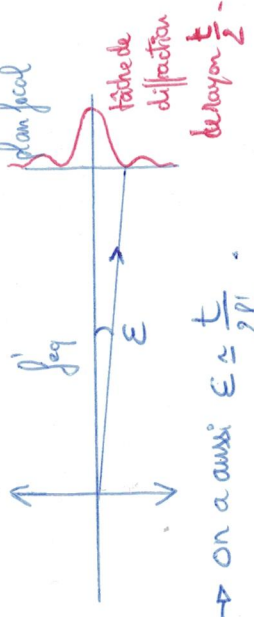


Disques protoplanétaires (Centrale TSi, 2015)

I] Observation des disques -

A1] $\sin \epsilon \approx \frac{1}{2} \frac{v}{c} \rightarrow \epsilon \approx 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$

→ image au foyer image équivalent: tâche de diffraction.



→ on a aussi $\epsilon \approx \frac{t}{2f_g}$

AN: $f_g \approx \frac{t}{2\epsilon} \approx 44 \text{ m}$ (énorme, lieu VLT!)

A2] Question ouverte -

Lecture de la Fig 1: le diamètre Φ_D du disque vaut 25 fois le rayon de l'orbite de la planète $a_b \approx 8,5 \text{ UA}$.

Donc $\Phi_D \approx 25 \times 8,5 \times 1,5 \cdot 10^{11} \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ m} = \Phi_D$

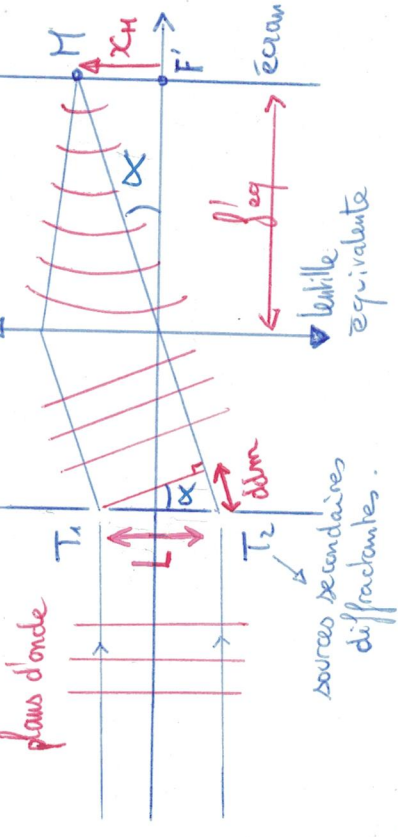
Depuis la Terre, il est donc vu sous un angle $\sigma_D = \frac{\Phi_D}{d_{TB}} = 5,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$

L'angle σ_p sous lequel est vue l'orbite de β -Pictoris b est $\sigma_p = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$.

→ Discussion: la limite de diffraction calculée au A1 (25 fois plus petit) -

vaut $\epsilon \approx 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$ ce qui permettrait (tout juste) de distinguer la planète de son étoile. Mais l'annonce d'une précision à quelques millisecondes d'arc ($\approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ rad}$) est bien meilleure: le VLT a donc un secret pour faire mieux qu'une simple lentille...

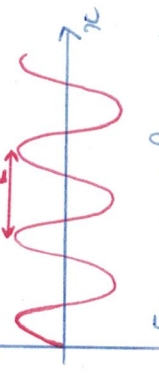
B1] Dispositif d'Young, montage de Fraunhofer



- La différence de marche (ddm) est $\delta = (T_2 M) - (T_1 M) = L \sin \alpha$. car la lentille stigmatique n'ajoute pas de ddm entre deux rayons joignant l'image M à un objet (plan d'onde contenant T_1): cf Thalès! Sachant que $f_g \gg L$ et $f'_g \gg |x|$, on a $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{x}{f'_g}$.
- Le rayon passant par T_1 subit sans doute une réflexion de plus, d'où $\Delta \varphi = \pi$.

