

PROPAGATION D'ONDES LE
LONG D'UNE CHAÎNE DE
PENDULES COUPLÉS

①

- ① Il faut pouvoir négliger les frottements de l'air.
 → Si modèle de frottement fluide, $|C_{\text{frott.}}| = K|\dot{\theta}|$
 il faut, par exemple, que $K|\dot{\theta}| \ll C|\dot{\theta}|$
 ou/et $K|\dot{\theta}| \ll mgl|\sin\theta|$.

- ② * TMC au pendule ① / axe (Ox):

$$ml^2 \ddot{\theta}_1 = -C\theta_1 + C(\theta_2 - \theta_1) - mgl \sin\theta_1$$

$$\text{soit } \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{2C}{ml^2} + \frac{g}{l}\right)\theta_1 = \frac{C}{ml^2}\theta_2$$

$$\text{ou } \ddot{\theta}_1 + (2\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_1 = \omega_c^2\theta_2$$

$$* \text{ De même : } \ddot{\theta}_2 + (2\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_2 = \omega_c^2\theta_1$$

→ ω_c = pulsation ^{propre(?)} caractéristique d'un pendule de torsion, sans pesanteur.

→ ω_c = pulsation propre d'un pendule sans torsion, de la chaine de pesanteur.

$$\textcircled{3} \textcircled{a} \begin{cases} \theta_+ = \theta_1 + \theta_2 \\ \theta_- = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \ddot{\theta}_+ + (\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_+ = 0 & (1) \\ \ddot{\theta}_- + (3\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_- = 0 & (2) \end{cases}$$

⑥ On a obtenu un découplage des éqns. diff.

$$\textcircled{4} \textcircled{a} * \theta_-(t) = 0 \Rightarrow \theta_1(t) = \theta_2(t) \quad \forall t$$

⇒ Mode SYMETRIQUE: les 2 pendules oscillent en phase.

$$(*) \theta_+(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_1(t) = -\theta_2(t) \quad \forall t} \quad (3)$$

$\Rightarrow$ Mode ANTISYMETRIQUE: les 2 pendules oscillent en opposition de phase.

$$(b) (*) \text{ Mode Symétrique: } \theta_1 = \theta_2 = \theta_{+1/2}$$

$\Rightarrow$ les 2 pendules sont régis par l'éq. (1)

donc θ_1 et θ_2 sont des fonctions sinusoïdales

(identiques), de pulsation $\boxed{\omega_{1,1} = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_g^2}}$

$$(*) \text{ Mode Antisymétrique: } \theta_1 = -\theta_2 = \theta_{-1/2}$$

$\Rightarrow$ les 2 pendules sont régis par (2)

$\Rightarrow \theta_1$ et θ_2 sont des fonctions sinus. (opposées)

de pulsation $\boxed{\omega_{1,-1} = \sqrt{3\omega_c^2 + \omega_g^2}}$

(c) Dans un mode propre, θ_1 et θ_2 sont régis par la même éq. diff

$\Rightarrow$ les 2 pendules oscillent à la même pulsation.

(d) (*) Mode Symétrique: le câble central n'est pas tendu (car $\theta_1 = \theta_2$).

$\rightarrow$ seul un câble relié à un pendule est tendu $\Rightarrow$ une seule contribution de ω_c^2 . Donc $\omega_{1,1} = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_g^2}$

(*) Mode Antisymétrique: le câble central est ici 2 fois plus tendu que les câbles latéraux (car $\theta_1 = -\theta_2$)

$\Rightarrow$ le câble central a donc une contribution double de celle d'un câble

latéral $\Rightarrow$ 3 contributions de ω_c^2

Donc $\omega_{1,-1} = \sqrt{3\omega_c^2 + \omega_g^2} \quad (2+1)$

⑤ * C s'exprime en $N.m$ tandis que G s'exprime en $N.m^{-2}$. ⑤

→ les 2 autres paramètres étant des longueurs, on en déduit que $[C \propto G]$

* Donc $C = \text{cste} \times G \times (\text{longueur})^3$

→ de plus, la raideur augmente avec le rayon du câble et diminue avec sa longueur.

donc $C = \text{cste} \times G \times \frac{R^p}{a^q}$ où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

→ il faut donc résoudre ds $\mathbb{N}^2$: $p - q = 3$.

