

Etude de capteurs capacitifs (PT 2015)

1) Résultats sur les champs

- a) Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$
Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$
Maxwell-Thomson $\text{div } \vec{B} = 0$
Maxwell-Ampère $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

b) Le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée vaut la charge intérieure divisée par ϵ_0 .

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

c) $\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ on intègre sur le volume V , délimité par la surface S .

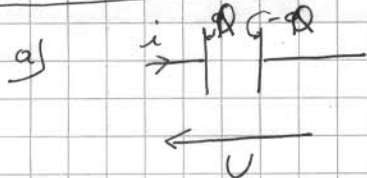
$$\iiint_V \text{div } \vec{E} dV = \iiint_V \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$

On utilise le théorème de Green-Ostrogradski $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\iiint_V \rho dV}{\epsilon_0}$

et on note Q_{int} la charge $\iiint_V \rho dV$ contenue dans le volume.

d'où $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

2) Fonctionnement



b) $Q = CV$

c) Les charges, de signe opposé, s'attirent, donc se répartissent au plus près: sur les surfaces en regard.

3) Capacité du condensateur plan

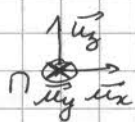
a) On néglige les effets de bord.



Les lignes de champ sont suivant $-\vec{u}_y$

b) On va calculer le champ créé par une seule plaque, de charge surfacique σ_p , située en $z = 0$.

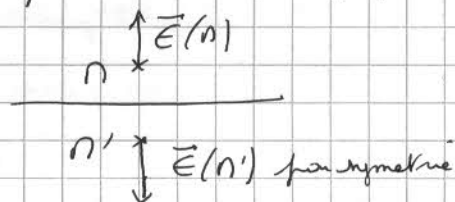
σ_p x_0



Apriori $\vec{E}(n) = \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix}$

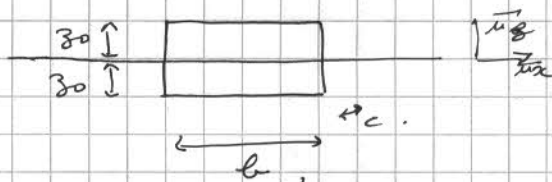
Or la plaque chargée est invariante par translation suivant $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ (on néglige les effets de bord, donc c'est comme si la plaque était infinie) donc l'expression de $\vec{E}$ ne dépend ni de x ni de y .
Or les plans $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie des charges donc $\vec{E}(n)$ appartient à ces plans donc $\vec{E}(n)$ est porté par $\vec{u}_z$.

Finalement $\boxed{\vec{E}(n) = E_z(z) \vec{u}_z}$



En outre $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est un plan de symétrie des charges donc un plan de symétrie pour $\vec{E}$: d'où $\boxed{E_z(-z) = -E_z(z)}$. (cf schéma) E_z est impaire.

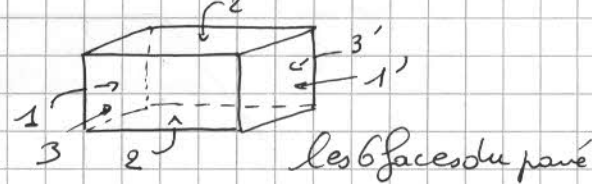
On choisit comme surface de Gauss un pavé droit de côtés b suivant $\vec{u}_x$, c suivant $\vec{u}_y$ et $2z_0$ suivant $\vec{u}_z$, symétrique par rapport à $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.