Au final: $\delta = (T_2 M) - (T_1 M) = \frac{L}{f'_g} x - \frac{\Delta_0}{2}$

Formule de Fresnel: $I_E(x) = 2 I_{0E} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{Lx}{f'_g} - \frac{\Delta_0}{2} \right) \right]$



En $x=0$, éclairement nul (frange sombre), indépendamment de L . On a donc trouvé un moyen d'annuler au centre la contribution de l'étoile!

B2] Il existe une ddm avant d'arriver sur le plan (T_1, T_2) , puis une ddm allant de ce plan à M (calculée ci-dessus).

Avant (T_1, T_2) la ddm s'écrit $\delta_{avant} = \frac{Lx_p}{d_{TP}} = L \tan \theta$, d'après le cours -

A2] Effets de bords négligés $\rightarrow$ cf plan infini d'épaisseur e_s .
Gauss donne $\vec{g}_D = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ en électrostatique

donc en gravitation : $\vec{g}_D = -4\pi G \rho \vec{u}_z$ avec $\sigma = \rho \cdot e_s$.
d'où $\|\vec{g}_D\| = 4\pi G \rho e_s$.

Rmq: Analyse dimensionnelle avec $[g_D] = \left[\frac{GM}{R^2}\right] : \left[\frac{GM}{R^2}\right] : [G \rho e_s]$

A3] $\frac{g_D}{g_E} = \frac{4\pi G \rho e_s}{\frac{GM_E}{R^2}} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{4\pi \rho e_s R^2}{M_E} \ll 1$
négligé devant 1

Cela est valide si $R \ll \sqrt{\frac{M_E}{4\pi \rho e_s}} = R_c$.

La masse d'un disque de rayon r est $M_D = \pi r^2 e_s \rho$.
Or dans le système solaire, $M_E \approx 10^3 M_D$, soit $r^2 \approx \frac{M_E}{\pi \rho e_s} \cdot 10^3$ (CQFD) $(R \ll R_c)$

B1] Dans un champ de pesanteur uniforme vertical : $\frac{dP}{dz} = -\rho g$.
GP: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V} = \frac{PM}{RT}$. Donc $\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz \rightarrow P = P_0 \exp\left(\frac{-Mgz}{RT}\right)$
Le facteur de Boltzmann compare l'Ep de pesanteur à l'énergie d'agitation thermique.
Pour une particule de gaz de masse $m = \frac{M}{N_A}$, avec $R = N_A k_B$, on a $P = P_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$

B2] Travail élémentaire $\delta W = -dEp = Mg(h) \cdot d\vec{h}$.
Le calcul est beaucoup plus simple en sphériques: $\vec{g} = -\frac{GM_E}{R^2} \vec{e}_r$.
fini: $Ep(d) = \int \frac{GM_E}{R^2} dR$ + cste, avec référence prise à $R \rightarrow +\infty$, on a:
 $Ep(d) = -\frac{GM_E M}{d}$ - CQFD -

On a donc $I_D(x, \theta) = 2 I_{0D} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{Lx}{\rho_{eq}} + L \tan \theta\right)\right) \right]$.
Le point P est bien sûr incohérent avec l'étoile (atomes différents!) ,
donc les éclaircissements se somment simplement:

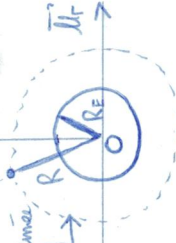
$I(x, \theta) = I_E(x) + I_D(x, \theta)$.
Au centre du détecteur ($x=0$), on a donc:
 $I(0) = 2 I_{0D} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} L \tan \theta\right) \right] \approx 2 I_{0D} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi L \theta}{\lambda_0}\right) \right]$.
Cette intensité est maximale pour $\cos\left(\frac{2\pi L \theta}{\lambda_0}\right) = -1$, soit $\frac{2\pi L \theta}{\lambda_0} = (2n+1)\pi$.
soit $L_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0}{\theta}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Dans cette configuration, au centre la contribution de l'étoile intense est nulle, et celle du point P peu intense est maximale: nous avons "annulé" l'étoile par interférométrie.

II] Forme du disque -

A1] Gauss gravitationnel: $\oint_{\Sigma_{fermée}} \vec{G}(r) \cdot d\vec{S} = -4\pi G \cdot M_{int \Sigma_{fermée}}$.
Masse de l'étoile: $M_E = \frac{4}{3} \pi R_E^3 \rho_E$.

