

Banque PT 2015 : Physique B - Thermodynamique

I - Problème d'isolation

1. La loi de Fourier dans un milieu de conductivité thermique λ s'écrit :

$$\boxed{\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} [\vec{j}_{th}] = \text{W/m}^2 \\ [\lambda] = \text{W/K/m} \end{cases}$$

2. L'équation de diffusion de la chaleur s'écrit (voir cours pour demo) :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad \text{avec} \quad D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c_V}$$

On sait que l'unité de D_{th} comme tout coefficient de diffusion est le m^2/s . On a donc $\boxed{\tau = L^2/D_{th}}$.

3. En régime stationnaire, on sait que :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Soit en intégrant deux fois : $T(x) = Ax + B$ avec A et B des constantes.

Or on a les conditions aux limites :

- $T(0) = T_0 \Rightarrow B = T_0$
- $T(e) = T_1 \Rightarrow A = \frac{T_1 - T_0}{e}$

Finalement, on a :

$$\boxed{T(x) = \frac{T_1 - T_0}{e}x + T_0}$$

4. On a le schéma suivant :

$$T_0 \xrightarrow{\phi_{th}} \boxed{R} - T_1$$

On a donc $T_0 - T_1 = R \phi_{th}$ avec :

$$\phi_{th} = j_{th}S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S = -\lambda S \frac{T_1 - T_0}{e}$$

En remplaçant ϕ_{th} , on trouve donc :

$$\boxed{R = \frac{e}{\lambda S}}$$

La résistance thermique par unité de surface r est obtenue en prenant $S = 1 \text{ m}^2$, soit $r = e/\lambda$.

5. On a le schéma suivant :

$$T_1 \xrightarrow{\phi_{th}} \boxed{R_{th,1}} - T_0 - \boxed{R_{th,2}} \xrightarrow{\phi_{th}} T_2$$

avec $R_{th,1} = \frac{e_1}{\lambda_1 S}$ et $R_{th,2} = \frac{e_2}{\lambda_2 S}$. Ainsi, le flux thermique peut s'écrire :

$$\phi_{th} = \frac{T_0 - T_1}{R_{th,1}} = \frac{T_2 - T_0}{R_{th,2}} = \frac{T_2 - T_1}{R_{th,1} + R_{th,2}}$$

On obtient après calculs :

$$\boxed{T_0 = \frac{T_2 + T_1 \frac{e_2 \lambda_1}{e_1 \lambda_2}}{1 + \frac{e_2 \lambda_1}{e_1 \lambda_2}}}$$

6. $\lambda_{\text{gaz}} \simeq 0,03 \text{ W/m/K}$; $\lambda_{\text{solide}} \simeq 1 \text{ W/m/K}$; $\lambda_{\text{Cuivre}} \simeq 400 \text{ W/m/K}$
7. Calculons ϕ_{th} dans deux situations en supposant les températures intérieures T_{int} et extérieures T_{ext} inchangées :
- 1^{er} cas : mur seul de résistance thermique $R_{\text{th,mur}}$.

$$\phi_{\text{th,a}} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{th,mur}}}$$

- 2^{me} cas : mur $R_{\text{th,mur}}$ et couche de polystyrène de résistance thermique $R_{\text{th,pol}}$

$$\phi_{\text{th,b}} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{th,mur}} + R_{\text{th,pol}}} < \phi_{\text{th,a}}$$

On a $\phi_{\text{th,b}} < \phi_{\text{th,a}}$ donc le mur est mieux isolé avec une couche de polystyrène supplémentaire.

8. On a un transfert thermique de type conducto-convectif entre le solide et le fluide. On a donc directement d'après la loi de Newton :

$$\phi_{\text{th}} = P = hS(T_s - T_e)$$

9. La résistance thermique associée est :

$$R_{\text{th}} = \frac{T_s - T_e}{\phi_{\text{th}}} = \frac{1}{hS}$$

L'agitation du gaz permet de modifier δ et h .