Le théorème de Gauss s'écrit $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

avec $Q_{int} = \sigma_p b c$.

et $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_1'} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1' + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_2'} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2' + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 + \iint_{S_3'} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3'$



Or $\vec{E}$ est suivant $\vec{u}_z$, $d\vec{S}_1$ et $d\vec{S}_1'$ suivant $\pm \vec{u}_x$, $d\vec{S}_3$ et $d\vec{S}_3'$ suivant $\pm \vec{u}_y$ d'où $\iint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S}_i = 0$ pour $i \in \{1, 1', 3, 3'\}$

Ainsi $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} E_z(-z_0) \vec{u}_z \cdot (-dS \vec{u}_z) + \iint_{S_2'} E_z(z_0) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z$
 $= [-E_z(z_0) + E_z(z_0)] b c$

or $E_z(z)$ est impaire d'où $E(-z_0) = -E(z_0)$

et $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 E_z(z_0) b c$ Ainsi $\boxed{\vec{E}(z_0 > 0) = \frac{\sigma_p}{2 \epsilon_0} \vec{u}_z}$

Il y a 2 plaques, on applique le principe de superposition.

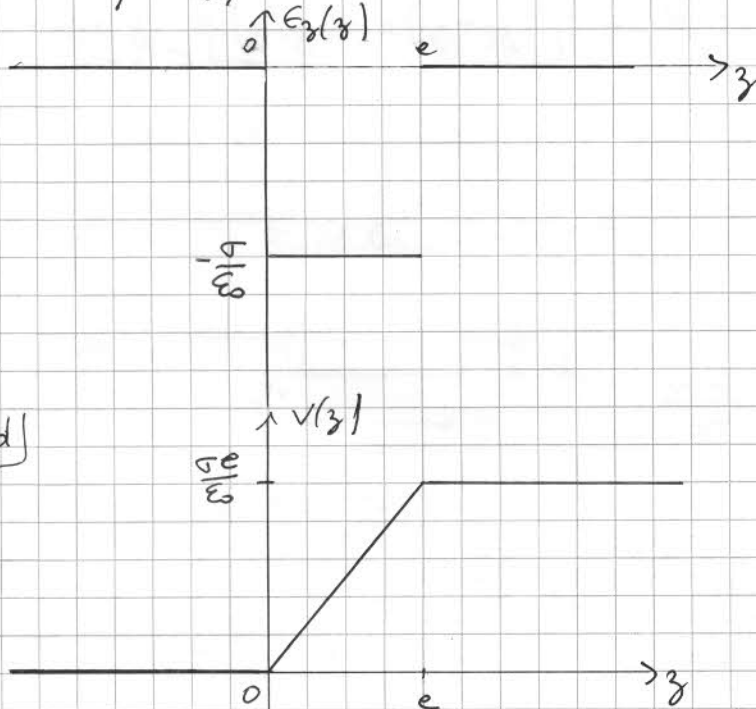
$+ \sigma$ ————— ②
 $- \sigma$ ————— ①

La plaque ① crée $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y = \vec{E}_1$ au-dessus ($z > 0$) et $+\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y = \vec{E}_1$ en-dessous ($z < 0$)

La plaque ② crée $+\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y = \vec{E}_2$ au-dessus ($z > e$) et $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y = \vec{E}_2$ en-dessous ($z < e$) donc

- pour $z < 0$ $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y = \vec{0}$
- pour $0 < z < e$ $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y$
- pour $z > e$ $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y = \vec{0}$

Donc $\vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y$ pour $0 < z < e$
 $\vec{E}(z) = \vec{0}$ ailleurs



c) $\vec{E} = -\text{grad } V$

pour $z \leq 0$ $\vec{E} = \vec{0}$ donc V est uniforme et vaut $V=0$ (arbitraire)

pour $0 < z < e$ $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_y$
 d'où $V(z) = 0 + \frac{\sigma}{\epsilon_0} z$ (avec $V(0)=0$)

pour $z \geq e$ $\vec{E} = \vec{0}$ donc V est à nouveau uniforme et vaut $V = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$ par continuité de V .