La solution la plus "simple" est (plus petites valeurs) $\begin{cases} p=4 \\ q=1 \end{cases}$

donc, on peut penser que :

$$C = \text{cste} \times G \times \frac{R^4}{L}$$

⑥ Même démarche que ci-dessus :

$$m l^2 \ddot{\theta}_n = -C(\theta_n - \theta_{n-1}) + C(\theta_{n+1} - \theta_n) - mgl\theta_n$$

$$\text{d'où : } \ddot{\theta}_n + \left(\frac{2C}{m l^2} + \frac{g}{l} \right) \theta_n = \frac{C}{m l^2} (\theta_{n-1} + \theta_{n+1})$$

$$\text{i.e. : } \ddot{\theta}_n + (2\omega_c^2 + \omega_g^2) \theta_n = \omega_c^2 (\theta_{n-1} + \theta_{n+1})$$

$$\textcircled{7} \theta_{n+1}(t) = \theta(x_{n+1}, t) = \underbrace{\theta_n(t)}_{\theta(x_n, t)} + a \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{na} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{na}$$

$$\text{d'où } \theta_{n-1} + \theta_{n+1} = 2\theta_n + a^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{na}$$

$$\text{soit : } \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \underbrace{a^2 \omega_c^2}_{\frac{c_0^2}{c_g^2}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \underbrace{\omega_g^2}_{\omega_0^2} \theta = 0 \right]$$

$$\begin{cases} c_0 = a \omega_c \\ \omega_0 = \omega_g \end{cases}$$

→ c_0 = célérité des ondes de torsion le long de la chaîne (4)

→ ω_0 = pulsation propre des oscillateurs de $\vec{g}$ uniforme, sans torsion.

(8) Il faut que la fonction $\theta(x, t)$ varie peu à l'échelle du pas a .

→ il faut donc que $\frac{a^2}{2} \left| \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right| \ll a \left| \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|$
 i.e.: $a \ll \lambda$ si on considère une perturbation sinusoïdale de longueur d'onde λ .

(9) $c_0 = a \sqrt{\frac{C}{m a^2}} = \sqrt{\frac{C a}{m a}} \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{C}{m a}}$ soit $c_0 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$

(10) Erreur d'énoncé → il faut maintenir le rapport $\frac{\kappa}{\mu}$ constant !! (intérêt de la question?)

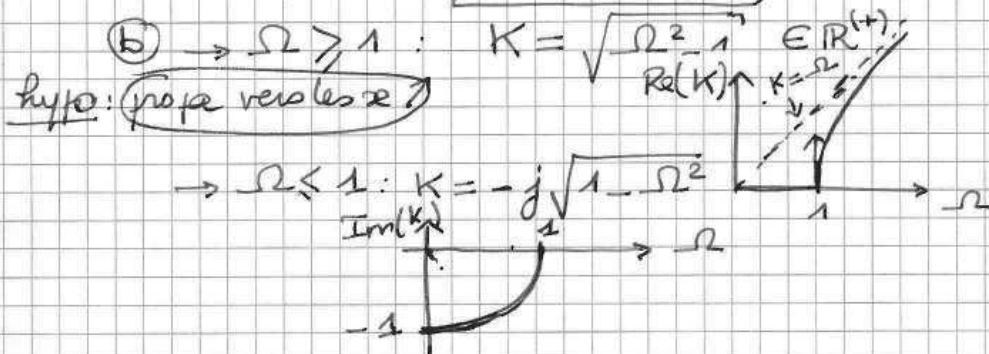
(11) $c_0 \approx 3 \text{ m.s}^{-1}$

(12) $a \ll \left(\frac{|\partial^2 \theta / \partial x^2|}{|\partial \theta / \partial x|} \right)^{-1} \Rightarrow a \ll \frac{1}{k}$ soit $a \ll \lambda$

(13) a) Relation de dispersion:

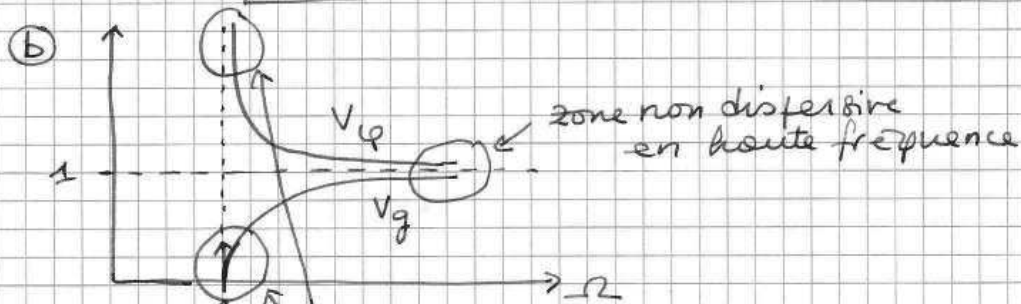
→ $\omega^2 + k^2 c_0^2 + \omega_0^2 = 0$

soit $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c_0^2}$ ou $K^2 = \Omega^2 - 1$



