenne : $\overline{m(t, T_i)} = \frac{\Gamma}{2} \int_{t-T_i}^t s(t') (\cos(2\omega_0 t' - \varphi) + \cos \varphi) dt' + B(t, T_i)$ avec $B(t, T_i) = \int_{t-T_i}^t b(t') \cos(\omega_0 t' - \varphi) dt'$. $b(t')$ est un bruit, automatiquement $b(t') \cos(\omega_0 t' - \varphi)$ est aussi un bruit pour $T_i \gg T_0$ et T_i grande devant les périodes présentes dans le bruit, ce qui est attendu pour un bruit. On peut donc en déduire que $B(t, T_i) = 0$.

22. Le filtre sélectif proposé par l'énoncé est plutôt énigmatique. Il s'agit sans doute du second multiplieur qui agit dans le cadre du montage de la détection synchrone proposé. On multiplie le signal précédent par $\cos(\omega_0 t - \varphi)$. Pour déterminer le spectre, il faut additionner et soustraire ω_0 au spectre précédent de $S(t)$. On obtient un pic d'intensité la plus élevée pour les pulsations comprises dans l'intervalle $[-\Omega; \Omega]$ accompagné de deux pics dans les intervalles suivants : $[-(2\omega_0 + \Omega); -2\omega_0 + \Omega]$ et $[2\omega_0 - \Omega; 2\omega_0 + \Omega]$. Après l'intégrateur, on a filtré les hautes fréquences. Cela fait qu'il ne subsiste que l'intervalle $[-\Omega; \Omega]$.

23. Pour arriver à récupérer l'information, il faut que la période de $s(t)$ qui est en $\frac{2\pi}{\Omega}$ soit grande devant la durée d'intégration T_i . Mais pour filtrer le reste du signal, il faut que cette même période T_i soit grande devant T_0 . Le compromis à trouver est donc : $\frac{2\pi}{\omega_0} \ll T_i \ll \frac{2\pi}{\Omega}$. Si cette condition est réalisée alors $s(t)$ varie peu pendant la durée T_i : on peut la sortir de l'intégrale. On a donc : $\overline{m(t, T_i)} = \frac{\Gamma}{2} s(t) (\int_{t-T_i}^t \cos(2\omega_0 t' - \varphi) dt' + \int_{t-T_i}^t \cos \varphi dt')$. On obtient ainsi $\overline{m(t, T_i)} = \frac{\Gamma}{2} T_i \cos \varphi s(t)$. Pour obtenir le signal le plus grand possible, il faut choisir $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.

2.1.2 Réalisation d'une détection synchrone

24. Si l'on effectue maintenant le produit $s(t)u(t)$, on multiplie la fréquence du signal $s(t)$ par chaque fréquence présente dans le spectre du signal créneau. Il y en a une infinité sur le plan mathématique mais seules les premières ont une réalité physique car les harmoniques de rang élevé ont une amplitude qui sera vite noyée dans le bruit. Les fréquences présentes dans la porteuse sont : $f_p = \frac{2n+1}{T_0}$.

25. On peut facilement factoriser le terme $2m(jx)$ dans l'expression de la fonction de transfert fournie pour écrire que $\underline{H}(jx) = \frac{A}{1 + \frac{j}{2m}(x - \frac{1}{x})}$. Il s'agit d'un filtre passe-bande centré en $x = 1$ avec une résonance relativement aiguë puisque $m \ll 1$ (le facteur de qualité $Q = 1/(2m) \gg 1$). Sa phase évolue entre $\pi/2$ et $-\pi/2$, elle s'annule en $x = 1$. Le diagramme de BODE en amplitude de ce filtre est fourni sur le schéma de la figure 2.