Gauss: - symétries: $\forall H$, tout plan contenant M et O est $\Pi: \vec{G}(r) // \vec{e}_r$.
- invariances: la distribution de masse est invariante par rotations d'angle θ ou φ en sphériques: $\vec{G}(R, \theta, \varphi) = \vec{G}(R)$.


 $\oint_{\Sigma_{fermée}} \vec{G}(r) \cdot d\vec{S} = G(R) 4\pi R^2 = -4\pi G M_E$ pour $R > R_E$.
donc $\vec{G}(R) = -\frac{GM_E}{R^2} \vec{u}_r = -\frac{GM_E}{R^2} \vec{e}_r$
En cylindriques d'axe Oz : $R^2 = z^2 + r^2$ (Pythagore) -
 $\vec{e}_r = \frac{(r \vec{u}_r + z \vec{u}_z)}{\sqrt{r^2 + z^2}}$ - CQFD -

A2] Fig 6: solution sinusoïdale, de période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.4 \cdot 10^8 \approx 9$ mois.
 Graphe cohérent, dont l'échelle est l'année.

A3] La Fig 7 montre que l'amortissement est d'autant plus fort que la taille est faible = cela incite à penser que α augmente quand le rayon des grains décroît. Par exemple le régime devient aperiodique si le rayon est inférieur à 1 μm .

- La 2^e loi de Newton s'écrit $\ddot{z} + \alpha \dot{z} + \omega^2 z = 0$
- polynôme équivalent: $R^2 + \alpha R + \omega^2 = 0, \Delta = \alpha^2 - 4\omega^2$
 - pour $\alpha > 2\omega \rightarrow$ régime aperiodique: $z_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}}{2} \rightarrow$ terme dominant.
 - cas extrême ($\alpha \gg \omega$): $\ddot{z}(t) \approx \ddot{z}_0 \exp(\alpha t) \approx \ddot{z}_0$ = cas des très petits grains.
 - pour $\alpha = 2\omega \rightarrow$ régime critique, décroissance la plus rapide = autour d'un rayon de 10 μm (Fig 7).
 - pour $\alpha < 2\omega \rightarrow$ régime pseudo-periodique (= cas du rayon $> 1 \mu m$).
 Explication physique inéluctable: les gros grains ne voient pas les collisions avec d'autres grains en moyenne plus petits, ils sont donc peu freinés. Au contraire les petits grains sont en moyenne fortement freinés dans leur mouvement vers le plan médian du disque protoplanétaire.

A4] Fig 7: il y a 5 oscillations visibles (α proche de 5).
 → Décroissement logarithmique $\delta = \ln \left[\frac{\ddot{z}(0)}{\ddot{z}(T)} \right] \approx \ln 2 = \frac{\omega_0 T}{2Q}$
 AN: $Q \approx \frac{\pi}{\ln 2} \approx 4.5$ donc $\alpha = \frac{\omega_0^2}{Q} = 5.8 \cdot 10^{-8} s^{-1}$.
 Avec $\eta_{gg} \approx 10^{-5} Pa \cdot s$, on aurait $\alpha' = \frac{6\pi\eta R}{m} = \frac{6\pi\eta R}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho} = \frac{9\eta}{2R^2 \rho} = 9 \cdot 10^{-8} s^{-1}$
 NB: grains dans vide $\neq$ Palkm !!!

• Dans le cas d'une pesanteur uniforme on avait $E_{pes} = -mgz$. Ici, on a $E_{pes} = -\frac{G M M_E}{r^2 + z^2}$ dans le disque protoplanétaire.

Par analogie avec l'atmosphère isotherme, on a $p(r, z) = p_0 \exp\left(-\frac{E_{pes}(r, z)}{k_B T_0}\right)$, ce qui permet d'identifier $H(r) = + \frac{G M M_E}{k_B T_0}$, la distance caractéristique du disque.

