

Physique B - XEULC - Filière PC

I - Trajectoire d'un volant de badminton

1. *Le volant est assimilé à un point matériel : l'hypothèse manque dans l'énoncé.*

Le volant n'est soumis qu'à son poids, son accélération est constante : sa trajectoire est une parabole située dans le plan défini par le point de lancement, son vecteur vitesse initial $\vec{U}_0$ et la verticale.

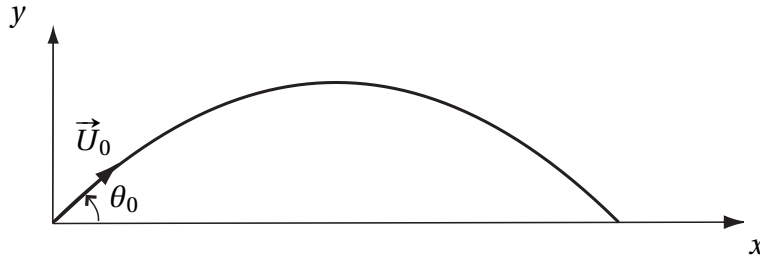


FIGURE 1 – Trajectoire du volant soumis à son poids.

La loi de la quantité de mouvement appliquée au volant s'écrit : $m \frac{d\vec{U}}{dt} = m \vec{g}$, soit $\vec{U} = \vec{g}t + \vec{U}_0$ puis :

$$\begin{cases} x = U_0 \cos \theta_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + U_0 \sin \theta_0 t \end{cases}$$

Le volant touche le sol à l'instant $t_f = \frac{2U_0}{g} \sin \theta_0$, la portée $L_0 = x(t_f)$ est égale à :

$$L_0 = \frac{2U_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0.$$

2. $[U_0] = LT^{-1}$, $[g] = LT^{-2}$ d'où $[L_0] = \frac{L^2 T^{-2}}{LT^{-2}} = L$: l'expression est bien homogène.

Quand $\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $L_0 = 0$ ce qui est tout à fait normal.

3. L_0 est maximale à U_0 donnée pour $\theta_0 = 45^\circ$.

4. $[C_x] = \frac{[F]}{[\rho][S][U]^2}$. Or $[F] = MLT^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[S] = L^2$ et $[U] = LT^{-1}$. On en déduit :

$$[C_x] = \frac{MLT^{-2}}{ML^{-3} \times L^2 \times L^2 T^{-2}} = \emptyset.$$

C_x est sans dimension.

L'allure de la courbe donnant C_x en fonction du nombre de Reynolds $Re = \frac{UL}{\nu}$ est donnée par la figure 2 (en échelle logarithmique).

Pour un solide de forme quelconque, l'allure de la courbe est la même, les valeurs numériques diffèrent légèrement.

5. Le nombre de Reynolds du volant varie entre $Re_{\min} = \frac{6,7 \times 6 \times 10^{-2}}{1,5 \times 10^{-5}} \simeq 3 \times 10^4$ et $Re_{\max} = \frac{58 \times 6 \times 10^{-2}}{1,5 \times 10^{-5}} \simeq 2 \times 10^5$: l'écoulement de l'air autour du volant est turbulent.

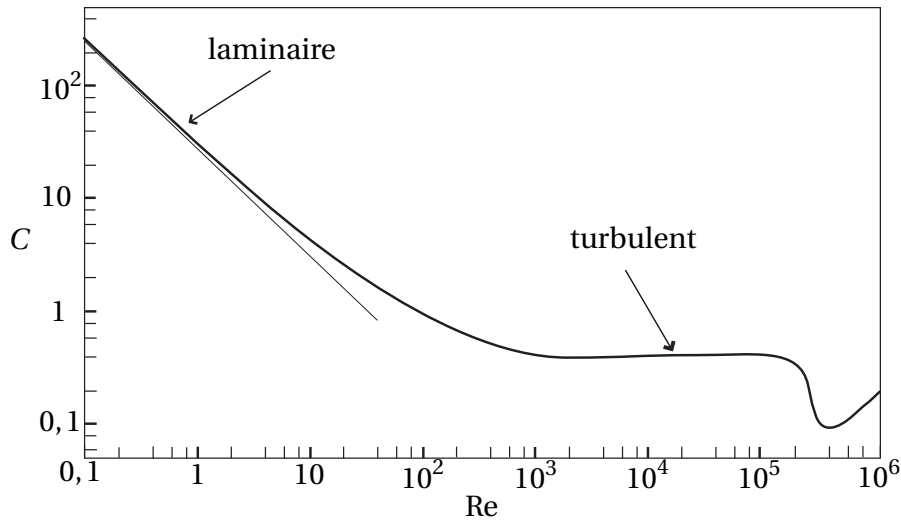


FIGURE 2 – Coefficient de traînée d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds.

