

"Aspects de la propulsion spatiale"

I Généralités

① masse de gaz éjectée pendant dt : $\Delta m = \dot{m} dt$

→ $\vec{p}_g = [-u + v(t+dt)] \dot{m} dt \vec{u}_z$ et $\vec{p}_f(t) = m(t) \vec{v}(t)$ et $\vec{p}_f(t+dt) = m(t+dt) \vec{v}(t+dt)$
 $= [m(t) - \dot{m} dt] \vec{v}(t)$

② $\vec{p}_{FD} \vec{a} (f_{usee} + g_z) = \Sigma f_{ext}$ dans R_{gdl} :

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_f(t+dt) + \vec{p}_g - \vec{p}_f(t)}{dt} = \frac{m(t) \vec{v}(t+dt) - \dot{m} dt \vec{u}_z - m(t) \vec{v}(t)}{dt}$$

$$= m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} - \dot{m} \vec{u}_z = \Sigma \vec{F}_{ext} = m(t) \vec{g}$$

donc sur $\vec{u}_z$: $m(t) \frac{dv}{dt} = (\dot{m} u - m(t) g) - (1)$

③ Decolage si $\dot{m} u > m(t) g$

④ Poussée par une masse $m = \dot{m} u \approx \frac{m}{I_s} u \approx \frac{1}{I_s} m g$
 soit $I_s = \frac{u}{g}$ (homogène).

⑤ L'équation (1) s'écrit $\left(\frac{dv}{dt} = -\frac{\dot{m}}{m} u - g \right) \times dt$
 en intégrant depuis $t=0$: $v(t) - v(0) = v(t) = -u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} - g \int_0^t dt$
 soit $v(t) = u \ln \left[\frac{m_0}{m(t)} \right] - g t$

⑥ Hors de l'attraction terrestre on écrit $v(t) = u \ln \left[\frac{m_0}{m(t)} \right]$
 donc $\Delta v = v_f - v_i = u \ln \left(\frac{m_i}{m_f} \right) > 0$

⑦ 2^e étage
 - 20 t (kg)

1^{er} étage
 - 100 t (kg)

→ Fusée à 1 seul étage : $\Delta v_1 = u \ln \frac{134}{14} = 904 \text{ km/s}$

→ Fusée à 2 étages (en considérant que le premier étage est simplement détaché, et non éjecté !):

$$\Delta v_2 = u \ln \frac{134}{34} + u \ln \frac{24}{4} = 12,7 \text{ km/s}$$

Avec 2 étages, on évite d'avoir à propulser une "masse morte".

⑧ Toujours sans considérer l'attraction terrestre, et avec une propulsion simplifiée à 1 seul étage : $\Delta v = u \ln \left(\frac{m_u + m_c}{m_u} \right)$

soit $m_c = m_u \left(\exp \left(\frac{\Delta v}{u} \right) - 1 \right)$

AN : m_{c2} (chimique) = 1250 kg = 1,25 t.

m_{c2} (ionique) = 142 kg $\approx \frac{m_{c2}}{9}$: moins lourd !

⑨ $dE_{\text{gaz}} = \frac{1}{2} \dot{m} m (u-v)^2$ donc $P_{\text{jet}} = \frac{1}{2} \dot{m} m (u-v)^2$

$P_{\text{poussée}} (R_{gdl}) = \vec{F}_{\text{poussée}} \cdot \vec{v} = \dot{m} m u v$

⑩ Le point délicat consiste à définir le rendement propulsif :

→ la puissance cinétique gagnée est celle de la poussée : $\dot{m} m u v$.

→ la puissance totale dépensée est la somme des deux : $P_{\text{jet}} + P_{\text{poussée}}$.

$$\eta(x) = \frac{P_{\text{poussée}}}{P_{\text{poussée}} + P_{\text{jet}}} = \frac{\dot{m} m u v}{\dot{m} m u v + \frac{1}{2} \dot{m} m (u^2 - v^2 - 2uv)}$$

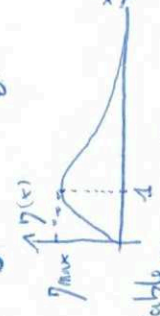
$$= \frac{u v}{0 + \frac{1}{2} (u^2 + v^2)} = \frac{2 u v}{v^2 (1 + \frac{u^2}{v^2})} = \frac{2 (\frac{u}{v})}{1 + (\frac{u}{v})^2} = \frac{2x}{1+x^2}$$

⑪ $\frac{d\eta}{dx} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ d'annule en $x=1$. $\eta_{\text{max}} = 1$

Rendement nul si $u=0$ ou $v \rightarrow +\infty$.

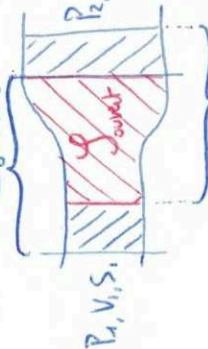
Il est optimal si on garde $\forall t$ $u(t) = v(t)$ variable.