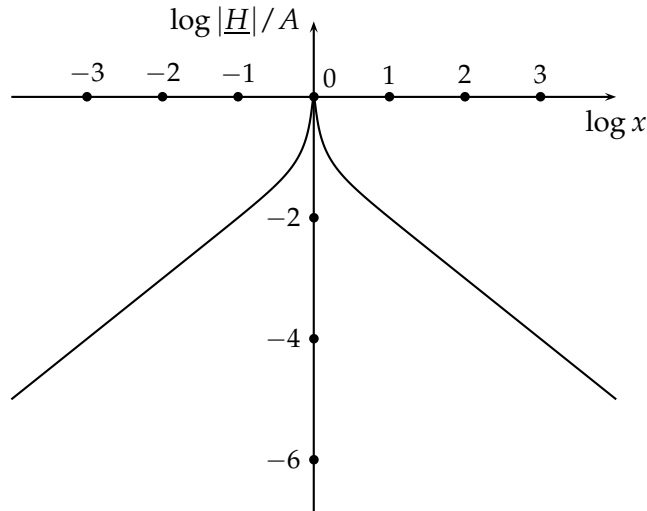


FIGURE 2 – Filtre passe-bande de facteur de qualité $Q = 10$

26. La fonction de transfert du filtre analogique proposé peut encore s'écrire $\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{K}{3-K}}{1 + j\frac{1}{3-K}(RC\omega - \frac{1}{RC\omega})}$. On peut donc facilement identifier les facteurs : $A = \frac{K}{3-K}$ et $Q = \frac{1}{3-K}$. La pulsation de résonance est $\omega_c = \frac{1}{RC}$, on peut aussi exprimer le gain maximum et le facteur de qualité avec les résistances du circuit : $A = \frac{R_2 + R_1}{2R_2 - R_1}$ et $Q = \frac{R_2}{2R_2 - R_1}$. On notera que si $2R_2 = R_1$, il ne faut pas imaginer que le gain sera infini. En effet, le calcul de $\underline{H}(j\omega)$ suppose que l'amplificateur opérationnel est en régime linéaire. Dans le cas particulier précédent, l'AO se mettrait en saturation. Le circuit ne joue plus alors son rôle de filtre passe-bande.

27. Il ne faut laisser passer qu'une seule harmonique, alors autant que cela soit celle d'amplitude la plus élevée. Il faut donc centrer la pulsation ω_c sur la pulsation $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. On doit donc avoir $T_0 = 2\pi RC$. Encore faut-il que la bande-passante soit suffisamment fine pour éviter qu'une seconde harmonique ne passe dans le filtre. Ici, la seconde harmonique est $3\Omega_0$. La bande-passante du filtre étant $\frac{\omega_c}{Q}$, il suffit que $\frac{1}{QRC} < \Omega_0$ pour obtenir un bon filtrage.

2.2 Échantillonneur bloqueur (numérique)

2.2.1 Échantillonnage

28. On a $v_e(t) = K_0 (\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_e)) V(t)$. Comme la durée d'un signal $\delta(t - nT_e)$ est très brève, on peut considérer que $V(t)$ n'a pas le temps de changer de valeur pendant cette durée. On peut donc rentrer $V(t)$ dans la somme définissant le signal d'échantillonnage. On écrit donc : $v_e(t) = K_0 \sum_{n=0}^{\infty} V(t) \delta(t - nT_e)$.

29. En position fermée, l'interrupteur nous amène à considérer le schéma de la figure 3. On raisonne avec un diviseur de tension en utilisant l'expression de l'impédance équivalente $Z_{eq} = \frac{R_u}{1 + jR_u C\omega}$. On a donc

$\underline{v}_u = \underline{V} \frac{Z_{eq}}{R_s + Z_{eq}}$. On obtient donc $\underline{v}_u = \frac{\frac{R_u}{R_s + R_u}}{1 + j \frac{R_u R_s}{R_u + R_s} \omega} \underline{V}$. La durée caractéristique du filtre est $\tau_a = \frac{R_u R_s}{R_u + R_s} C$. Il faut une durée de l'ordre de $\Delta t_a = 3\tau_a = 3 \frac{R_u R_s}{R_u + R_s} C$ pour considérer l'acquisition du signal réalisée.

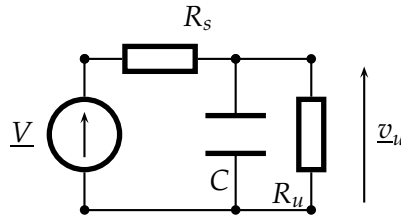


FIGURE 3 – Circuit équivalent

30. Lorsque l'interrupteur est ouvert, on obtient un circuit simple constitué uniquement du condensateur C et de la résistance R_u . La constante de temps est $\tau_h = R_u C$. Le condensateur va se décharger dans la résistance R_u . Le temps de maintien du signal est de l'ordre de τ_h .