14) a) * $V_{\varphi} = \frac{\Omega}{K} = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\Omega^2}} \geq 1$ ⑤

* $K^2 = \Omega^2 - 1$ donne : $2K dK = 2\Omega d\Omega$
 donc $V_g = \frac{d\Omega}{dK} = \frac{K}{\Omega} = \frac{\sqrt{\Omega^2 - 1}}{\Omega} = \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}$



zone de très forte dispersion
 → avec $V_g \rightarrow 0$ quand $\Omega \rightarrow 1^+$: la propagation n'est possible que par $\Omega \geq 1$.
 → avec $V_{\varphi} \rightarrow +\infty$: pas gênant car V_{φ} caractérise la propagation d'une OPPH : non physique.

15) * si $\Omega > 1$: il apparaît une onde progressive sinusoïdale se propageant vers les $x > 0$, le long de la chaîne.

→ l'excitateur fournit de l'énergie qui se propage ds le milieu

* si $\Omega \leq 1$: aucune propagation n'est possible. De plus, on n'a envisagé aucun phénomène dissipatif.

⇒ l'énergie fournie est donc intégralement réfléchi sur l'excitateur.

16) l'élément (C, a) est sans masse. Le TMC

donne donc : $0 = M - C\theta$

donc $\frac{M}{\theta} = C$

→ en RSF, $\underline{\dot{\theta}} = j\omega \underline{\theta}$

(6)

$$\text{donc } \boxed{Z_{\text{câble}} = \frac{M}{\underline{\dot{\theta}}} = \frac{M}{j\omega \underline{\theta}} = -j \frac{C}{\omega}}$$

(17) Le TMC donne, pour un pendule seul (sans torsion):

$$m l^2 \underline{\ddot{\theta}} = M - m g l \underline{\theta}$$

$$\parallel$$

$$- m l^2 \omega^2 \underline{\theta}$$

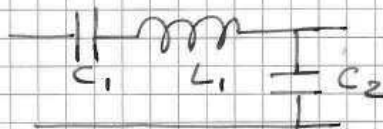
$$\text{donc } \frac{M}{\underline{\theta}} = m l^2 [\omega_g^2 - \omega^2] = m l^2 (\omega_0^2 - \omega^2)$$

$$\text{soit } \boxed{Z_{\text{pendule}} = -j \frac{m l^2 \omega_0^2}{\omega} + j m l^2 \omega}$$

(18a) $Z_{\text{câble}} = \frac{C}{j\omega} \leftrightarrow \text{capacité (seule!)}$

(b) $Z_{\text{pendule}} = \frac{m l^2 \omega_0^2}{j\omega} + j(m l^2) \omega \leftrightarrow \text{capacité + bobine, en série.}$

⇒ la seule structure susceptible de convenir est donc la (a):



(b) → Câble: $C_2 \leftrightarrow \frac{1}{C} \leftarrow \text{torsion}$

→ pendule:

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow \frac{1}{m l^2 \omega_0^2} = \frac{1}{m g l} \\ L_1 \leftrightarrow m l^2 \end{cases}$$

(19) Un câble coaxial présente bien une capacité linéique en // et une inductance linéique en série. Mais il n'y a pas d'équivalent de C_1 .

$$(20) \quad M = C(\theta_{n-1} - \theta_n) \approx -a C \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{na} \quad \text{prop. recu les } x \uparrow \quad (+)$$

$$\text{donc } Z_{\text{méca}} = \frac{M}{\dot{\theta}} = \frac{-a C (\frac{\partial \theta}{\partial x})_{na}}{j\omega \theta} = \frac{+a C k}{\omega} \quad \text{note recu les } x \uparrow$$

$$(21) \quad \Omega \triangleq \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } K \triangleq k \frac{c_0}{\omega_0}$$

$$\text{donc } Z_{\text{méca}} = \pm \frac{a C}{c_0} \frac{K(-\Omega)}{\Omega} ; \text{ or (cf. ③), } a C = \mu l^2 c_0^2$$

