

Révisions
Sujet écrits

Correction – CCP TSI 2015 physique-chimie

I – La planète Terre, unique planète du système solaire à abriter la vie

I.A – La présence d'eau liquide

- 1 - 1 : gaz ; 2 : liquide ; 3 : solide ; 4 : fluide supercritique.
- 2 - A est le point triple ; B est le point critique.
- 3 - Sous forme solide (glace).
- 4 - Le tableau indique à la surface de Mars une pression de 600 hPa (soit 0.6 bar) et une température de -100° à 0° (soit entre 173.15 K et 273.15 K). On voit dans le diagramme p - T que ceci correspond au domaine solide pour l'eau.
- 5 - À la surface de la Terre on observe des dépôts de sels dans des zones asséchées...
- 6 - $^{35}_{17}\text{Cl}$ Noyau : 35 nucléons, dont 17 protons et $35 - 17 = 18$ neutrons. L'atome étant neutre, le nuage électronique possède 17 électrons.
- 7 - On utilise les règles de remplissage (en s'aidant du diagramme en triangle) : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$.
- 8 - L'ion monoatomique le plus stable formé par cet élément sera celui qui permet de remplir la sous-couche 3p, il s'agit donc de $\boxed{\text{Cl}^-}$, de structure électronique $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$.
- 9 - On raisonne sur l'ion chlorure. Ceux au centre des faces comptent pour $1/2$, et ceux aux coins comptent pour $1/8$, donc par maille il y en a : $6 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{8} = \boxed{4}$.
Concernant l'ion sodium, il y en a 1 au centre et 12 sur les arêtes comptant chacun pour $1/4$, donc dans une maille : $1 + 12 \times \frac{1}{4} = \boxed{4}$.
- 10 - La formule chimique de ce cristal est donc NaCl (autant d'atomes de chaque par maille) (attention, on n'écrit pas Na_4Cl_4 !).
- 11 - L'ion chlore est Cl^- . Par électroneutralité, et étant donné qu'il y a autant de Na que de Cl par maille, la charge de l'ion Na est nécessairement $+1$. Donc $\boxed{\text{Na}^+}$.
L'ion sodium est dans la première colonne de la classification, donc dans la famille des alcalins.
- 12 - Les anions et cations sont toujours en contact. Ici le contact s'effectue le long d'une arête. On a donc $a = 2r_{\text{Cl}} + 2r_{\text{Na}}$. On peut donc en déduire la somme des deux rayons, mais pas la valeur de chacun d'entre eux.

I.B – La présence d'une atmosphère

- 13 - (Question un peu vague...) La présence d'une atmosphère est nécessaire pour maintenir une certaine pression à la surface de la planète, et ainsi permettre la présence d'eau liquide (si la pression est très faible, on voit sur le diagramme p - T de l'eau que celle-ci est plutôt sous forme gazeuse). Une atmosphère permet également de réguler la température à des valeurs raisonnables via l'effet de serre.

I.B.1 – L'influence de la concentration en dioxyde de carbone

- 14 - Loi des gaz parfaits : $pV = nRT$, avec p la pression en pascals, V le volume en mètres cube, n la quantité de matière en moles, T la température en kelvins, et R la constante des gaz parfaits en joules par kelvins par moles.

On a $\rho = \frac{m}{V}$ et $m = n \times M$, donc $\rho = \frac{nM}{V} = \frac{pM}{RT}$, soit $\rho(z) = \frac{p(z) M}{R T_0}$.

- 15 - On a $\frac{dp}{dz} = -\rho(z) g = -\frac{p(z) M}{R T_0} g = -\frac{p(z)}{H}$ avec $H = \frac{R T_0}{M g}$.

Cette dernière équation est de la forme $f' = af$, et s'intègre en $p(z) = A \exp\{-z/H\}$.

On détermine la constante A en sachant que $p(z = 0) = p_0$. On a donc $A = p_0$.

Finalement, $p(z) = p_0 \exp\{-z/H\}$. La constante H est une longueur (car le terme z/H dans l'exponentielle est nécessairement sans dimension).

- 16 - On voit sur le relevé de température que la troposphère n'est pas isotherme. Cette hypothèse de notre modèle n'est donc pas vérifiée en pratique, et on s'attend donc à des écarts entre les prévisions de notre modèle pour la pression et les observations (il faudrait des valeurs mesurées pour pouvoir réellement comparer).

Un autre modèle possible est celui d'une température $T(z)$ affine : $T(z) = T_0 - \lambda z$, avec T_0 et λ choisis pour que $T(z)$ corresponde le plus possible au relevé expérimental.