• DL avec $|z| \ll r: \frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{z^2}{r^2}\right) \approx \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{z^2}{r^2}\right)$

donc $p(r, z) = p_0 \exp\left(\frac{G M M_E}{k_B T_0 r}\right) \exp\left[\frac{G M M_E}{2 k_B T_0 r^3} (-z^2)\right] = p_0(r) \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{z^2}{h(r)^2}\right]$

donc $p(r, z)$ décroît rapidement avec z : la masse est concentrée à z faible. Ceci étant, quand r augmente le rôle de z est moindre: forme évasée! (Fig 4)

B3] Dans ce modèle avec $T(r) \propto \frac{1}{r^2}$, on a $h(r) = \left[\frac{2 k_B A r^{5/2}}{G M M_E} \right]^{1/2} \propto r^{5/4}$. Sur la Fig 4, l'épaisseur caractéristique $h(r)$ semble quasi linéaire en r , donc cette simulation est cohérente avec le modèle proposé.

III Modèle d'accrétion planétaire dans un disque.

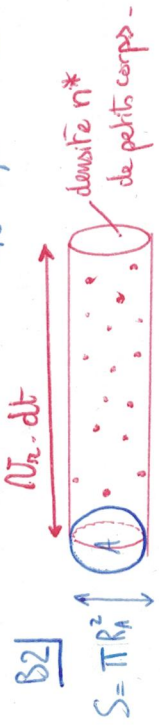
A1] A r fixé, on projette la 2^e loi de Newton sur M_z , dans R galiléen:

$$M \ddot{z} = -\frac{G M_E M}{(r^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{G M_E M}{r^3} \quad \ddot{z} = -\omega^2(z) z$$

avec $\omega(r) = \sqrt{\frac{G M_E}{r^3}}$ = oscillateur harmonique sur M_z .

d) On cherche U_r . Par la même loi de conservation,

on obtient : $U_r = U_i = \frac{D^{7/2}}{48} \left(\frac{\rho_i}{\rho_e}\right) L^{-3/2} g^{1/2} = 390 \text{ m.s}^{-1}$



- Pendant dt le nombre de collisions est $dN = n^* \pi R_A^2 U_r dt$
- La variation de masse correspondante est $dM_A = m \cdot dN = m \cdot \left(\pi R_A^2 \cdot dR_A \right)$
↳ volume de la cellule à la surface

soit $\frac{dR_A}{dt} = \frac{n^* m U_r}{4 \rho_A} \rightarrow R_A(t) = \frac{n^* m U_r}{4 \rho_A} t$

- Dans le disque protoplanétaire, la masse volumique est $\rho_B = n^* m$
- $\tau(R_A = \frac{R_T}{2}) \approx 4 \frac{\rho_A}{\rho_B} \frac{R_T}{2 U_r} \approx 1,3 \cdot 10^{13} \text{ s}$ soit 0,4 million d'années
- Le modèle ne rend pas compte de 40 Ma annoncés

Explication #1: On semble surestimer dans la mesure où l'on peut supposer qu'il y a un mouvement d'ensemble en orbite autour de l'étoile (?)

La valeur de ρ_A est aussi à discuter, selon que la planète soit gazeuse ou tellurique ($\rho_A \approx 500 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_A = 500 \text{ kg.m}^{-3}$ ici). ($\rho_{\text{silice}} = 700 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_{\text{pyrite}} = 1300 \text{ kg.m}^{-3}$)

Explication #2: D'après la simulation de la Fig 8, un dilon se creuse lors de la formation de la planète, qui dépense donc ses alentours, donc sur la durée totale d'accrétion ρ_B doit être plus faible en moyenne.

IV Abrasion de la météorite

- A) L'angle avec la verticale vaut environ $\alpha = 75^\circ$
- so $\frac{h}{15} \rightarrow \frac{d}{h} = \frac{1}{\cos \alpha} = 7,5$
-

B1) a) Les ingrédients sont g_0 et V_0 . Une distance peut s'écrire $\frac{V_0^2}{g_0}$

Vérifions : PFD en chute libre $\rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -g_0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{z} = -gt + V_0 \sin \alpha \\ x = V_0 \cos \alpha t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{z} = -g_0 + V_0 \sin \alpha \\ x = V_0 \cos \alpha t \end{cases}$

La portée vaut 2 fois l'abscisse de z_{max} , soit $\dot{z} = 0 = -g_0 \sin \alpha + V_0 \sin \alpha$

La portée est donc $D = 2 \frac{V_0^2}{g_0} \cos \alpha \sin \alpha \leq \frac{2 V_0^2}{g_0}$

b) La question préliminaire incite à projeter des sédiments dans l'air!