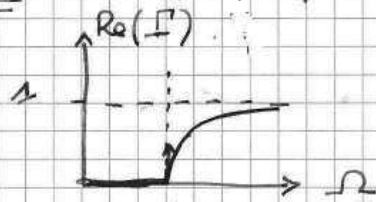
$$\text{d'où } Z_{\text{méca}} = \pm \mu l^2 c_0 \frac{K(-\Omega)}{\Omega}$$

$$(22) \quad \Gamma(\Omega) \text{ s'exprime en s.m.}^{-1} \Gamma'(-\Omega)$$

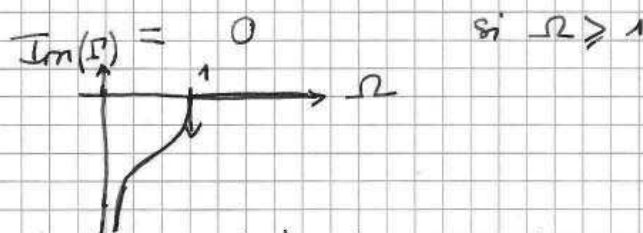
→ c'est l'inverse d'une vitesse

$$(23) \quad * \text{ D'après (13) (b), } \text{Re}(\Gamma'(\Omega)) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}} & \text{si } \Omega \gg 1 \\ 0 & \text{si } \Omega \leq 1 \end{cases}$$

N.B. : $\text{Re}(\Gamma'(\Omega))$ n'est autre que V_g pour $\Omega \gg 1$



$$* \text{ Im}(\Gamma'(\Omega)) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 - 1}} & \text{si } \Omega \leq 1 \\ 0 & \text{si } \Omega \geq 1 \end{cases}$$



(24) * en BF ($\Omega \ll 1$) : l'impédance est imaginaire pure et $|Z_{\text{méca}}| \rightarrow +\infty$ quand $\Omega \rightarrow 0$.

* en HF ($\Omega \gg 1$) : l'impédance est réelle et $|Z_{\text{méca}}| \rightarrow \mu l^2 c_0$ quand $\Omega \rightarrow +\infty$

Pour $\Omega \gg 1$, Z_{meca} est indépendante de Ω . (8)

* Pour $\Omega = 1$: $\Gamma = 0$ et $Z_{\text{meca}} = 0$

* D'autre part, on a vu ci-dessus que si $\Omega > 1$:

$$\boxed{V_g(\Omega > 1) = \Gamma(\Omega > 1)}$$

(25) Pour $\Omega > 1$, Z_{meca} est réelle

donc $M = Z_{\text{meca}} \dot{\theta}$ (en réels)

→ la puissance fournie par la partie gauche de la chaîne à la partie droite vaut donc:

$$P(x, t) \hat{=} M(x, t) \times \dot{\theta}(x, t) = Z_{\text{meca}} \times \dot{\theta}^2(x, t)$$

$$\text{donc } \boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2} Z_{\text{meca}} \omega^2 \theta_0^2} > 0 \quad (\text{par une propagation selon les})$$

→ la puissance fournie par l'opérateur $x \uparrow$ est propagée le long de la chaîne, sans dissipation.

(26) Pour $\Omega \leq 1$, Z_{meca} est imaginaire pure.

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\underline{M} \times \underline{\dot{\theta}}^*] = \frac{1}{2} \omega^2 \theta_0^2 \text{Re}[Z_{\text{meca}}]$$

donc $\boxed{\langle P \rangle = 0}$: aucune puissance ne se propage le long de la chaîne.

Comme il n'y a pas non plus dissipation, la puissance fournie par l'opérateur est donc **REFLECTÉE TOTALEMENT** sur lui.

$$(27) * \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial x} \times F'(z) = F'(z).$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = F''(z)$$

$$* \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} \times F'(z) = -v F'(z)$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v^2 F''(z)$$

donc $(v^2 - c_0^2) F''(z) + \omega_0^2 \sin F(z) = 0$

(9)

* Multiplions cette équation par $F'(z)$:

$$\underbrace{F''(z) \cdot F'(z)}_{\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} (F'(z))^2 \right)} + \frac{\omega_0^2}{v^2 - c_0^2} F'(z) \sin F(z) = 0 \quad (\text{si } \underline{v \neq c_0}).$$

donc, en intégrant, on obtient:

$$\boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 + \underbrace{\left(\frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} \right)}_{\substack{A \\ \text{à 1D}}} \cos F = B}$$

(28) a) Pour un point matériel $\overset{\substack{A \\ \text{à 1D}}}{V}$, son énergie mécanique s'écrit: $\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x)$

→ si $m=1$, on a bien: $\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x)$

Formellement, c'est le même problème.