- 17 - Vénus est plus éloignée que Mercure du Soleil. Elle reçoit donc moins d'énergie thermique par rayonnement. Et pourtant son atmosphère est significativement plus chaude. Ceci s'explique par le fait que Vénus possède une atmosphère dense riche en dioxyde de carbone, alors que Mercure est quasiment dépourvue d'atmosphère. Le dioxyde de carbone permet, via l'effet de serre, de maintenir une température élevée.

I.C – La présence d'un champ magnétique

I.C.1 – Généralités

Remarque : Le schéma de la figure 5 est complètement disproportionné.

- 18 - Le fer étant liquide, le mode dominant de transfert thermique est convectif.
- 19 - Il s'agit d'une solidification, et l'enthalpie massique de solidification est négative, ce qui en fait une transformation exothermique. On parle également de chaleur latente de solidification.
- 20 - Vénus possède un noyau liquide. Mais les gradients thermiques y sont peut-être trop faibles, ou encore la rotation de la planète trop lente, pour pouvoir entretenir le processus de dynamo. (Question un peu vague, cette question est en fait encore un sujet de recherche...)

I.C.2 – Mesure de la composante horizontale locale du champ magnétique terrestre

- 21 - ★ On se place en coordonnées cylindriques dont l'axe z est le long du fil.

★ Symétries : On place un point M arbitrairement.

Le plan qui contient l'axe Oz et le point M coupe le fil exactement en deux, c'est donc un plan de symétrie de la distribution de courants.

Or le champ magnétique est orthogonal aux plans de symétrie.

On en déduit que $\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$.

★ Invariances : La distribution de courants est invariante par translation selon l'axe z , donc B_θ ne dépend pas de z .

Elle est également invariante par rotation autour de l'axe z (d'angle θ), donc B_θ ne dépend pas de θ .

★ Finalement, on a $\boxed{\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e}_\theta}$.

22 - ★ Faire un schéma.

★ On considère un point M situé à une distance r de l'axe.

★ Le contour d'Ampère choisi est un cercle $\mathcal{C}$ dont le centre est sur l'axe Oz , de rayon r et passant par M . On l'oriente tel que $\vec{dl}$ soit selon $\vec{e}_\theta$, c'est-à-dire tel que la normale au disque soit selon $+\vec{e}_z$.

★ Le théorème d'Ampère annonce que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$.

On a ici $I_{\text{enlacé}} = +I$.

Et

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} &= \oint_{\mathcal{C}} B_\theta(r) \vec{e}_\theta \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} B_\theta(r) dl \\ &= B_\theta(r) \oint_{\mathcal{C}} dl \\ &= B_\theta(r) \times 2\pi r. \end{aligned} \quad (1)$$

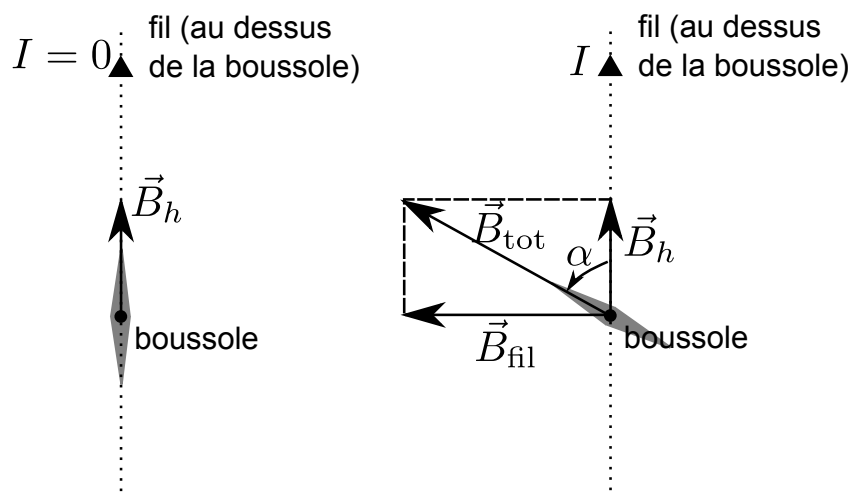
On a donc finalement $B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, et $\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$.

23 - On trouve $\boxed{\|\vec{B}\| = 10^{-5} \text{ T}}$.

24 - L'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre, à la surface de la Terre, est de $0.5 \times 10^{-4} \text{ T}$, soit 0.05 mT . Le teslamètre n'est donc pas assez précis.

25 - La photographie du dispositif n'est pas forcément très claire, et il faut comprendre que l'axe de rotation de la boussole est orthogonal au fil et passe par le fil si on le prolonge.