(mais l'énoncé précise que ce n'est pas nécessaire)



II Limites de la propulsion chimique -

(12) Le plus grand soin doit être apporté à cette démonstration.



En écoulement stationnaire, le débit massique $\dot{D}_m = \frac{dm}{dt}$ se conserve.

Le Premier Principe appliqué à Σ_{perm} s'écrit :

$$\begin{aligned} d(U+E_m)_{\Sigma_{perm}} &= d(U+E_m)_{\Sigma_{perm}} + \dot{D}_m dt (u_2 - u_1 + p_2 v_2 - p_1 v_1) \\ &= -P_1 \int_{V_1} dV - P_2 \int_{V_2} dV + W' + Q \\ &= P_1 V_1 - P_2 V_2 + W' + Q \end{aligned}$$

soit : $\left[\dot{D}_m dt \left[u + \frac{p}{\rho} + e_p \right]_1 \right]_1 = W' + Q$: Premier Principe en écoulement.

(13) D'après l'énoncé, le résultat précédent s'écrit $\left[h + e_p \right]_{\text{entrée}}^{\text{sortie}} = q = 0$.

soit $c_p (T - T_c) + \frac{v^2}{2} - \frac{v_c^2}{2} = 0$ d'où $v_c = \sqrt{2 c_p T_c}$

avec $c_p = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$ (massique)

(14) AN : $M = M_{H_2O}$ (car $2H_2 + O_2 = 2H_2O$ exothermique)
 $= 0,018 \text{ kg.mol}^{-1}$

$v_c = 3,11 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$ et $I_s = \frac{u}{g} = \frac{v_c}{g} = 317 \text{ s} = I_s$

Dans les conditions de combustion décrites par l'énoncé, la propulsion chimique est limitée à une vitesse d'injection inférieure à 4 km/s.

III Le moteur plasma micro-ondes -

(15) Les forces extérieures appliquées à chaque électron sont (sans collisions) :

- le poids négligeable devant la force de Lorentz
- la force de Lorentz $\vec{F} = -e\vec{E} + -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ et $vB \approx v \frac{E}{c} \ll E$.

On ne considère donc, sous ces hypothèses, que la force électrique $-e\vec{E}$.

(16) Régime de propagation (RSF) → écrite en complexes :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \rightarrow i\omega m_e \vec{v} = -e\vec{E}$$

Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (densité de courant $\vec{j} = n(-e)\vec{v}$)

d'où $\sigma = \frac{\vec{j}}{\vec{E}} = \frac{n \cdot e^2}{i\omega m_e}$: conductivité électrique imaginaire pure - ($\vec{j}$ et $\vec{E}$ en quadrature : pas d'effet Joule)

(17) $\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ car $E_y = f(x)$. Donc $\rho = \epsilon \text{div} \vec{E} = 0$

$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(0) - \Delta \vec{E} = \text{rot}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec{j}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

d'où $\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ (NB : on reste en complexes !)

En injectant la forme de la solution proposée dans cette équation d'onde :

OPPT : $(-ik)^2 \vec{E} = -\mu_0 n e^2 (i\omega) \vec{E} + \frac{(i\omega)^2}{c^2} \vec{E}$ et $\mu_0 \epsilon = \frac{1}{c^2}$

$\Leftrightarrow \left[k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n e^2 \mu_0}{m_e} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \right]$ Klein-Gordon, avec $\omega_p^2 = \frac{n e^2}{\epsilon m_e}$

(18) si $\omega > \omega_p$: $k^2 > 0$ donc $k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ est réel : propagation (sans atténuation)

si $\omega < \omega_p$: $k^2 < 0$ donc $k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$ est imaginaire pure → atténuation sans propagation → onde évanescente.

19) Question hors programme: le mouvement circulaire doit être admis - Dans ce cas, $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne travaillant pas, le mouvement est uniforme - (car $\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$) -

S'il est aussi circulaire $\vec{OH} = R\vec{u}_r$, $\vec{v} = R\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r$, $\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$.

donc $\boxed{PFD} \vec{a} \{m_e\}$: $m_e \vec{a} = -e \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -eB\dot{y} & +eB\dot{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$: mvt dans le plan (xOy) -

En polaires dans (xOy): $m_e \frac{v^2}{R} = e v B_0$ soit $v = \frac{e B_0 R}{m_e}$.
La pulsation du mouvement est $\omega_c = 2\pi f_c = \frac{2\pi v}{2\pi R} = \frac{e B_0}{m_e}$ (indép. de v).
AV: $\omega_c = 3,52 \cdot 10^{10} \text{ rad/s}$.

Remarque: démontrons tout de même que le mouvement uniforme est circulaire.

$\boxed{PFD} \vec{a} \{m_e\}$: $\begin{cases} m_e \ddot{x} = -eB\dot{y} \\ m_e \ddot{y} = +eB\dot{x} \end{cases}$ on pose $u = x + iy$ -

on a directement: $m_e \ddot{u} = eB(-\dot{y} + i\dot{x}) = i eB \dot{u}$
polynôme équivalent $x^2 - i \frac{eB}{m} x = r(r - i\omega_c) = 0 \rightarrow r = 0$ ou $r = i\omega_c$ -
donc $u(t) = x(t) + i y(t) = A e^{i\omega_c t} = A [\cos(\omega_c t) + i \sin(\omega_c t)]$.