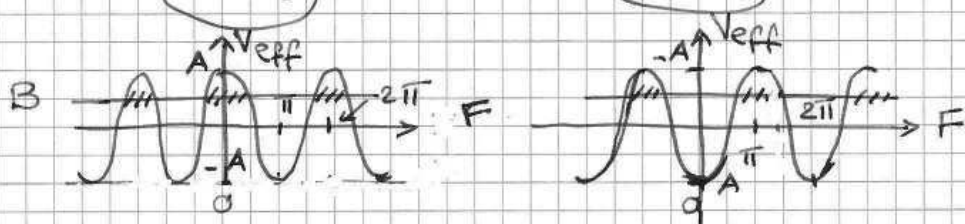
$$\updownarrow \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 + V_{\text{eff}}(z)$$

(b) B est l'équivalent de l'énergie mécanique (constante) du point matériel (si il n'y a pas dissipation).

(29) a)

$v < c_0 : A > 0$

$v > c_0 : A < 0$



(b) L'équation (7) impose que $B - V_{\text{eff}} \geq 0$

→ si $B > |A|$: toutes les valeurs de F sont permises

→ si $B < -|A|$: il n'y a pas de solution.

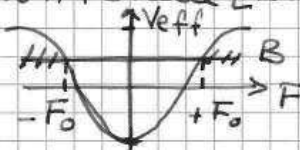
→ si $-|A| \leq B \leq |A|$: seuls certains intervalles de F (définis modulo 2π) sont accessibles. (13)

(30) (a) Pour $v < c_0$, $A > 0$. Si $B \rightarrow A^-$, on tend vers une situation où toutes les valeurs de F sont fermées, avec $V_{\text{eff}}(F) = B$ pour $F \equiv 0[2\pi]$.

(évolution monotone de x) → il s'agit d'un mouvement de révolution (celui d'un pendule simple) avec annulation de l'énergie cinétique à chaque passage par les positions $x \equiv 0[2\pi]$

(b) Pour $v > c_0$, $A < 0$.

Si $A < B < -A$, le point matériel aura un mouvement périodique (non sinusoïdal) compris dans l'intervalle $[-x_0, +x_0]$ centré sur 0.



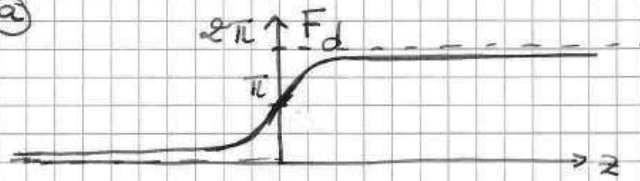
→ $F(x)$ est donc une fonction périodique de x , d'amplitude F_0 définie par $A \cos F_0 = B$.

→ à t fixé : $\theta(x, t)$ est donc une fonction périodique de x

→ à x fixé, $\theta(x, t)$ est aussi une fonction périodique de t .

(c) Pour $v > c_0$ et $B \rightarrow A^+$, on retrouve le cas du (a) ($v < c_0$ et $B \rightarrow A^-$) (sauf que les positions $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$ sont fermées).

(31) a



$$F_d(-\infty) = 0$$

$$F_d(0) = \pi$$

$$F_d(+\infty) = 2\pi$$

(11)

NB: F_d est bien monotone

$$b) \otimes \frac{\partial \theta}{\partial x} = F'_d(z) = 4 \cdot \frac{1}{\lambda} e^{z/\lambda} \cdot \frac{1}{1 + e^{2z/\lambda}}$$

$$\otimes z = x - vt ; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} z = \lim_{x \rightarrow +\infty} x$$

$$\rightarrow \text{en } +\infty: \frac{\partial \theta}{\partial x} \approx \frac{4}{\lambda} e^{-z/\lambda} \rightarrow 0$$