II - Étude de l'alimentation en eau d'une maison

10. L'eau est un liquide incompressible, son débit volumique D_V est donc constant le long de l'écoulement :

$$D_V = S_0 V_0 = sv = cste \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{V_0 = \frac{s}{S_0} v} \quad \text{avec} \quad \frac{s}{S_0} \ll 1$$

La vitesse d'écoulement de l'eau au niveau de la surface libre V_0 est donc négligeable devant la vitesse dans la canalisation v .

11. On se place dans les hypothèses suivantes :

- liquide parfait
- liquide incompressible
- écoulement permanent
- une ligne de courant allant d'un point A de la surface libre à un point B en sortie du robinet

D'après le théorème de Bernoulli appliqué entre les points A et B,

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B$$

Or :

- A et B sont en contact avec l'extérieur, d'où $P_A = P_B = P_0$
- $v_A \simeq 0$ et $v_B = v$
- $z_A - z_B = h$

On obtient finalement la formule de Toricelli : $\boxed{v = \sqrt{2gh} = 20 \text{ m/s}}$

12. Le débit volumique s'exprime : $\boxed{D_V = sv = 0,02 \text{ m}^3/\text{s}}$

13. Les pertes de charges peuvent être de deux types :

- Les pertes de charges **régulières** sont dues à la force de cisaillement du fluide visqueux avec les parois, elles dépendent de la rugosité de celle-ci
- Les pertes de charges **singulières** sont dues aux changements de direction et de géométrie de l'écoulement

Dans la canalisation horizontale, la section reste constante, les pertes de charges sont donc **régulières**. En notant ΔP_c la perte de charge, le théorème de Bernoulli s'écrit :

- liquide incompressible
- écoulement permanent
- une ligne de courant allant d'un point A de la surface libre à un point B en sortie du robinet

$$\boxed{\Delta \left[\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right] = -\frac{\Delta P_c}{\rho}}$$

14. La perte de charge dans la conduite entre les points A et B s'exprime :

$$\Delta P_c = -\Delta \left[P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho gz \right] = -\Delta P = P_A - P_B$$

D'après la relation fondamentale de la statique des fluides, $P = P_0 + \rho gh$. Donc :

$$\boxed{\Delta P_c = \rho g \Delta h \simeq 200 \text{ Pa}}$$

15. En supposant que les pertes de charges sont linéaires avec la longueur du tuyau, on a :

$$\Delta P_{c,L} = \frac{L}{\ell} \Delta P_{c,\ell} = 20 \text{ kPa}$$

16. D'après le théorème de Bernoulli avec pertes de charges et éléments actifs,

$$\Delta \left[\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right] = -\frac{\Delta P_c}{\rho} + w_i$$

avec w_i le travail indiqué massique. Pour retrouver le résultat de la question **2**, il faut que cette quantité soit nulle. La puissance indiquée doit donc valoir :

$$\mathcal{P}_i = D_m w_i = D_V \Delta P_c = 400 \text{ W}$$

III - Un dispositif original de climatisation

17. On assimile l'air à un gaz parfait avec $\gamma = 7/5$. Alors :

$$c_P = \frac{C_P}{m} = \frac{(n/m)R\gamma}{\gamma - 1} \Rightarrow c_P = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)} = 971 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$$

18. La masse volumique d'un gaz parfait s'écrit :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{(m/n)P}{RT} = \frac{PM}{RT}$$

- Pour $T_1 = 15^\circ\text{C}$, $\rho_1 = 1,25 \text{ kg/m}^3$
- Pour $T_2 = 30^\circ\text{C}$, $\rho_2 = 1,19 \text{ kg/m}^3$

La différence relative s'écrit :

$$e = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \simeq 5\%$$

La différence relative entre les deux masses volumiques extrémales reste faible. On peut donc considérer que la masse volumique du gaz reste constante au cours de l'évolution.