e) Or $Q = \sigma S$ est la charge de l'armature positive

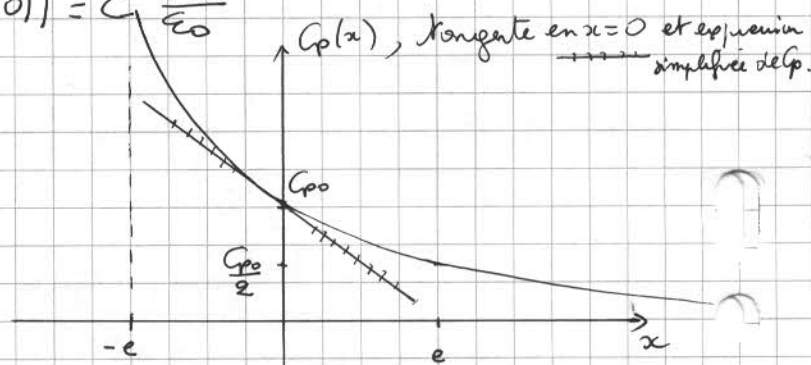
$$Q = \sigma S = C V = C (V(e) - V(0)) = C \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$$

d'où $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e}$

ii) $C_p(x) = \frac{\epsilon_0 S}{e+x} = C_0 \frac{e}{e+x}$

iii) $C_p(x) = C_0 \frac{1}{1+\frac{x}{e}}$

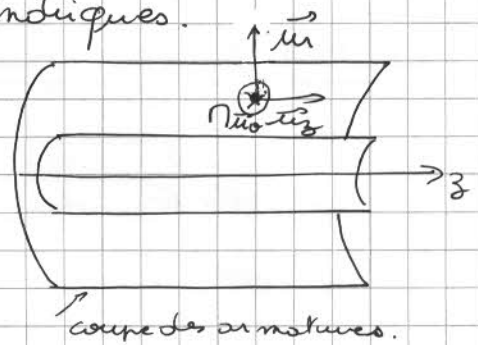
$C_p(x) = C_0 \left(1 - \frac{x}{e}\right)$ après DL



4) Condensateur cylindrique

a) On va travailler en coordonnées cylindriques.

b) A priori $\vec{E}(r) = \begin{cases} E_r(r, \theta, z) \\ E_\theta(r, \theta, z) \\ E_z(r, \theta, z) \end{cases}$



Or $(r, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(R, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont des plans de symétrie des charges donc

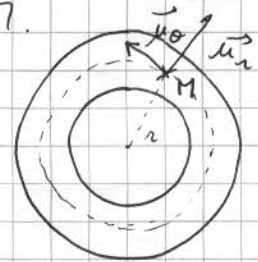
$\vec{E}(r)$ est porté par ces deux plans: $E_z = 0$ et $E_\theta = 0$: $\vec{E}$ est suivant $\vec{u}_r$.

D'autre part, les charges sont invariantes par translation suivant

$\vec{u}_z$ et par rotation autour de (O_z) donc E_r ne dépend ni de z

ni de θ . Finalement $\boxed{\vec{E}(r) = E_r(r) \vec{u}_r}$

c) On prend comme surface de Gauss le cylindre de rayon r centré sur l'axe, de hauteur L , passant par Π . (en pointillés).



$$\oiint \vec{E} d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{E} d\vec{S}_3$$

$= 0$ car $\vec{E}$ est suivant $\vec{u}_r$ et $d\vec{S}_1$ ou $d\vec{S}_2$ suivant $\pm \vec{u}_z$

$$= \iint_{S_3} E(r) \vec{u}_r r d\theta dz \vec{u}_r = 2\pi r L E(r).$$

D'après le théorème de Gauss: $\oiint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

avec si $r < R_1$ $Q_{\text{int}} = 0$

si $R_1 < r < R_2$ $Q_{\text{int}} = Q$.

si $r > R_2$ $Q_{\text{int}} = 0$

Donc $\begin{cases} \vec{E}(r) = \frac{-Q}{2\pi r L \epsilon_0} \vec{u}_r & \text{pour } r \in]R_1, R_2[\\ \vec{E}(r) = \vec{0} & \text{ailleurs} \end{cases}$

d) Pour $r \leq R_1$ $\vec{E} = \vec{0}$ donc V est uniforme et $V = 0$ par continuité en R_1 .