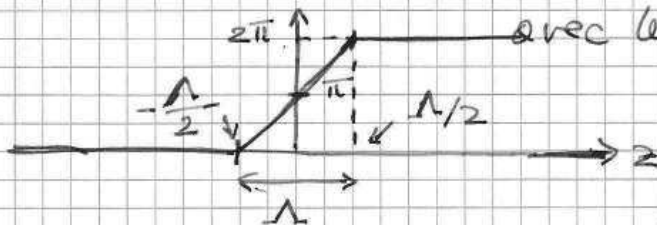
$$\rightarrow \text{en } -\infty: \frac{\partial \theta}{\partial x} \approx \frac{4}{\lambda} e^{+z/\lambda} \rightarrow 0$$

$$\text{donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0}$$

ça se voyait
directement sur
la courbe...

$$c) F'_d(0) = \frac{2}{\lambda} \rightarrow \text{au voisinage de } 0, \text{ on approche } F_d(z) \text{ par: } F_d(z) \approx \pi + \frac{2z}{\lambda}$$

$\rightarrow$ on raccorde par morceaux
avec les asymptotes:



$$\rightarrow \Lambda \text{ est définie par: } \frac{2}{\lambda} \cdot \Lambda = 2\pi$$

$$\text{soit } \boxed{\Lambda = \pi \lambda}$$

$$d) \boxed{\lambda_0 = \frac{c_0}{\omega_0} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ m}} \quad (\text{et } \Lambda \approx 1 \text{ m})$$

(32) a) • à t fixé ($t = t_1$, par exemple), (12)

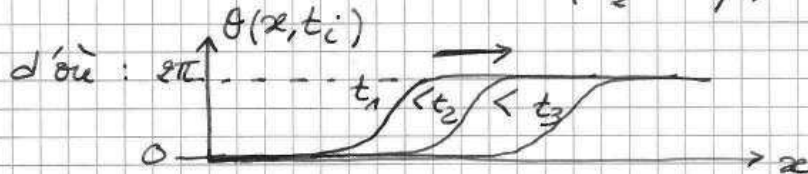
$$\theta(x, t_1) = F(\underbrace{x - vt_1}_z) \text{ donc } \theta(x, t_1) \text{ a}$$

la même allure que $F(z)$

$$\bullet \theta(x', t_2) = \theta(x, t_1) \Leftrightarrow \begin{matrix} F(x' - vt_2) \\ F(x - vt_1) \end{matrix}$$

i.e.: $x' - vt_2 = x - vt_1$ (F est bijective)

$$\text{soit } x' - x = v(t_2 - t_1) > 0$$



b) • à x fixé ($x = x_1$, par exemple),

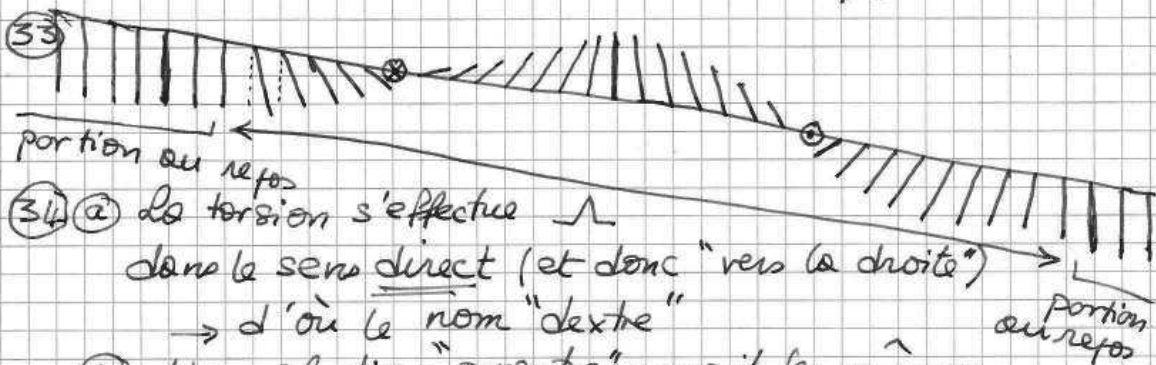
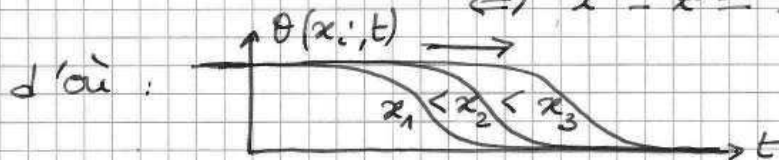
$$\theta(x_1, t) = F(\underbrace{x_1 - vt}_z)$$

Quand $t \rightarrow +\infty$, $z \rightarrow -\infty$ et inversement. La courbe est donc "retournée".