On va placer le dispositif de sorte à ce que, à courant nul, l'aiguille et le fil pointent vers le nord magnétique. On est alors comme sur le schéma ci-dessous à gauche (rappelons qu'une boussole s'aligne avec la direction du champ magnétique ambiant).



On impose ensuite un certain courant $I > 0$ dans le fil. Le champ magnétique créé étant selon $\vec{e}_\theta$, et le fil étant juste au dessus de la boussole, le champ magnétique créé par le fil au niveau de la boussole sera alors comme sur la figure ci-dessus à droite.

Le champ total est la somme du champ terrestre et du champ produit par le fil (principe de superposition). Il fait donc un angle α avec la direction précédente de la boussole, que l'on peut mesurer.

Or, cet angle α est donné par $\tan \alpha = \frac{\|\vec{B}_{\text{fil}}\|}{\|\vec{B}_h\|}$. On connaît $\|\vec{B}_{\text{fil}}\|$ pour un courant donné et une distance au fil donnée d'après la question 22.

On en déduit donc $\boxed{\|\vec{B}_h\| = \|\vec{B}_{\text{fil}}\| / \tan \alpha}$.

26 - On attend un schéma avec l'alimentation, l'ampèremètre, le fil et la boussole.

27 - Il faut mesurer l'angle α , la distance r entre le fil et le centre de la boussole, et le courant I qui parcourt le fil.

28 - Il n'y a pas d'indication d'échelle sur la photographie du dispositif. Supposons donc que la boussole soit à $r = 2$ cm du fil (lorsqu'elle lui est parallèle).

Il faut choisir l'intensité I pour que l'angle α soit suffisamment grand pour être mesurable, mais pas trop grand car sinon le champ magnétique créé par le fil n'est pas du tout uniforme sur l'ensemble de la boussole. Disons donc que l'on veut $\alpha = 10^\circ$ (soit 0.17 rad).

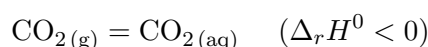
Comme on sait que $\|\vec{B}_h\| \simeq 5 \times 10^{-5}$ T, il faut que $\|\vec{B}_{\text{fil}}\| \simeq 10^{-5}$ T. D'après la question 23, il faut donc un courant de l'ordre de 1 A.

II.A – Les dangers d'une atmosphère trop concentrée en dioxyde de carbone sur la survie des espèces calcaires dans l'océan

29 - La concentration en $\text{CO}_2(\text{g})$ dans l'atmosphère est limitée par la photosynthèse.

30 - Loi de Van't Hoff : $\boxed{\frac{d \ln K^0(T)}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2}}$, avec K^0 la constante d'équilibre de la réaction considérée, $\Delta_r H^0$ l'enthalpie standard de réaction associée, T la température, R la constante des gaz parfait.

31 - L'énoncé indique que la réaction de dissolution du $\text{CO}_2(\text{g})$ dans l'eau est exothermique, donc que $\Delta_r H^0$ associé est négatif. La réaction en question peut s'écrire :



Si la température augmente, alors d'après la relation de Van't Hoff $K^0(T)$ diminue, donc l'équilibre est déplacé dans le sens indirect : le CO_2 est moins soluble dans les eaux chaudes.

Remarque : C'est le cas en général pour les gaz, ils sont moins solubles lorsque T augmente.

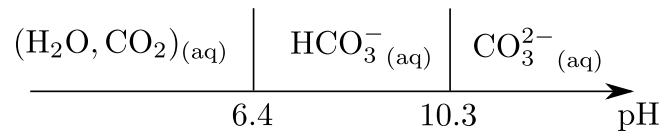
Remarque : On pouvait aussi raisonner avec le principe de Le Châtelier.

32 - La réponse attendue est qu'il y a un effet d'emballlement. On a en effet : augmentation de la teneur en CO_2 dans l'atmosphère $\Rightarrow$ augmentation de la température de l'atmosphère, et donc des océans $\Rightarrow$ baisse de la solubilité du CO_2 dans les océans $\Rightarrow$ rejet de CO_2 par les océans $\Rightarrow$ encore plus de CO_2 et retour au premier point.

Ceci est confirmé par la figure 8, qui montre que les océans absorbent une part de moins en moins importante de CO_2 au court du temps (et donc à mesure du réchauffement des océans).

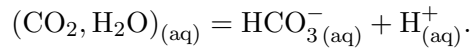
33 - Vénus...

34 - Diagramme de prédominance :



- 35 -** Pour des océans avec un pH voisin de 8, la forme prédominante est $\text{HCO}_3^-_{(\text{aq})}$.

Demi-équation acido-basique :



La dissolution du dioxyde de carbone conduit à une acidification des océans car, d'après l'équation ci-dessus, elle libère des ions H^+ . Étant donné que $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, le pH diminue.