Pour $R_1 < r \leq R_2$ $\vec{E}(r) = \frac{-Q}{2\pi r L \epsilon_0} \vec{u}_r = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$

d'où $V = +\frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln(r/R_1) + \text{cte.}$ (oui, le r/R_1 est une astuce pour simplifier le calcul de "cte")

or $V(R_1) = 0 = \text{cte}$

d'où $V(R_1 < r \leq R_2) = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln(r/R_1)$

Pour $r > R_2$ $\vec{E} = \vec{0}$ donc V est uniforme et vaut $V = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln(R_2/R_1)$ par continuité de V .

Ainsi $V(R_2) - V(R_1) = U = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln(R_2/R_1)$

e) On identifie à $U = \frac{Q}{C_0}$ d'où $C_0 = \frac{2\pi R \epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$

c'est l'expression de l'énoncé avec

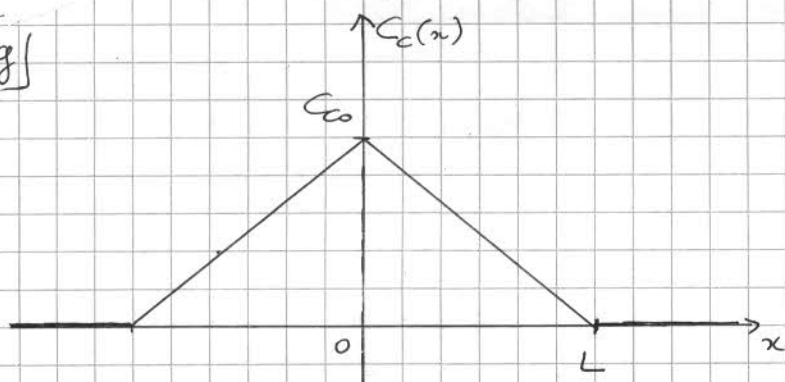
$A_c = \frac{2\pi R \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$

f) Il suffit de remplacer $L_2 = L$ par $L_2 = L - x$ si $x > 0$

d'où $C_c(x) = \frac{2\pi R \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} (L - x)$ d'où $C_c(x) = C_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$

Si $x < 0$ $L_2 = L + x$ donc $L_2 = L - |x|$ dans tous les cas.

g) $C_c(x) = C_0 \left(1 - \frac{|x|}{L}\right)$



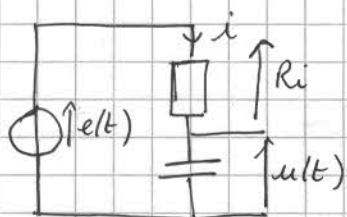
Bien sûr $|x| < L$

si $|x| > L$ $C_c(x) = 0$

h) $C_c(x)$ est linéaire (affine) donc On mesure directement x , mais $C_c(-x) = C_c(x)$ donc on ne peut pas lire le signe de x . Au contraire, $C_p(x)$ n'est pas affine, la lecture de x n'est pas facile mais si $x < 0$ C_p augmente et si $x > 0$ C_p diminue. donc la lecture du signe de x est facile.

5) Montage potentiométrique

a) $e(t) = E \cos(\omega t) = Ri + u(t)$ d'après la loi des mailles



$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

On va passer en notation complexe: avec $j^2 = -1$
 $\underline{e} = E e^{j\omega t} = RC j\omega \underline{U} e^{j(\omega t + \varphi)} + \underline{U} e^{j(\omega t + \varphi)}$

d'où $E = (RC j\omega + 1) \underline{U}$ où $\underline{U} = U e^{j\varphi}$

Ainsi $\underline{U} = \frac{E}{1 + jRC\omega}$

$$U = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

et $\tan \varphi = -RC\omega$

$$\varphi = -\arctan(RC\omega)$$

b) $\sigma_u = \frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dC} \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} E \frac{2R\omega RC\omega}{(1 + (RC\omega)^2)^{3/2}} \frac{dC}{dx}$

$$\sigma_u = -\frac{ER^2\omega^2 C}{(1 + (RC\omega)^2)^{3/2}} \frac{dC}{dx}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{d\varphi}{dC} = \frac{d\varphi}{dC} \frac{dC}{dx} = -\frac{R\omega}{1 + (RC\omega)^2} \frac{dC}{dx} = \sigma_\varphi$$

c) i) Pour le condensateur cylindrique $\frac{dC}{dx} = -\frac{C_0}{L}$ constante (on suppose $x > 0$)

