

ASPECTS DE LA PROPULSION SPATIALE

I. — Généralité**I.A. — Aspect cinétique - Lois de vitesse**

$$1 \text{ — } \vec{p}_f(t) = m(t)\vec{v}(t). \quad \vec{p}_f(t+dt) = m(t+dt)\vec{v}(t+dt) = [m(t) + dm(t)][\vec{v}(t) + d\vec{v}(t)].$$

$$\vec{p}_g(t+dt) = -dm(t)(\vec{u} + \vec{v}(t+dt)) = -dm(t)(\vec{u} + \vec{v}(t) + d\vec{v}(t)). \text{ Avec : } dm(t) = -D_m dt.$$

$$2 \text{ — Le PFD appliqué au système fermé \{fusée+gaz\} s'écrit : } \frac{d\vec{P}_\Sigma(t)}{dt} = m\vec{g}. \text{ Or : } d\vec{P}_\Sigma(t) = \vec{P}_\Sigma(t+dt) - \vec{P}_\Sigma(t)$$

$$= [\vec{p}_f(t+dt) + \vec{p}_g(t)] - \vec{p}_f(t) = [(m+dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{u} + \vec{v} + d\vec{v})] - m\vec{v} = md\vec{v} - dm\vec{u}. \text{ D'où :}$$

$$m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} - \frac{dm(t)}{dt}\vec{u} = m(t)\vec{g}. \text{ Soit : } m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = D_m\vec{u} + m(t)\vec{g}. \text{ d'où : } \boxed{m(t)\frac{dv(t)}{dt} = D_mu - m(t)g} \quad (1).$$

$$3 \text{ — l'intensité de la force de poussée est : } F = D_mu. \text{ Pour que la fusée puisse décoller, il faut qu'au sol :}$$

$$\boxed{F = D_mu > m_0g}$$

$$4 \text{ — A } t = I_s, F = D_mu = m(I_s)g = \frac{m(I_s)}{I_s}u \Rightarrow \boxed{I_s = \frac{u}{g}}.$$

$$5 \text{ — (1) } \Rightarrow dv = \frac{u}{m}D_m dt - gdt = -u\frac{dm}{m} + \frac{gdm}{D_m} \Rightarrow \boxed{v(m) = u \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - \frac{m_0 - m(t)}{D_m}g} \quad (2).$$

$$6 \text{ — En apesanteur, } g = 0. (2) : \Rightarrow \boxed{\Delta V = v_f - v_i = u \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)} : \text{ Relation de Tsiolkovski.}$$

$$7 \text{ — En deux étages : } \Delta V_1 = u \ln\left(\frac{m_t}{m_t - m_{c1}}\right) ; \Delta V_2 = u \ln\left(\frac{m_t - m_{t1}}{m_t - m_{t1} - m_{c2}}\right).$$

$$\text{AN : } \Delta V_1 \# 5,49 \text{ km.s}^{-1} ; \Delta V_2 \# 7,17 \text{ km.s}^{-1} ; (\Delta V)_{2\text{étages}} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \# 12,7 \text{ km.s}^{-1}.$$

$$\text{avec un seul étage : } (\Delta V)_{1\text{étages}} = u \ln\left(\frac{m_t}{m_t - m_c}\right). \text{ AN : } (\Delta V)_{1\text{étages}} \# 9,04 \text{ km.s}^{-1}.$$

Avec deux étages, l'accroissement de vitesse est plus important qu'avec un seul.

$$8 \text{ — } \Delta V = u \ln\left(\frac{m_u + m_c}{m_u}\right) \Rightarrow m_c = m_u \left(\exp\left(\frac{\Delta V}{u}\right) - 1 \right). \text{ AN : Avec une propulsion chimique } \underline{m_{c1} \# 1240 \text{ kg}}.$$

avec une propulsion ionique $m_{c2} \# 142 \text{ kg}$: les dépenses en carburant sont nettement plus faibles dans le cas d'une propulsion ionique.