(De façon générale, apporter un acide faible acidifie la solution, et donc diminue son pH.)

- 36 -** L'augmentation de la concentration en CO_2 dans les océans entraîne une baisse de pH. D'après le graphique figure 8, ceci augmente la solubilité du carbonate de calcium dans l'eau (car pS diminue et pS est l'opposé du log de S). Les organismes calcaires peuvent donc être en partie dissous.

II.B – Un projet pour limiter la concentration de CO_2 dans l'atmosphère

- 37 -**
- $A \rightarrow B$: Phase d'admission du gaz depuis l'extérieur dans le cylindre. Système ouvert car clapet d'admission ouvert. Le piston bouge vers le bas (le volume augmente).
 - $B \rightarrow C$: Phase de compression du gaz contenu dans le cylindre. Système fermé (les deux clapets sont fermés). Le piston remonte (le volume diminue).
 - $C \rightarrow D$: Phase de refoulement du gaz du cylindre vers l'extérieur. Système ouvert car clapet d'échappement ouvert. Le piston remonte encore (le volume diminue).

Remarque : Le tracé du diagramme p - V est un peu particulier, car il s'agit tantôt de suivre les caractéristiques p et V d'un système fermé (lorsque les deux clapets sont fermés dans l'étape BC), et tantôt de relever le volume de la chambre et la pression qui y règne (phases AB ou CD) le système étant alors ouvert.

- 38 -** La transformation $B \rightarrow C$ concerne un système fermé, constitué d'un gaz supposé parfait, elle est supposée réversible, et elle est adiabatique car les parois de la chambre sont supposées parfaitement calorifugées. On peut donc utiliser la loi de Laplace.
- 39 -** On applique donc la loi de Laplace entre B et C : $p_B^{1-\gamma} T_B^\gamma = p_C^{1-\gamma} T_C^\gamma$, ce qui implique :

$$T_C = T_B \times x^{1-\frac{1}{\gamma}}, \text{ avec } x = p_C/p_B = p_s/p_e. \quad (2)$$

- 40 -** Le travail indiqué est le travail reçu par le fluide (le gaz ici) autre que le travail des forces de pression en amont et en aval du système considéré (forces de pression d'admission ou de refoulement).

Ceci revient à dire qu'il s'agit du travail reçu par le fluide uniquement de la part des parties mobiles de la machine. Son opposé donne donc le travail réellement coûteux pour l'utilisateur qui opère la machine.

Remarque : Je ne sais pas pourquoi le travail indiqué serait nul lors des étapes AB et CD . Le piston bouge lors de ces étapes, donc que peut-on dire ? Voir également les remarques suivantes.

- 41 -** On applique le premier principe pour un écoulement stationnaire, entre les étapes B et C, au système ouvert {gaz en écoulement}.

On a ici $\Delta e_c = \Delta e_{pp} = 0$ par hypothèse et $q_e = 0$ car tout est parfaitement calorifugé.

Donc il reste : $h_C - h_B = w_i$.

Or pour un gaz parfait, $h_C - h_B = c_p(T_C - T_B)$.

Ici, on a donc $w_i = c_p(T_C - T_B) = c_p T_B \left(\frac{T_C}{T_B} - 1 \right) = c_p T_B (x^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1)$. Ainsi :

$$\boxed{w_i = c_p T_B (x^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1)}. \quad (3)$$

Remarque : Il peut paraître étrange d'appliquer le premier principe pour un système ouvert entre les étapes B et C , où le système est justement fermé (les clapets sont fermés et il s'agit donc de la compression d'un gaz dans un cylindre fermé...).

On aurait donc aussi pu faire la chose suivante :

- On calcule le travail reçu par le fluide en considérant la transformation B vers C du *système fermé* {gaz dans le cylindre}, en appliquant le premier principe pour un système fermé : $\Delta U = W_{B \rightarrow C} + Q_{B \rightarrow C}$, avec $Q_{B \rightarrow C} = 0$ ici. En divisant par la masse du gaz contenue dans le cylindre on a la version massique, et on trouve un travail massique reçu par le gaz $w_{B \rightarrow C} = u_C - u_B = c_v(T_C - T_B) = c_v T_B (x^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1)$.

C'est différent d'un facteur $c_p/c_v = \gamma$ par rapport au travail *indiqué* $w_{i,B \rightarrow C}$ calculé entre B et C précédemment.

Pourtant, on peut bien dire que ce $w_{B \rightarrow C}$ est le travail que doit fournir le piston entre les points B et C une fois les clapets fermés.

Quelle est la différence avec $w_{i,B \rightarrow C}$ calculé avant ?