31. En intercalant l'amplificateur opérationnel dans le montage, on réalise un suiveur et, surtout, on profite de la très grande impédance d'entrée de l'AO $R_u \gg R_s$. Le temps d'acquisition est donc $t_a = 3R_s C$ mais c'est aussi le temps correspondant à la décharge du condensateur qui va se produire lorsque le signal à échantillonner va diminuer. Le temps de maintien, lui, est très long puisque l'impédance d'entrée de l'AO est très élevée.

32. L'allure du signal obtenu à la sortie de l'échantillonneur-bloqueur est fournie sur le graphique de la figure 4.

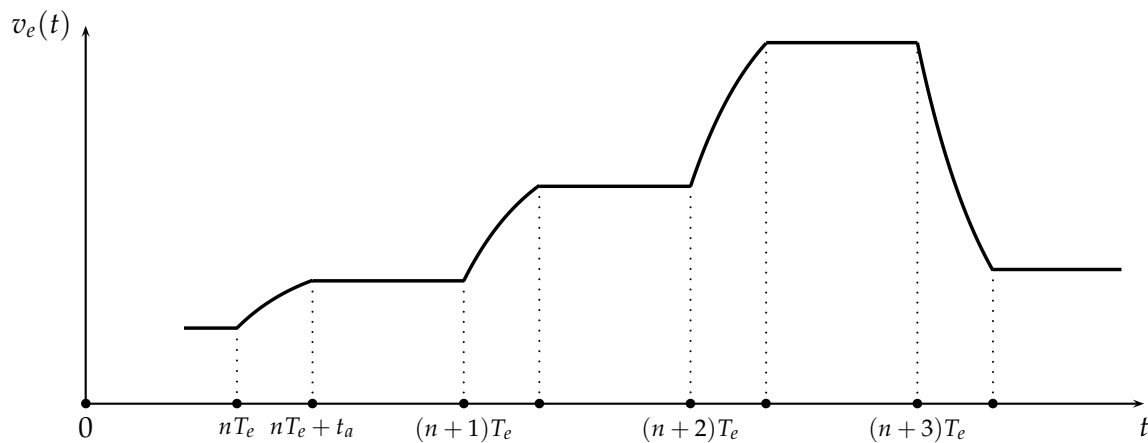


FIGURE 4 – Évolution du signal à la sortie de l'échantillonneur-bloqueur

2.3 Restitution du signal après traitement

Le montage proposé dans l'énoncé ne fonctionne pas. Dans la position 1, l'interrupteur doit amener le courant sur l'entrée inverseuse de l'amplificateur opérationnel. Dans la position 0, il doit mettre le courant directement à la masse. C'est un tel montage que l'on va considérer dans la suite du problème.

33. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et en régime linéaire. Cela permet de dire que le potentiel V_- de l'entrée inverseuse est nul. Mais sur le plan électrique, cela n'est pas suffisant sur le plan de l'intensité du courant pour obtenir la conversion numérique-analogique, il faut que pour la position 0, le courant parte bien à la masse d'où la remarque préliminaire ci-dessus. Revenons au calcul de la résistance équivalente située à droite de A_1 . Étudions les choses au niveau du nœud A_n . Finalement lorsque le courant arrive à ce nœud, il se sépare en deux voies contenant chacune une résistance $2R$. Comme la différence de potentiel est la même puisque $V_{A_n} - V_- = V_{A_n} - V_{masse}$, et cela quelle que soit la position de l'interrupteur, il y a toujours division de l'intensité du courant en deux parties égales. Les deux résistances $2R$ sont donc en parallèle. Elles sont équivalentes à une résistance R . Cette résistance R se retrouve en série

avec la résistance R qui est située entre A_{n-1} et A_n . On obtient donc une résistance $2R$ qui est à nouveau en parallèle avec la résistance $2R$ située en A_{n-1} . Ce petit jeu peut continuer jusqu'en A_1 où la résistance équivalente est R .