6. L'expression de la force de freinage est donc celle qui est donnée dans l'énoncé, avec C_x constant. Le volant est soumis à son poids et à cette force, le référentiel terrestre est supposé galiléen. La loi de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$m \frac{d\vec{U}}{dt} = m \vec{g} - \frac{1}{2} \rho S C_x U \vec{U}.$$

Cette équation admet la solution particulière constante : $\vec{U}_\infty = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho C_x S}} \vec{u}_y$ (l'axe des y étant l'axe vertical ascendant, Cf. la figure 1 de l'énoncé). Ce mouvement est bien rectiligne et uniforme.

7. *La question est un peu ambiguë : quelles expressions faut-il garder dans l'équation ? g ou $\rho S C_x$? Je choisis de garder g .*

L'équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{g} - g \frac{U \vec{U}}{U_\infty^2}.$$

8. On peut négliger la pesanteur si $U^2 \gg U_\infty^2$. Dans ce cas, l'équation du mouvement est :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -g \frac{U \vec{U}}{U_\infty^2}.$$

Le mouvement est rectiligne. En effet, on peut écrire $\vec{U} = U \vec{\tau}$ où $\vec{\tau}$ est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire. $\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{dU}{dt} \vec{\tau} + U \frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Or d'après l'équation du mouvement, $\frac{d\vec{U}}{dt}$ est colinéaire à $\vec{\tau}$. On en déduit que $\vec{\tau}$ est un vecteur constant et donc que la trajectoire est rectiligne.

On projette l'équation du mouvement sur la direction de la trajectoire. Il vient :

$$\frac{dU}{dt} = -g \frac{U^2}{U_\infty^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{U^2} \frac{dU}{dt} = \frac{g}{U_\infty^2}.$$

On intègre cette équation entre l'instant initial et un instant t quelconque :

$$\frac{1}{U(t)} = \frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t \Leftrightarrow U(t) = \frac{1}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t}.$$

9. On cherche $t_{1/2}$ tel que $U(t_{1/2}) = U_0/2$. On obtient : $t_{1/2} = \frac{U_\infty^2}{gU_0}$.

L'application numérique donne : $t_{1/2} = \frac{(6,7)^2}{9,8 \times 58} \simeq \frac{45}{570} \simeq 8 \times 10^{-2}$ s.

Sur la chronophotographie, on repère le point à partir duquel la distance parcourue entre deux points est la moitié de la distance entre les deux premiers points. C'est entre le point 2 et le point 3. Donc $t_{1/2}$ est compris entre 100 et 150 ms. L'ordre de grandeur est bon, la lecture sur le document est assez difficile.

10. L'équation donnant $U(t)$ s'écrit aussi, après projection sur l'axe des x : $\frac{dx}{dt} = \frac{\cos\theta_0}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2}t}$. On l'intègre entre l'instant initial et un instant t quelconque :

$$x(t) = \cos\theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln\left(1 + \frac{gU_0 t}{U_\infty^2}\right).$$

11. En éliminant t entre les expressions de $U(t)$ et de $x(t)$, on obtient :

$$x(U) = \cos\theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln\left(\frac{U_0}{U}\right).$$

12. La composante verticale de la force de freinage est égale au poids quand $\frac{1}{2}\rho SC_x U^2 \sin\theta_0 = mg$ donc quand $U = \frac{U_\infty}{\sqrt{\sin\theta_0}}$.

La distance horizontale parcourue est donc : $L = \cos\theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln\left(\sqrt{\sin\theta_0} \frac{U_0}{U_\infty}\right)$.

13. Quand l'accélération du volant est négligeable, sa vitesse est constante : les points sur la chronophotographie sont régulièrement espacés. Et normalement, le mouvement est vertical. On lit sur la figure que cela se produit à partir du quarantième point, donc pour $t > 2$ s.

14. Si on néglige le régime intermédiaire, la trajectoire a l'allure suivante :

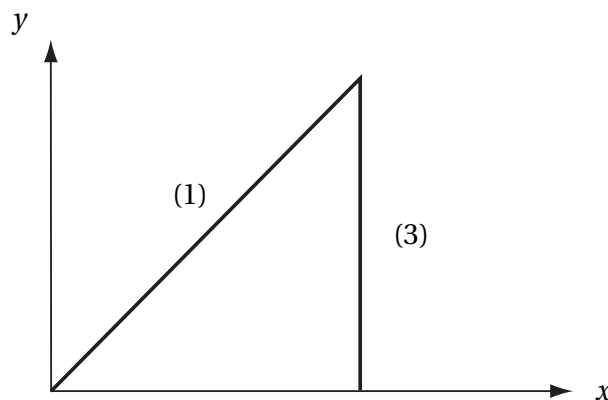


FIGURE 3 – Trajectoire simplifiée.