19. D'après le premier principe des systèmes ouverts appliqué à l'air traversant le déphaseur (pas de composants actifs, variations d'énergies cinétique et potentielle de pesanteur négligeables) :

$$\Delta h_{\text{air}} = c_p(T_1 - T_2) = q$$

La puissance thermique perdue par l'air s'écrit alors :

$$P_{\text{th}} = -D_m q = D_m c_p (T_2 - T_1) = 450 \text{ W}$$

20. L'énergie thermique maximale dont peut se débarrasser l'air dans le liquide pour le faire passer de T_1 à T_2 est :

$$Q_{(\text{max})} = \rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}} c_{\text{eau}} (T_2 - T_1) = 13,8 \text{ MJ}$$

La durée maximale pour laquelle ce dispositif pourrait fonctionner s'écrit :

$$\Delta t = \frac{Q_{(\text{max})}}{P_{\text{th}}} = 3,07 \cdot 10^4 \text{ s} = 8,51 \text{ h}$$

N.B. : Cette durée est très largement surévaluée. En effet, on s'attend à ce que le refroidissement de l'air soit moins efficace bien avant que l'eau n'ait atteint T_2 .

21. On peut évaluer la puissance du compresseur à l'aide du théorème de Bernoulli avec composé actif. On a :

$$\Delta \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = \frac{v^2}{2} = w_i$$

La vitesse du fluide peut se calculer à partir du débit volumique et de la section :

$$D_V = vS \Rightarrow v = \frac{D_V}{S} = \frac{D_V \ell}{V_{\text{air}}} = 0,60 \text{ m/s}$$

La puissance du ventilateur s'obtient donc :

$$P_{\text{vent}} = D_m w_i = D_m \frac{v^2}{2} = 0,0054 \text{ W}$$

L'efficacité pour ce dispositif peut être défini par :

$$e = \frac{P_{\text{th}}}{P_{\text{vent}}} = 8,3 \cdot 10^4$$

Il s'agit bien sûr d'un modèle idéal sans aucune perte. Le seul travail nécessaire ici est celui pour mettre en mouvement l'air qui est forcément très faible devant le transfert thermique entre l'eau et l'air.

22. L'efficacité d'un réfrigérateur réversible s'écrit (voir cours pour demo) :

$$e_C = \frac{Q_F}{W} = \frac{T_F}{T_C - T_F} = 19,2$$

Pour un réfrigérateur réel, on s'éloigne du comportement réversible et l'inégalité de Clausius devient stricte. En propageant cette inégalité dans le calcul précédent, on voit que $e_{\text{réel}} < e_C$.

N.B. : Néanmoins, dans le cas du déphaseur, le travail coûteux ne comprend pas le besoin de comprimer la phase gazeuse au dessus de la pression de saturation pour la faire se liquéfier car on n'a pas affaire ici à un cycle. Le travail du déphaseur ne sert qu'à faire circuler l'air dans la conduite et sera donc bien plus faible que pour un compresseur de réfrigérateur classique. Pour un déphaseur du commerce, on s'attend donc à avoir une efficacité bien plus grande.

23. Le déphaseur ne fonctionne pas de façon cyclique, car la température de la phase liquide augmente au fur et à mesure que l'air chaud passe. Pour que la température de la phase liquide reste égale à 15°C, on peut vaporiser une partie du liquide. Cela a pour effet de diminuer la quantité de liquide disponible, donc la capacité globale de la source froide dont le comportement s'éloigne progressivement de celui d'un thermostat. On s'éloigne donc d'un fonctionnement réversible hypothétique et l'efficacité diminue.

N.B. : Une autre possibilité consiste à suivre l'idée de l'énoncé en disant que l'on utilise le matin pour réchauffer l'air et le soir pour refroidir.

24. Probablement lié au fait que pour être maintenu à 15°C, il faut que le réfrigérateur élimine une partie de sa phase liquide fixe, d'où le nom de **déphaseur**.