On identifie $x(t)$ et $y(t)$, et en sommant $x^2 + y^2 = A^2$ (eq d'un cercle de rayon A)
égal à $A = R = \frac{m_e v}{e B_0}$.

20) Seule la force électrique travaille; sa puissance est $P_{\text{elec}} = -e \vec{E}_y \cdot \vec{y} = f(\omega_c)$ - avec $\dot{y}(t) = -R \omega_c \cos(\omega_c t)$ d'après ce qui précède, on a via le $\boxed{TEC}$:
 $\frac{dE}{dt} = -e E_y \cdot \dot{y} = +e E_0 R \omega_c \cos^2(\omega_c t - kx)$ non nulle en moyenne -

→ donc si $\omega \approx \omega_c$, alors la puissance est strictement positive: ils accélèrent!

21) Pour que l'onde se propage, il faut $\omega > \omega_p$ - Pour que l'accélération des électrons soit effective, a in de favoriser l'ionisation du Xénon, il faut de plus que $\omega \approx \omega_c$ -

Ainsi, il faut $\omega_c > \omega_p \Leftrightarrow \left(\frac{e B_0}{m_e}\right)^2 > \frac{n \cdot e^2}{\epsilon_0 m_e}$
 $\Leftrightarrow n < \frac{\epsilon_0 B_0^2}{m_e} = n_{\text{max}} = 3,85 \cdot 10^{17}$ particules par m^3 -

22) A la fréquence $\omega \approx \omega_c$, l'énergie d'un photon vaut:
 $E = h\nu = \hbar \omega_c \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ eV} < 12 \text{ eV}$ -

Il faudrait ainsi absorber $6 \cdot 10^5$ photons par atome: impossible -

23) Le courant électrique est le flux de charges: $I = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{Dm}{\mu} \cdot e\right)$ -
nombre de Xe qui passent par unité de temps -

24) $F_{\text{puissance}} = Dm \cdot \mu = \frac{\mu I}{e} \cdot \mu$

D'après le $\boxed{TEC}$ appliqué à un ion Xe^+ : $\frac{1}{2} \mu u^2 = e V_a \rightarrow \mu = \sqrt{\frac{2 e V_a}{\mu}}$ -
d'où $F_{\text{puissance}} = I \sqrt{\frac{2 \mu V_a}{e}}$ -

25) $jS = j\pi \frac{D^2}{4} = I$ donc $F_{\text{puissance}} = \frac{2\pi \epsilon_0 D^2 V_a}{g d^2}$ -

26) Avec $N = 2200$ jets cylindriques de plasma, on a $F_{\text{puissance}} = 4,26 \cdot 10^{-3} \text{ W}$ -
La vitesse d'éjection est $u = \sqrt{\frac{2 e V_a}{\mu}} = 32,1 \text{ km/s}$ -

La masse éjectée en 50 jours est $\Delta M = Dm \cdot \Delta t = \frac{F_{\text{puissance}}}{\mu} \Delta t = 1,03 \text{ kg}$ -
Dans le référentiel de la fusée $P_{\text{gaz}} = \frac{1}{2} Dm u^2 = 68,4 \text{ W}$ -

27) Afin que la fusée reste neutre, il faut aussi la libérer des électrons qu'il vient neutraliser les ions éjectés, évitant du même coup une pollution ionique à l'extérieur

IV) Maintien d'un satellite en orbite basse.

28) Mouvement quasi-circulaire uniforme à $R = R_T + h$.

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GM_T m}{R^2} \quad \text{d'après le [PFD] appliquée à m dans } R_{\text{gal}}.$$

$$d'où \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{GM_T m}{R} = - \frac{E_p}{2}.$$

donc $E_m = E_c + E_p = -E_c$. Les frottements font chuter E_m ,
donc ils vont augmenter E_c lois de la chute circulaire.

$$29) \quad E_m = -E_c = - \frac{GM_T m}{2R} \quad \text{donc} \quad \frac{\Delta E_m}{E_m} = \frac{\Delta h}{R} \rightarrow \Delta E_m \approx \underline{\underline{22,5 \cdot 10^3 \text{ J}}}$$

($R = R_T + h$)

30) La chute du satellite est due aux frottements $\vec{F}_{\text{frot}}$.

La norme de cette force appliquée sur 1 tour (distance $2\pi R$) est $\vec{F}_{\text{frot}} = \frac{\Delta E_m}{2\pi R}$.

$$\text{AV: } F_{\text{frot}} \approx 5,39 \cdot 10^{-4} \text{ N} \approx \frac{F_{\text{pousée}}}{8}$$

donc le moteur ionique permet de maintenir l'orbite du satellite;
il suffit pour cela de l'allumer environ 1 minute sur 8.