Aucune des grandeurs n'est indépendante de x .

ii) Si E varie, U va varier de façon imprévisible, pas φ .

iii) Il vaut mieux exploiter φ , son expression est plus simple

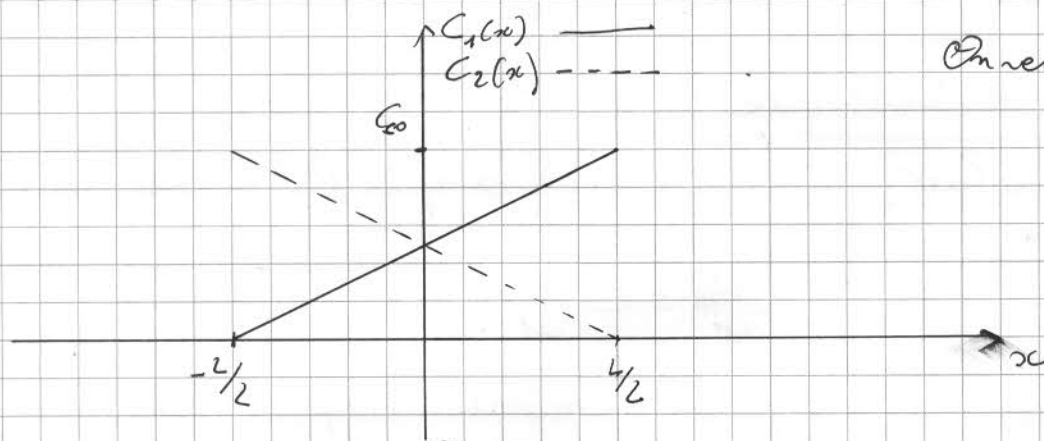
(C n'intervient qu'une fois) et en plus φ ne dépend pas de E .

6) Condensateur double

a) $L_1(x) = \frac{L}{2} + x$

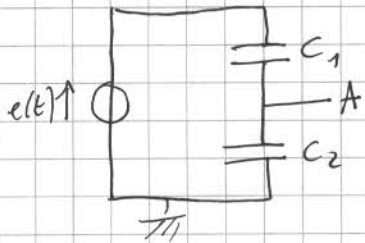
$L_2(x) = \frac{L}{2} - x$

d'où $C_1(x) = C_0 \left(\frac{L/2 + x}{L} \right)$ et $C_2(x) = C_0 \left(\frac{L/2 - x}{L} \right)$

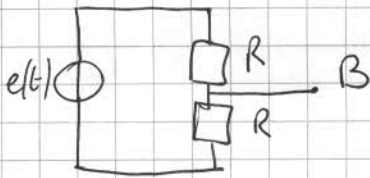


On remarque que $C_1(x) + C_2(x) = C_0$.

7) i) On va appliquer 2 fois la formule du pont diviseur de tension.



$$\underline{V}_A(t) = \underline{e}(t) \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}} = \underline{e}(t) \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \underline{e}(t)$$



$$\underline{V}_B(t) = \underline{e}(t) \frac{R}{R + R} = \frac{\underline{e}(t)}{2}$$

$$\text{d'où } U(t) = V_A - V_B = \underline{e}(t) \left(\frac{C_1}{C_0} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\underline{U} = \underline{E} \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{1}{2} \right)$$

ii) Or $C_1 = C_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right)$ donc $\underline{U} = \underline{E} \frac{x}{L}$

$C_1 + C_2 = C_0$

$\underline{U} = \underline{E} \frac{x}{L}$ C'est constant, comme on le souhaite. (mais ça dépend de $\underline{E}$)

iv.) Il n'y a pas de déphasage entre $\underline{E}$ et $\underline{U}$.