• de même, $\theta(x_2, t') = \theta(x_1, t)$

$$\Leftrightarrow x_2 - vt' = x_1 - vt$$

$$\Leftrightarrow t' - t = \frac{x_2 - x_1}{v} > 0$$



(34) a) la torsion s'effectue

dans le sens direct (et donc "vers la droite")

→ d'où le nom "dextre"

b) Une solution "gauche" aurait les mêmes propriétés de propagation, mais la

torsion doit s'effectuer "vers la gauche": θ doit donc passer de 0 à $\ominus 2\pi$. (13)

$\Rightarrow$ il suffit de changer le signe de F_3 :

$$F_3(z) = \ominus 4 \arctan(\exp(z/\lambda))$$

(35) (a) Il s'agit clairement de solitons serrés, puisque le saut de θ est de $\ominus 2\pi$.

(b) $\rightarrow$ Cas (a): distance parcourue par le front d'onde entre t_0 et t_+ : $\Delta x \approx \frac{5,6}{1,2} \times 5 \approx 2,3 \text{ m}$

$$\text{donc } \boxed{v_a \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2,3}{7 \times 0,12} \approx 2,8 \text{ m.s}^{-1}}$$

$\rightarrow$ Cas (b): de même: $\boxed{v_b \approx \frac{1}{7 \times 0,12} = 1,2 \text{ m.s}^{-1}}$

$$(c) \rightarrow \text{Cas (a): } \Lambda_a \approx 0,4 \text{ m} \Rightarrow \boxed{\lambda_a = \frac{\Lambda}{\pi} \approx 0,1 \text{ m}}$$

$$\rightarrow \text{Cas (b): } \Lambda_b \approx 1,7 \text{ m} \Rightarrow \boxed{\lambda_b \approx 0,5 \text{ m}}$$

(36) (a) L'énergie injectée dans la chaîne par l'opérateur en $x=0$ va se propager (à l'arrêt) vers les $x>0$ et vers les $x<0$.

* Les deux solutions doivent se raccorder avec la C.L. en $x=0$, $\forall t$: $\theta(x=0, t) = \theta_0(t)$.

* Solution se propageant vers les $x>0$:

$$\theta(x \geq 0, t) = 4 \arctan[\exp \Omega_0(t - \frac{x}{v})]$$

⚠ Cela suppose

$$v < c_0$$

$$\text{avec } \Omega_0 = \frac{v}{\lambda}$$

* Solution se propageant vers les $x<0$:

$$\theta(x \leq 0, t) = 4 \arctan[\exp \Omega_0(t + \frac{x}{v})]$$

$$\text{avec } \Omega_0 = \frac{v}{\lambda}$$

⑤ * Solution $\theta(x > 0, t) = 4 \arctan \left[\exp \Omega_0 \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]$ (14)

→ propagation vers les $x > 0$.

→ chiralité: A t fixé, θ est une fonction décroissante de x .

⇒ les pendules tournent donc de le sens horaire (lorsqu'on les observe depuis la droite : sens de propagation pointant vers l'observateur).

⇒ il s'agit donc d'une solution gauche

* Solution $\theta(x \leq 0, t) = 4 \arctan \left[\exp \Omega_0 \left(t + \frac{x}{v} \right) \right]$

→ propagation vers les $x < 0$

→ chiralité: A t fixé, θ est ici une fonction croissante de x

⇒ quand $x \downarrow$, $\theta \downarrow$.

Donc, observés depuis la source (en $x=0$), les pendules tournent dans le sens horaire.

MAIS, en adoptant la convention (non précisée par l'énoncé) que l'observateur voit l'onde arriver sur lui, celui-ci voit donc les pendules tourner de le sens trigonométrique.

⇒ cette solution est donc DEXTRE

③⑦③ ① d'après ③⑥②, on sait que $v = \lambda \Omega_0$

donc $\boxed{\frac{v}{c_0} = \frac{\lambda}{c_0} \Omega_0 = \frac{\Omega_0}{\omega_0}}$

⑥ $\boxed{v = 0,5 c_0 = 1,5 \text{ m.s}^{-1}}$

(38) → Dans le cas d'une chaîne occupant un demi- (15)
espace, il y aura réflexion en bout de chaîne.

→ La relation (10) n'a de sens que si les solitons
incident et réfléchi sont bien séparés (presque
à chaque instant).