I.B. — Aspect énergétique - Rendement propulsif du moteur fusée

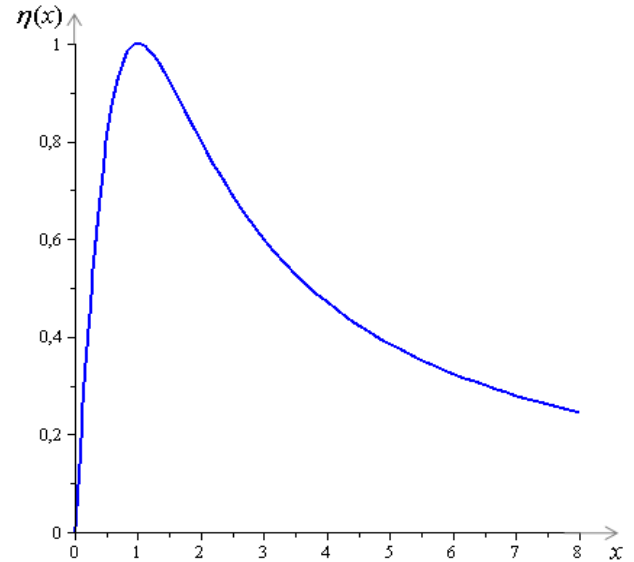
$$9 \quad dEc = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{u})^2 dm = \frac{1}{2}D_m (v-u)^2 dt \Rightarrow P_{jet} = \frac{dEc}{dt} = \frac{1}{2}D_m (v-u)^2.$$

- La puissance reçue par la fusée de la part de la force de poussée est : $P_{reçue} = \vec{F} \cdot \vec{v} = D_m uv$.

$$10 \quad \eta = \frac{P_{reçue}}{P_{reçue} + P_{jet}} = \frac{2uv}{2uv + (v-u)^2} = \frac{2uv}{u^2 + v^2} = \frac{2(u/v)}{1 + (u/v)^2} \cdot x = \frac{u}{v} \cdot (\text{ou } v/u).$$

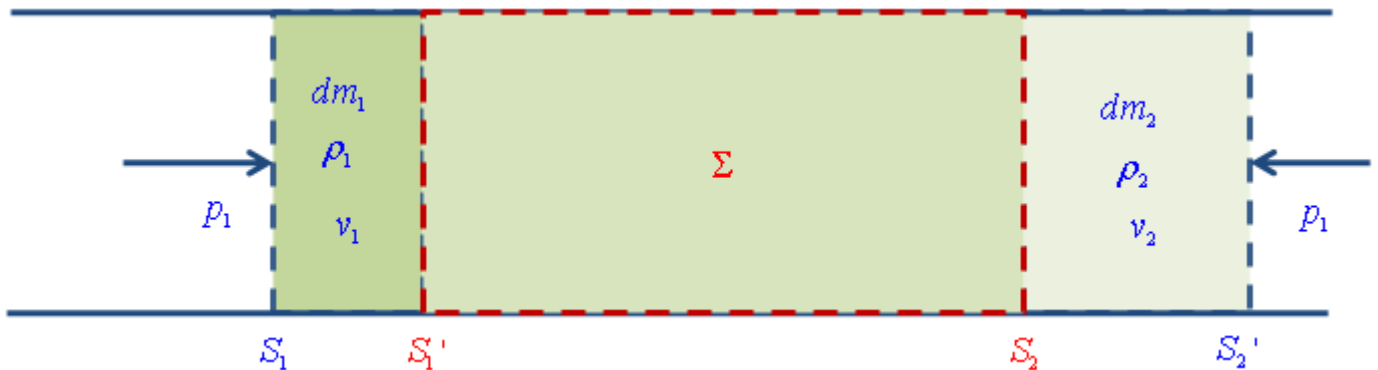
11 —

- $\eta'(x) = 0 \Rightarrow 1 + x^2 = 2x^2$. Le rendement est donc maximal pour $x = \frac{u}{v} = 1$.
- η est nul pour x nul ou infini.
- Ce résultat est prévisible. En effet, $x = 0 (u = 0)$ correspond à une force propulsion est nulle et $x = \infty (v = 0)$ correspond à une fusée encore au repos et donc une puissance reçue nulle.
- Pour $u = v$, $P_{jet} = 0$ et $\eta = 1 = \eta_{max}$.



II. — Limites de la propulsion chimique

12 — notons Σ^* le système fermé considéré et considérons le système ouvert Σ compris entre S_1' et S_2 .