34. Comme nous l'avons dit à la question précédente, le courant se divise toujours en deux. On a donc $i_0 = 2i_1$ et $i_1 = 2i_2 \dots$

35. La tension appliquée en A_0 à la résistance $2R$ est toujours V_{ref} et cela quelle que soit la position de l'interrupteur. On a donc $i_0 = \frac{V_{ref}}{2R}$. Le courant de sortie de l'AO est celui qui parvient à l'entrée non inverseuse puisque l'impédance d'entrée est considérée comme infinie. La loi des nœuds indique donc que cette intensité est la somme de toutes les intensités de i_0 à i_n chacune étant affectée du coefficient $e_i = 0$ ou 1 en fonction de la position de l'interrupteur. On a donc : $i_s = e_0 i_0 + e_1 i_1 + \dots + e_n i_n$. Or $i_1 = \frac{i_0}{2}$, $i_2 = \frac{i_0}{4} = \frac{i_0}{2^2}$ et $i_n = \frac{i_0}{2^n}$. On peut donc factoriser i_0 et obtenir : $i_s = i_0 (\frac{e_0}{2^0} + \frac{e_1}{2^1} + \frac{e_2}{2^2} + \dots + \frac{e_n}{2^n})$. On peut donc écrire la formule : $i_s = \frac{V_{ref}}{2R} (\frac{e_0}{2^0} + \frac{e_1}{2^1} + \dots + \frac{e_n}{2^n})$. Cette formule ne correspond pas à celle fournie par l'énoncé, il y a une erreur d'un facteur 2.

36. On peut dans la formule précédente factoriser par 2^n . On obtient alors l'écriture : $i_s = \frac{V_{ref}}{R 2^{n+1}} (e_0 2^n + e_1 2^{n-1} + \dots + e_{n-1} 2 + e_n)$. Cette formule permet de passer d'une écriture binaire $e_0 e_1 e_2 \dots e_{n-1} e_n$ à un nombre à base 10 : $N_{base\ 10} = e_0 2^n + e_1 2^{n-1} + \dots + e_{n-1} 2 + e_n$.

37. La précision de l'écriture du nombre est donnée par le terme en $e_n = 0$ ou 1 . Il correspond à une subdivision du résultat en 2^{n+1} . Il faut donc que $2^{n+1} > 250$. La puissance de 2 supérieure à 250 est $256 = 2^8$. On en déduit donc que $n = 7$. On a un codage sur 8 bits.

38. Le circuit proposé est un convertisseur courant-tension. En effet, avec $V_+ = V_- = 0$, on obtient facilement la tension de sortie de l'AO $u_s = -R i_s$.

39. On a un signal constant par morceaux. Si on intègre, on obtient une fonction continue affine par morceau mais cette fonction n'est pas dérivable puisqu'il y a un changement de pente à chaque période d'échantillonnage. Une seconde intégration est nécessaire pour obtenir un signal continu et dérivable. Il faut donc procéder à deux intégrations successives. En pratique, cela correspond à l'utilisation d'un filtre passe-bas du second ordre.

2.4 Quelques aspects pratiques

2.4.1 Bruit de quantification

40. On a $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{q} \int_0^q \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{q} \frac{q^2}{2} = \frac{q}{2}$. Le calcul de l'écart-type passe par $\sigma^2 = \frac{1}{q} \int_0^q (\varepsilon - \frac{q}{2})^2 d\varepsilon$. On obtient tout d'abord $\sigma^2 = \frac{1}{q} \left[\frac{1}{3} (\varepsilon - \frac{q}{2})^3 \right]_0^q$. Finalement, on arrive à $\sigma = \frac{q}{2\sqrt{3}}$.

41. On utilise maintenant l'intervalle $[-\frac{q}{2}; \frac{q}{2}]$. La valeur moyenne est nulle $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} \varepsilon d\varepsilon = 0$. Pour l'écart-type, on trouve à nouveau $\sigma = \frac{q}{2\sqrt{3}}$. Le bruit étant uniformément réparti, les écarts à la moyenne sont les mêmes que l'on considère l'intervalle $[0; q]$ ou bien l'intervalle $[-\frac{q}{2}; \frac{q}{2}]$.

42. L'écart-type étant le même pour chacun des modes de quantification, on privilégie la quantification effectuée sur $[-\frac{q}{2}; \frac{q}{2}]$ puisque la moyenne est nulle.

2.4.2 Bruits d'origine physique

43. En électricité, par exemple, on définit l'intensité efficace associée à un courant $i(t)$ variable comme l'intensité d'un courant continu qui dissiperait la même puissance que $i(t)$ et ceci sur un même intervalle de temps donné Δt . La définition de l'intensité efficace est $I_{eff}^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} i^2(t) dt$. L'énoncé propose comme définition $B_{eq} = \frac{1}{2\pi |H_m|^2} \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 d\omega$. On ne peut manquer de voir une analogie avec la définition d'une grandeur efficace. On peut qualifier B_{eq} de bande passante efficace. La largeur de cette bande nous donnera une idée de l'écart-type du bruit qui traversera le filtre.