→ Cela n'est possible que si la taille λ du
soliton est très inférieure à la longueur
de la chaîne: $\lambda \ll L$

(39) * Cas (c) (soliton basse vitesse): le soliton est
REFLECHI TOTALEMENT sur la discontinuité
et repart vers la source, à la même vitesse.

* Cas (d) (soliton haute vitesse): le soliton ne
subit pas de réflexion, mais est transmis
intégralement dans le milieu aval, où il
se propage (à une vitesse plus faible).

(40) a) * le soliton doit être mesuré de donner naissance
à un soliton dans le milieu ($x \geq 0$), d'énergie

$$E_+ = \frac{E_0^+}{\sqrt{1 - v_+^2 / (c_0^+)^2}}$$

→ E_+ est une fonction croissante de v_+ ,
donc l'énergie minimale d'un soliton
dans le milieu ($x \geq 0$) vaut: $E_+^{\min} = E_0^+$

Or l'énergie doit être conservée.

Donc le soliton incident doit donc avoir
l'énergie minimale:

$$E_{\min} = 8\sqrt{\mu_+ g \kappa L}$$

⑥ On identifie : $\frac{8\sqrt{\mu_- g \kappa_- L_-}}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} = 8\sqrt{\mu_+ g \kappa_+ L_+}$, (16)
 $(c_0 = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{\kappa_-}{\mu_-}})$

ce qui donne :
$$v = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\kappa_- \left(\frac{1}{\mu_-} - \frac{1}{\mu_+} \right)}$$

④ Il faut que $E_+ = E_-$ avec la condition $v_+ = v_-$:

$$\frac{8\sqrt{\mu_- g \kappa_- L_-}}{\sqrt{1 - (v/c_0^-)^2}} = \frac{8\sqrt{\mu_+ g \kappa_+ L_+}}{\sqrt{1 - (v/c_0^+)^2}}$$

ce qui donne : $\mu_- \kappa_- L_- (1 - v^2 \epsilon^2 \frac{\mu_+}{\kappa_+})$

$$\mu_+ \kappa_+ L_+ (1 - v^2 \epsilon^2 \frac{\mu_-}{\kappa_-})$$

→ en particulier : $v \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\kappa_+ L_+}{\kappa_- L_-} = \frac{\mu_-}{\mu_+} = \frac{1}{8}}$

⑦ si $v \rightarrow c_0^-$, alors il faut aussi
 que $v \rightarrow c_0^+$ (annulation simultanée des 2 membres)

donc : $\frac{\epsilon^2 \mu_+}{\kappa_+} = \frac{\epsilon^2 \mu_-}{\kappa_-}$

soit $\boxed{\frac{\epsilon^2 \mu_+}{\kappa_+} = \frac{\mu_-}{\mu_+} = \frac{1}{8}}$

d'où $\boxed{\frac{L_+}{L_-} = \left(\frac{\mu_+}{\mu_-} \right)^{-2/3} = \frac{1}{4}}$

et $\boxed{\frac{\kappa_+}{\kappa_-} = \left(\frac{\mu_+}{\mu_-} \right)^{-1/3} = \frac{1}{2}}$

(42) → Le raisonnement LOCAL permettant d'aboutir (17) à (5) reste valide (à condition que les paramètres mécaniques varient assez "doucement").

→ mais $c_0 = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ dépendront dorénavant de x si μ, κ et ℓ en dépendent.

⑩ l'équation (5) devrait être modifiée en :

$$\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2(x) \sin \theta = 0 \right]$$

(43) ⑩ $E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_0}\right)^2}}$ et $\lambda = \lambda_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_0}\right)^2}$

sont à rapprocher de l'énergie et de la longueur d'onde de de Broglie d'une particule relativiste :

$$\begin{cases} E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2 E_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ p = \frac{hc}{\lambda} = \gamma mv \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{mv} \sqrt{1 - (v/c)^2} \end{cases}$$

λ_0

(44) Propagation d'un paquet d'ondes planes dans un milieu non dispersif et non atténuant.

(45) ⑩ Pour observer des solitons, il faut 2 ingrédients : non-linéarité et dispersion.

- ⑩ Câble coax. utilisé dans les conditions des TP ($f \leq 20 \text{ MHz}$) : pas de dispersion / non linéarité $\Rightarrow$ solitons non observables
- ⑩ Fibre optique : oui c'est possible car c'est un milieu dispersif, et ss fort chp, il peut devenir non linéaire (effet Kerr).

nicolas.chirinet @ free.fr