Le 1^{ier} principe de la thermodynamique appliqué à Σ^* s'écrit : $dE^*(t) = \delta Q + \delta W' + \delta W_p$. $dE^* = E^*(t+dt) - E^*(t)$.

$$E^*(t+dt) - E^*(t) = E(t+dt) + e_2 dm_2 - E(t) + e_1 dm_1 = dE(t) + [edm]_1^2, \text{ où : } e = u + e_{cmac} + e_{pmac} \text{ et } e_{cmac} = v^2 / 2.$$

$\delta W_p = p_1 dV_1 - p_2 dV_2 = - \left[\frac{p}{\rho} dm \right]_1^2$. d'où : $dE(t) + \left[\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + e_{pmac} \right) dm \right]_1^2 = \delta Q + \delta W'(1)$. Dans le champ de pesanteur, $e_{pmac} = gz + cst$. En régime permanent : $dE(t) = 0$ et $dm_1 = dm_2 = dm$. L'expression (1) du 1^{ier}

principe devient : $\boxed{\left[\left(h + \frac{v^2}{2} + gz \right) \right]_1^2 dm = \delta Q + \delta W'}$ (2). $h = u + \frac{p}{\rho}$ (enthalpie massique).

13 — La tuyère est horizontale et sans travail autre que celui des forces de pression, de plus le transfert

thermique et négligeable. (2) $\Rightarrow \left[\left(h + \frac{v^2}{2} \right) \right]_c^s dm = 0 \Rightarrow \frac{v_s^2}{2} - 0 = h_c - h_s = c_p [T_c - T_s] \approx c_p T_c$.

On en déduit la vitesse du gaz en sortie de la tuyère :
$$v_s = \sqrt{\frac{2\gamma R}{M(\gamma-1)} T_c}.$$

14 — AN : le gaz éjecté est H_2O , $M = 18 g.mol^{-1}$, $v_s \approx 1,18 km.s^{-1}$. $I_s = \frac{v_s}{g} \approx 110s$.

III. — Le moteur plasma micro-ondes

III.A. — Principe de fonctionnement

15 — Un électron libre est soumis à :

- la force électrique de l'onde : $\vec{f}_e = -e\vec{E}$.
- la force magnétique de l'onde: $\vec{f}_m = -e\vec{v}_e \times \vec{B}$. $\frac{|\vec{f}_m|}{|\vec{f}_e|} \leq \frac{|\vec{v}_e \vec{B}|}{|\vec{E}|} = \frac{\|\vec{v}_e\|}{c} \ll 1$. (négligeable).
- son poids : $\vec{P} = m_e \vec{g}$, négligeable. $|\vec{P}| \sim |\vec{f}_e| \Rightarrow E_0 \sim \frac{m_e g}{e} \approx 5.10^{-11} V.m^{-1}$: trop faible !!
- effet des autres charges (négligés dans un plasma suffisamment dilué)

16 — le PFD appliqué à un électron libre s'écrit: $m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} \approx \vec{f}_e = -e\vec{E}$ (3). en régime établi (3) $\Rightarrow i\omega m_e \vec{v}_e = -e\vec{E}$.

D'où : $\vec{j} = -ne\vec{v}_e = \frac{ne^2}{i\omega m_e} \vec{E} = \underline{\sigma} \vec{E}$. où : $\underline{\sigma} = \frac{ne^2}{i\omega m_e}$.

17 —

- le plasma renferme n ions monovalent par unité de volume et autant d'électrons. Donc :

$\rho = ne - ne = 0$. Au passage de l'onde $\underline{\rho} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial y} = 0$: le plasma est donc électriquement

neutre et le reste au passage de l'onde.

- Equation de propagation :

O na : $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. D'où l'équation

de propagation : $\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ (4). Pour une onde harmonique transmise dans le plasma, (4) $\Rightarrow$

$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E} = \mu_0 i\omega \underline{\sigma} \vec{E}$. D'où la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n\mu_0 e^2}{m_e} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0 c^2} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$.

18 — l'onde ne peut se propager dans le plasma que si k est réel. Soit : $\omega < \omega_p$. Si $\omega > \omega_p$, l'onde est évanescence, et se réfléchit à l'interface vide – plasma.

19 — D'après le PFD : $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{v}_e \times \vec{B}$. En projection sur Oz : $m_e \frac{dv_{ez}}{dt} = -e(\vec{v}_e \times \vec{B}) \cdot \hat{u}_z = 0 \Rightarrow$

$v_{ez} = cst = v_{ez}(0) = 0 = \dot{z} \Rightarrow z = cste$: Le mouvement de l'électron est donc plan, normal au champ.