• Lors d'une collision, on a conservation de la quantité de mouvement totale.

Avant collision : $\begin{cases} P_{\text{sédiments}} = 0 \\ P_{\text{astéroïde}} = M_a \cdot U_r \end{cases}$ Après collision : $\begin{cases} P_{\text{ast}} = M_{\text{ast}} V_0 \\ P_{\text{ast}} = 0 \end{cases}$

• Ici, V_0 est la vitesse communiquée aux sédiments - Elle est liée à la portée D par $D \approx \frac{V_0^2}{g_0}$, que l'on assimile au diamètre du cratère

Calcul des masses : $M_{\text{ast}} \approx V_{\text{ast}}(D, P) \cdot \rho_{\text{ast}}$ (avec $\rho_{\text{ast}} \approx 3000 \text{ kg.m}^{-3}$)

$M_a \approx \frac{4}{3} \pi L^3 \rho(Fe) \rightarrow$ profondeur du cratère

Maille cubique face centrée (atomes/maille) : $\rho(Fe) = \frac{4 \cdot M(Fe) / N_A}{a^3} = \frac{8000 \text{ kg.m}^{-3}}{a^3}$

Un calcul trigonométrique en 3D donnerait le volume expulsé $V_{\text{ast}}(D, P)$, mais en ordre de grandeur on prendra $V_{\text{ast}} \approx D^3 P$, voire $\frac{D^3 P}{2}$

Et d'après la Fig 10, $P \propto D$ (de fait $D \approx 6P$) $\rightarrow V_{\text{ast}} \approx \frac{D^3}{12}$

• La conservation de la quantité de mouvement s'écrit en ordg :

$4L^3 \rho_i U_i \approx \frac{D^3}{12} \rho_e \sqrt{g_0 D} \Leftrightarrow D^{7/2} \approx 48 L^3 \left(\frac{\rho_i}{\rho_e}\right) U_i g_0^{-1/2}$

d'où une loi d'échelle $D \sim 3 L^{0,86} \left(\frac{\rho_i}{\rho_e}\right)^{0,3} U_i^{0,14} g_0^{-0,14}$

Cela n'est pas aberrant, mais on trouve peut-être mieux en conservant E_c

B) Equation de la diffusion thermique : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ -
 Temps caractéristique de diffusion $\tau \approx R_m^2 \frac{\rho C_p}{\lambda}$, car $C_m = \rho \cdot C_p$ -
 AN: $\tau \approx \frac{(\frac{17}{2})^2}{7} \cdot \frac{1.5 \cdot 10^7}{7} \approx 1.5 \cdot 10^7 s \approx 180 \text{ jours}$ -

→ donc ce phénomène est bien sûr négligeable devant l'abrasion -

C) Puissance de la traînée $\approx \frac{f_{air} C_x}{2} S v^3 \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ W}$!
 (soit 200 000 centrales nucléaires....)

• La durée de traversée de l'atmosphère sur 50 km est environ 11 s -

Bilan enthalpique à la météorite :

$$\Delta H = \Delta m \cdot L_{sub} = \frac{P_{traînée}}{2} \cdot t_{atm} \rightarrow \Delta m \approx 10^8 \text{ kg} !$$

(Rmq: si l'on tient compte du chauffage de la météorite avant sublimation, on écrit $\Delta m (L_{sub} + c_p \Delta T)$ avec $c_p \Delta T \approx 4 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \ll L_{sub}$) -

→ Bilan: l'abrasion serait donc tellement efficace que la météorite ne toucherait pas le sol : $M(t=0) = 10^7 \text{ kg}$ -

II) Il faudrait donc bien sûr tenir compte de l'abrasion dans la partie précédente, notamment concernant la Fig 10 qui porte sur la Lune qui ne possède plus d'atmosphère -