En fait, le travail indiqué $w_{i,B \rightarrow C}$ prend en compte le fait que lors de l'étape d'admission il y a un certain travail reçu par le piston, et de même lors de l'étape de refoulement le piston doit fournir un certain travail. Ces travaux sont ignorés dans $w_{B \rightarrow C}$ (puisque l'on a raisonné clapets fermés). (Si on veut poursuivre avec le point de vue "système fermé", il faudrait en fait aussi exprimer $w_{A \rightarrow B}$ et $w_{C \rightarrow D}$.)

Le travail indiqué donne donc l'opposé du travail fourni par le piston en prenant en compte les pressions amont et aval lors des étapes d'admission et de refoulement, ces dernières pouvant aider ou freiner le piston dans sa course. C'est donc la bonne méthode du point de vue d'un utilisateur qui veut savoir ce qu'il doit fournir au piston.

(Remarque dans la remarque : pour bien faire, il aurait fallu appliquer le premier principe version écoulement entre A et D et faire ainsi intervenir T_A et T_D . On aurait alors vu le compresseur dans son ensemble comme un système ouvert, fonctionnant en régime stationnaire, pour lequel le fluide rentre dans l'état A ($p = p_e$, $T = T_B$) et sort dans l'état D ($p = p_s$, $T = T_C$), en supposant que l'admission et le refoulement sont isothermes. L'appliquer entre B et C comme suggéré ici est très artificiel...)

42 - On a $T_{B'} = T_F$ puisque les deux points correspondants sont sur une isotherme et que le système évoluant entre B' et F contient le même nombre de mole de gaz.

43 - On applique le premier principe pour le système ouvert {gaz en écoulement dans la première chambre} entre les états B' et E :

$$h_E - h_{B'} = w_{i,B'E}, \quad \text{avec comme en q. 41 : } h_E - h_{B'} = c_p T_{B'} \left(\left(\frac{p'_s}{p_e} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right). \quad (4)$$

On a donc

$$\boxed{w_{i,B'E} = c_p T_{B'} \left(\left(\frac{p'_s}{p_e} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right)}. \quad (5)$$

De même, et en prenant en compte le fait que $T_F = T_{B'}$, on a

$$\boxed{w_{i,FG} = c_p T_{B'} \left(\left(\frac{p_s}{p'_s} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right)}. \quad (6)$$

Remarque : La même remarque qu'à la question 41 s'applique : ce raisonnement prend en compte les étapes d'admission et de refoulement, de sorte à ce que les travaux indiqués calculés contiennent uniquement le travail à fournir aux parties mobiles (aux pistons) entre A et D , en prenant en compte les contributions (positives ou négatives) des étapes d'admissions et de refoulement.

Finalement, ces questions sont assez mal posées. Il aurait mieux valu considérer le compresseur étagé comme une association de systèmes ouverts en écoulement : un premier compresseur, un refroidissement isobare (sans travail indiqué car pas de parties mobiles), et un second compresseur. Il aurait alors été naturel d'appliquer le premier principe pour un écoulement à chacun des deux.

44 - D'après la remarque précédente, on obtient entre A et D :

$$w_{i,tot} = c_p T_{B'} \left(\left(\frac{p'_s}{p_e} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} + \left(\frac{p_s}{p'_s} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 2 \right). \quad (7)$$

45 - Que dire ?

- Dans un diagramme $p - V$, pour un système fermé en évolution réversible, le travail reçu par le système est égal à l'opposé de l'aire sous la courbe. On peut comparer ici l'aire sous la courbe $B'C'$ pour le compresseur à un étage, à l'aire sous la courbe $B'EFG$ pour le compresseur à deux étages.

Mais : d'une part on ne peut alors pas dire grand chose visuellement, et d'autre part ce raisonnement considère des systèmes fermés et ignore la contribution des travaux d'admission et de refoulement, ce qui revient à confondre travail et travail indiqué et est fondamentalement faux.

- On peut comparer l'aire sous la courbe $B'C'G$ pour le compresseur à un étage, à l'aire sous la courbe $B'EFG$ pour le compresseur à deux étages. C'est parlant visuellement car on termine au même point G .

Mais $B'C'G$ pour le compresseur à un étage concerne un système fermé puis ouvert, et il n'y a à priori aucun lien entre aire sous la courbe et travail.

- Il aurait fallu que le diagramme $p-V$ soit en fait un diagramme $p-v$ (v volume massique), que l'on peut alors considérer comme traçant l'évolution des paramètres intensifs p et v du fluide en écoulement dans la machine.

Il existe alors un résultat qui dit que le travail indiqué w_i reçu par le fluide (de la part des parties mobiles, donc ici du piston) lors d'une évolution réversible est égal à $\int v dp$. Mais ce résultat est inconnu des étudiants.