En posant : $\vec{\omega}_c = \frac{e\vec{B}}{m_e}$, le PFD $\Rightarrow \frac{d\vec{v}_e^2}{dt} = 2\vec{v}_e \cdot \frac{d\vec{v}_e}{dt} = 2\vec{v}_e \cdot (\vec{\omega}_c \times \vec{v}_e) = 0$: le mouvement est donc uniforme. Dans la base de Frenet : $\frac{\vec{v}_e^2}{R_C} \hat{u}_N = \vec{\omega}_c \times \vec{v}_e \Rightarrow R_C = \frac{v_e}{\omega_c} = \frac{m_e v_e}{eB} = cst$: le mouvement est en plus circulaire. La période de rotation est : $T_c = \frac{2\pi R_C}{v_e} = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m_e}{eB}$, indépendante de v_e .

La pulsation cyclotron est : $\omega_c = \frac{eB}{m_e}$. AN : $\omega_c \# 3,51.10^{10} rad.s^{-1}$.

20 — le champ électrique accélère les électrons. Le champ magnétique confine leurs trajets.

21 — $\omega_c^2 = \omega^2 \geq \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0} \Rightarrow n_{\max} = \frac{m_e \epsilon_0}{e^2} \omega_c^2 = \frac{\epsilon_0 B^2}{m_e}$. AN : $n_{\max} \# 3,89.10^{17} m^{-3}$ (faible comparé aux métaux)

22 — l'énergie d'un photon micro-onde de pulsation $\omega \simeq \omega_c$ est : $E = \hbar \omega_c$. AN : $E \# 23,1 \mu eV \ll 12 eV$.

La pulsation est trop faible pour que l'on puisse envisager une photo-ionisation.

III.B. — Poussée

23 — $I = \frac{dq}{dt} = \frac{dN.e}{dt} = \frac{dm.e}{\mu dt}$. Soit : $I = \frac{e}{\mu} D_m$.

24 — d'après le TEC : $\frac{1}{2} \mu v_s^2 - 0 = e(V_a - 0) \Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{2eV_a}{\mu}}$. D'où : $F = D_m v_s = D_m \sqrt{\frac{2eV_a}{\mu}} = I \sqrt{\frac{2\mu V_a}{e}}$.

25 — $F = I \sqrt{\frac{2\mu V_a}{e}} = j \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2\mu V_a}{e}} = \frac{2\pi \epsilon_0}{9} \frac{D^2}{d^2} V_a^2$.

26 — AN : $F = N \frac{2\pi \epsilon_0}{9} \frac{D^2}{d^2} V_a^2 \# 4,26 mN$. $v_s = \sqrt{\frac{2eV_a}{\mu}} = \sqrt{\frac{2N_A e V_a}{M}} \# 32,1 km.s^{-1}$: faible force de poussée et

vitesse d'éjection assez grande. $D_m = \frac{F}{v_s} \# 0,468 g.h^{-1}$. Pendant 90 jours de fonctionnement, la consommation en

xénon est de : $\Delta m \# 1,03 kg$: assez faible consommation d'où l'importance de la propulsion ionique.

La puissance cinétique transmise au gaz éjecté est : $P_{cin} = \frac{1}{2} D_m v_s^2 = \frac{1}{2} F v_s$. AN : $P_{cin} \# 68,4 W$.

27 — pour éviter le ralentissement et le retour vers la grille des ions éjectés.

IV. — Application du moteur ionique au maintien d'un satellite en orbite basse

28 — $E_p = -\frac{Gm_s M_t}{r}$; $m_s \frac{v^2}{r} = \frac{Gm_s M_t}{r^2} \Rightarrow E_c = -\frac{E_p}{2} = -E_m$. sous l'effet d'une force de freinage,

$\frac{dE_m}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} > 0$.

29 — $\Delta h \ll h, E_m(h) = -\frac{Gm_s M_t}{2(R_t + h)} \Rightarrow \Delta E_m = -\frac{\Delta h E_m}{(R_t + h)}$. AN : $\Delta E_m \# -22,4 kJ$.

30 — la variation d'énergie mécanique apportée par le moteur est : $\Delta E'_m = F \Delta h \# 0,085 J$, insuffisante pour compenser ΔE_m . D'autres ressources en énergie sont indispensables (panneaux solaires).