44. Pour le passe-bas proposé, on a $|H_m| = 1$. La bande-passante s'écrit donc $B_{eq} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{1+\omega^2\tau^2} = \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}$. Or, nous savons que $\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que $B_{eq} = \frac{1}{4\tau}$. On constate que cette bande passante est 4 fois plus petite que la bande passante classique définie en amplitude à $H_m/\sqrt{2}$ qui va de 0 à $\omega_c = \frac{1}{\tau}$. On peut remarquer que les fonctions de transfert représentées dans l'énoncé ne sont pas les bonnes, il s'agissait en fait des modules carrés de celles-ci. Les bandes passantes qui y figurent sont mystérieuses.

45. Dans le cas du filtre passe-bande étudié avant nous avons vu que $|H_m| = |A|$. On en déduit que $\frac{|H(jx)|^2}{A^2} = \frac{4m^2x^2}{(1-x^2)^2+4m^2x^2}$. La bande passante équivalente est donc donnée par : $B_{eq} = \frac{4m^2\omega_c}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2+4m^2x^2}$ puisque la pulsation de résonance du filtre est $\omega_c = \frac{1}{RC}$ avec $x = \omega/\omega_c$. Avec la valeur de l'intégrale fournie par l'énoncé, on trouve $B_{eq} = \frac{m\omega_c}{2}$. Pour comparer ce résultat à celui de la bande passante classique à mi-hauteur en énergie ou à $1/\sqrt{2}$ en amplitude, on sait que $\Delta\omega = \frac{\omega_c}{Q} = 2m\omega_c$. À nouveau, on constate que B_{eq} est 4 fois plus petite que la bande passante classique. Si m est très petit devant 1, c'est-à-dire que le filtre possède un très bon facteur de qualité, on peut filtrer efficacement le bruit mais tout cela se passe autour de ω_c , il ne faut pas avoir besoin de récupérer des fréquences dans une gamme étendue.

46. Dans cette question, il y a une confusion de notation. e évoqué ne correspond pas à $e = 1$ mV comme présenté juste avant la question mais à $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C. Comme on a pu le voir dans ce qui précède B_{eq} est une bande passante en s^{-1} . On a $i_{sc} = G\sqrt{2eI_d B_{eq}}$. Le produit eB_{eq} représente donc une charge divisée par un temps. Il s'agit donc bien d'une intensité. Comme G est sans dimension, i_{sc} est la racine carrée du carré d'une intensité. On a donc bien i_{sc} en A. Pour la tension V_J , on constate que $k_B T B_{eq}$ est en JOULE par seconde. Il s'agit d'une puissance dont une image est de la forme RI^2 où R est une résistance électrique. On a donc $V_J \equiv \sqrt{R_a R I^2}$. V_J est donc bien le produit d'une intensité par une résistance. On a donc bien : V_J en V.

47. En prenant $T = 300$ K, on peut faire les applications numériques. On trouve $i_J = 0,23i_{sc}$. On constate que $i_J < i_{sc}$ mais ces deux intensités sont du même ordre de grandeur.

48. Il est sans doute raisonnable de travailler dans le domaine du kilohertz : $B_{eq} = 10^3 s^{-1}$. On trouve alors que $i_J = 1,3 \times 10^{-10}$ A, $i_{sc} = 5,6 \times 10^{-10}$ A et $i_b = 1,8 \times 10^{-8}$ A. L'intensité $i_K = 10^{-12}$ A, le rapport signal/bruit que nous noterons RSB est donc : $RSB = \frac{i_K}{\sqrt{i_b^2 + i_J^2 + i_{sc}^2}} = 5 \times 10^{-5}$. Cette valeur est très

défavorable pour arriver à extraire le signal du bruit. Cela ne sera pas possible avec des filtres analogiques. Seul un traitement par du filtrage numérique le permettra et encore sans garantie tant le rapport est faible. On peut aussi remarquer que le gain G agissant sur i_K n'a pas été retenu alors que pour i_{sc} il figure. Or, il vaut $G = 10^6$. Si on le prend en compte, le rapport signal sur bruit est $RSB = 50$. Il n'y a aucune difficulté pour extraire l'information dans de telles conditions.