Si on l'admet, on voit alors que cette intégrale est l'aire entre la courbe et l'axe des *ordonnées*. Dans notre diagramme on peut imaginer que remplacer V par v ne changera pas l'allure car m est plus ou moins constant. On voit alors que entre $B'C'$ pour le compresseur à un étage, et $B'EFG$ pour le compresseur à deux étages, il y a une différence qui est l'aire du secteur $EFGC'$ et qui correspond bien à un gain de travail indiqué à fournir en moins pour le cas à deux étages.

Remarque : Démonstration du résultat $w_i = \int v dp$:

On considère un fluide en écoulement, dont on trace l'état (intensif) à mesure qu'il s'écoule, dans un diagramme $p-v$. Ceci suppose qu'il soit suffisamment à l'équilibre tout au long de l'écoulement pour que l'on puisse définir les variables thermodynamiques et appliquer les différents principes. On supposera en plus l'évolution réversible pour utiliser $\delta s_c = 0$ et $T = T_{\text{ext}}$. On suppose enfin qu'il n'y a pas de variations d'énergie cinétique ou potentielle.

On suppose en plus l'écoulement stationnaire.

Le second principe version écoulement entre deux abscisses x et $x + dx$ de l'écoulement s'écrit

$$ds = \delta s_e + \delta s_c = \frac{\delta q}{T} + 0, \quad \text{soit encore } \delta q = T ds.$$

La seconde identité thermodynamique s'applique pour l'évolution d'un système fermé (une particule de fluide) :

$$dh = T ds + v dp.$$

Le régime étant stationnaire, les particules de fluide font toujours la même chose, et cette identité relie donc également la variation des grandeurs concernées entre deux abscisses x et $x + dx$.

On a donc $dh = \delta q + v dp$.

Enfin, le premier principe pour un écoulement indique que

$$dh + de_c + de_p = \delta q + \delta w_i.$$

On a donc ici $dh = \delta q + \delta w_i$, soit encore $\delta q + vdp = \delta q + \delta w_i$, soit encore $\boxed{\delta w_i = vdp}$.

Pour une évolution entre A et B , on a donc $\boxed{w_{i,AB} = \int_A^B vdp}$.

46 - On se réfère aux notations de la figure 11.

Cas mono-étage, température en fin de compression : $T_{C'} = T_{B'} \left(\frac{p_s}{p_e} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$.

Cas bi-étages, température en fin de compression : $T_G = T_F \left(\frac{p_s}{p'_s} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = T_{B'} \left(\frac{p_s}{p'_s} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$.

On a donc

$$\boxed{\frac{T_G}{T_{C'}} = \left(\frac{p_e}{p'_s} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} < 1.} \quad (8)$$

L'avantage d'un échauffement moindre est que les contraintes thermiques sur les pièces du compresseur sont réduites.

III – D'autres planètes habitables ?

III.A – La recherche d'exoplanètes

47 - * On note $s_1(M, t) = A \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (SS_1M) - \omega t \right)$ et $s_2(M, t) = A \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (SS_2M) - \omega t \right)$ les ondes passant respectivement par S_1 et S_2 et arrivant en un point M de l'écran. Ces notations prennent en compte les données de l'énoncé : même pulsations et longueurs d'onde car provenant de la même étoile, amplitudes identiques notées A , phases à l'origine prises nulles.

De plus, on note $\varphi_1(M, t) = \frac{2\pi}{\lambda} (SS_1M) - \omega t$ et $\varphi_2(M, t) = \frac{2\pi}{\lambda} (SS_2M) - \omega t$.

★ L'intensité totale en M est :

$$\begin{aligned} I(M) &= \left\langle [s_1(M, t) + s_2(M, t)]^2 \right\rangle \\ &= A^2 \left\langle (\cos \varphi_1(M, t) + \cos \varphi_2(M, t))^2 \right\rangle \\ &= A^2 \left\langle \cos^2 \varphi_1(M, t) \right\rangle + A^2 \left\langle \cos^2 \varphi_2(M, t) \right\rangle + 2A^2 \left\langle \cos \varphi_1(M, t) \cos \varphi_2(M, t) \right\rangle \\ &= A^2 \times \frac{1}{2} + A^2 \times \frac{1}{2} + 2A^2 \times \frac{1}{2} \left\langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \right\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

car on a utilisé le fait que la moyenne de $\cos^2(\omega t + \text{cst})$ sur plusieurs périodes est $1/2$.

On poursuit en spécifiant $\varphi_1 - \varphi_2$ et $\varphi_1 + \varphi_2$:

$$\begin{aligned} I(M) &= A^2 + A^2 \left\langle \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} [(SS_1M) - (SS_2M)] \right) + \cos \left(2\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} [(SS_1M) + (SS_2M)] \right) \right\rangle \\ &= A^2 + A^2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} [(SS_1M) - (SS_2M)] \right) + 0 \\ &= 2I_0 + 2I_0 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{I(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right]} \quad (10)$$

- 48 - Pour avoir interférences il faut que les deux sources soient synchrones (même pulsation) et cohérentes (les trains d'onde émis par l'une et par l'autre sont les mêmes, à un déphasage constant dans le temps près).

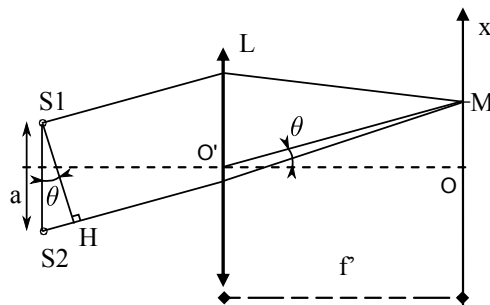
C'est le cas ici car il s'agit de deux sources secondaires, qui résultent d'une seule et même source primaire (l'étoile).

- 49 - Le contraste est défini comme $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$.

Or ici d'après 47 on a $I_{\min} = 0$, et on a donc $C = 1$.

- 50 - Conditions de Gauss : les rayons lumineux doivent être paraxiaux (peu inclinés par rapport à l'axe optique, et peu éloignés du centre des lentilles ou miroirs).

51 -



On réalise le tracé ci-contre.

D'après le théorème de Malus, la surface S_1S_2 est une surface d'onde pour la source {étoile} (notons S sa position). On a donc $(SS_1) = (SS_2)$.

La surface S_1H est une surface d'onde pour une source en M . On a donc $(MS_1) = (MH)$.

La différence de marche au point M est donc $\delta_M = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) + (S_2H) + (HM) - (SS_1) - (S_1M) = (S_2H) = S_2H$.

Dans le triangle S_2HS_1 , on a $\sin \theta = S_2H/a$, soit comme les angles sont petits (car on utilise une lentille) : $\theta \simeq S_2H/a$.

Dans le triangle $O'MO$, on a $\tan \theta = x/f'$, donc $\theta \simeq x/f'$.

On a donc $S_2H = ax/f'$, finalement $\delta_M = \frac{ax}{f'}$.

La formule de Fresnel indique ensuite que : $I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'} \right) \right)$.

L'interfrange est la période spatiale de la figure d'interférence, c'est-à-dire qu'on l'identifie en écrivant le cosinus sous la forme $\cos \left(\frac{2\pi}{i} x \right)$.

Donc $i = \frac{\lambda f'}{a}$.

- 52 - $I(M)$ ne dépend que de x . L'intensité est donc constante sur un ensemble de points de l'écran de même abscisse x . Les franges observées sont donc rectilignes, parallèles à l'axe y .

Elles sont localisées car observables avec un contraste élevé uniquement dans le plan focal de la lentille (mais cette question est hors programme).

- 53 - L'étoile crée un système de franges rectilignes centré en $x = 0$. La planète crée un second système de franges rectilignes, dont l'intensité s'ajoute au premier (car planète et étoile sont incohérentes), et qui est centré en x non nul mais très petit. On ne peut donc pas distinguer la présence de ce second système de franges.

- 54 - On reprend l'expression de la question 51, mais en ajoutant un signe moins devant le cosinus à cause du déphasage de π :

$$I_*(M) = 2I_{0*} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'} + \pi \right) \right)$$

$$I_*(M) = 2I_{0*} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'} \right) \right) \quad (11)$$

L'ordre d'interférence est $p = \frac{\delta}{\lambda}$. Le déphasage de π correspond à un ajout à la différence de marche de $\frac{\lambda}{2}$ (afin que $\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{2} = \pi$). On a donc $p = \frac{ax}{\lambda f'} + \frac{\lambda}{2}$.

- 55 - L'expression de l'intensité $I_{\text{exo}}(M)$ pour l'exoplanète est la même que pour l'étoile (en particulier le déphasage de π est aussi présent), mais cette fois on ajoute une différence de marche de $D \sin \alpha$. On a donc :

$$I_{\text{exo}}(M) = 2I_{0\text{exo}} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{ax}{f'} + D \sin \alpha \right] \right) \right) \quad (12)$$

L'énoncé explique que pour un réglage optimal, la différence de marche $D \sin \alpha$ compense le déphasage de π . C'est-à-dire que $\frac{2\pi}{\lambda} D \sin \alpha = \pm \pi$, ce qui enlève le signe moins dans l'expression ci-dessus, si bien que

$$I_{\text{exo}}(M) = 2I_{0\text{exo}} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'} \right) \right) \quad (13)$$

- 56 - L'intensité totale, notamment au centre ($x = 0$) de la recombinateur, est donnée par $I_* + I_{\text{exo}}$ car les deux sources planète et étoile sont incohérentes. Si l'étoile est seule, on a $I_*(x = 0) = 0$.

Ce que montrent les calculs précédents, c'est que s'il y a présence d'une exoplanète, alors pour certaines distances D telles que $D \sin \alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on aura une intensité non nulle au centre, donnée par $I_{\text{exo}}(x = 0) = 4I_{0\text{exo}}$ dans le cas d'un réglage optimal.

On peut donc détecter la présence de l'exoplanète.

De plus, la valeur de D pour laquelle l'intensité est maximale renseigne sur l'angle α , puisque $D \sin \alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

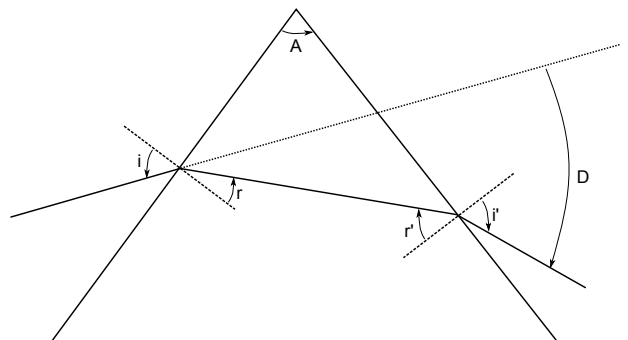
On imagine également que puisque l'intensité lumineuse en $x = 0$ est celle de l'exoplanète uniquement, ceci permet de faire des analyses spectrales de cette lumière (sans être perturbé par celle de l'étoile).

III.B – Résolution de problème : Isis est-elle habitable ?

- 57 - Il y a deux lois de Snell-Descartes pour la réfraction : le rayon réfracté est dans le plan d'incidence (même plan que celui défini par le rayon incident et la normale au dioptré) ; et les angles i et r sont reliés par la relation $\sin i = n \sin r$ (car l'indice de l'air est pris égal à 1 ici).

58 -

Il faut se souvenir que le rayon se rapproche de la normale lorsqu'il passe dans un milieu d'indice optique supérieur, et vice versa.



- 59 - Comptons tous les angles positivement tels qu'ils apparaissent sur la figure ci-dessus (donc en particulier r' et i' sont comptés positivement s'ils sont dans le sens rétrograde, alors que tous les autres angles sont comptés positivement s'ils sont dans le sens direct).

★ La somme des angles d'un triangle valant π , on a : $\pi = A + (\pi/2 - r) + (\pi/2 - r')$, d'où

$$A = r + r'.$$

★ La suite de la question n'est pas très claire. Il faut probablement comprendre qu'on cherche une condition sur i pour éviter une réflexion totale lors de la sortie du prisme.

En effet, si i est trop grand, il y aura réflexion totale en sortie. Lorsque l'on est à la situation limite, juste avant qu'il y ait réflexion totale, l'angle de sortie i' vaut $\pi/2$.

On a alors $n \sin r' = \sin i' = 1$, d'où $\sin r' = \frac{1}{n}$ et donc $\cos r' = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$.

On en déduit $\sin r = \sin(A - r') = \sin A \cos r' - \cos A \sin r' = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \sin A - \frac{1}{n} \cos A$.

Enfin, on en déduit l'angle d'incidence limite $\boxed{\sin i = n \sin r = \sqrt{n^2 - 1} \sin A - \cos A.}$

- 60 -** On lit sur l'annexe 2 que pour le prisme utilisé, $n = 1.722$ correspond à $\frac{1}{\lambda^2} = 2.9 \times 10^{12} \text{m}^{-2}$, c'est-à-dire $\lambda = 5.9 \times 10^2 \text{ nm}$.

Que répondre ensuite? On peut dire que 590 nm ne correspond pas aux raies données pour le dioxygène, et que donc Isis n'est pas habitable? C'est un raisonnement certainement très réducteur...

(i) Il faudrait plus de données que les spectres de 5 entités prises au hasard pour espérer identifier cette bande d'absorption, (ii) il faudrait que cette bande d'absorption dans le bleu ne soit pas centrée sur 590 nm, car cela n'est pas bleu du tout, (iii) il faudrait dire à quoi est dû l'absorption dans le bleu dans le cas de la Terre pour pouvoir comparer.