15. Dans ce cas, la portée du tir est L , calculée à la question 12 : $L = \cos\theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln\left(\sqrt{\sin\theta_0} \frac{U_0}{U_\infty}\right)$.

Cette valeur est inférieure à L_0 (et même sans doute très inférieure puisque la force de freinage est très importante au début de la trajectoire).

16. $L \simeq 0,6 \times \frac{(6,7)^2}{9,8} \ln\left(\sqrt{0,8} \times \frac{58}{6,7}\right) \simeq 0,6 \times \frac{45}{10} \ln(0,9 \times 8,6) \simeq 2,7 \times \ln 8 \simeq 5,4$ m. Cette valeur est inférieure aux 9 mètres indiqués sur la chronophotographie : c'est normal, on voit bien sur cette figure que le régime transitoire n'est pas négligeable.

Remarque : $L_0 \simeq 300$ m est bien très supérieur à L .

17. Les trois termes $m \frac{dU}{dt}$, mg et $\frac{1}{2} \rho S C_x U^2$ sont du même ordre de grandeur donc U de l'ordre de U_∞ puis $\frac{U}{T} \sim g$ (où T est l'ordre de grandeur de la durée de ce régime). Ce qui donne une distance

parcourue de l'ordre de $D \sim \frac{U_\infty^2}{g}$. L'approximation de la question 14 est justifiée si $D \ll L$. Ce n'est pas le cas car $D \simeq 4,5$ m. On remarque que $L + D$ est assez proche des 9 mètres de la figure.

18. Pour que la trajectoire réelle corresponde plus à la trajectoire simplifiée, il faut que $D \ll L$, ce qui revient à diminuer le rapport $\frac{U_\infty}{U_0}$. On peut augmenter U_0 ou diminuer U_∞ . Pour ce dernier point, il faut alléger le volant : un volant en plume est préférable à un volant en plastique. On peut aussi augmenter le coefficient de traînée C_x , ou augmenter la surface S . Par ailleurs, la température va jouer en modifiant la valeur de la masse volumique de l'air ρ , le taux d'humidité aussi, c'est un facteur important pour la masse d'un volant en plume.

Augmenter la valeur de la vitesse initiale est possible dans une certaine mesure (un volant peut atteindre une vitesse de l'ordre de 100 m.s^{-1}).

La convergence vers la solution limite apparaît dans le logarithme de U_∞/U_0 : on peut dire que cette convergence est assez lente.

C'est mon interprétation de la question mais il est difficile de savoir où l'auteur veut en venir.

19. Le temps de montée est égal à :

$$T_{\text{montée}} = \frac{U_\infty^2}{g} \left(\frac{\sqrt{\sin \theta_0}}{U_\infty} - \frac{1}{U_0} \right).$$

La hauteur de chute est $H = L \tan \theta_0$ donc le temps de descente est égal :

$$T_{\text{descente}} = \frac{L \tan \theta_0}{U_\infty} = \sin \theta_0 \frac{U_\infty}{g} \ln \left(\sqrt{\sin \theta_0} \frac{U_0}{U_\infty} \right).$$

La durée du régime transitoire est de l'ordre de $T_{\text{trans}} \simeq \frac{U_\infty}{g}$.

$\frac{T_{\text{trans}}}{T_{\text{descente}}} = \frac{D}{L \tan \theta_0}$. Si l'approximation de la question 14 s'applique : $T_{\text{trans}} \ll T_{\text{descente}}$. On a donc :

$$T_{\text{trans}} \ll T_{\text{descente}} < T_{\text{montée}}.$$

Remarque : avec les valeurs du texte, $T_{\text{trans}} \simeq 0,7$ s, $T_{\text{descente}} \simeq 1,1$ s et $T_{\text{montée}} \simeq 0,5$ s. L'approximation n'est pas vérifiée comme nous l'avons déjà vu.

II - Mesure de la masse du photon

1. En cherchant $\vec{E}$ sous forme d'une onde plane progressive harmonique : $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$, on obtient la relation de dispersion :

$$\omega^2 = c^2(k^2 + \mu^2).$$

On retrouve la relation de dispersion usuelle quand $\mu = 0$.

$$2. v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc}{\sqrt{k^2 + \mu^2}}.$$

Si on suppose que $\mu \ll k$, on obtient : $c - v_g \simeq \frac{c\mu^2}{2k^2}$.

3. Si le champ $\vec{E}$ est uniforme, son laplacien est nul. L'équation (1) s'écrit alors : $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu^2 \vec{E}$. La solution de cette équation est un champ oscillant à la pulsation $\omega_0 = \mu c$. La relation de Planck-Einstein donne l'énergie du photon correspondant : $\mathcal{E} = \hbar\omega_0 = \hbar\mu c$. Avec $\mathcal{E} = mc^2$, on obtient la masse du photon : $m = \frac{\hbar\mu}{c}$.

4. Les impulsions se propagent à une vitesse égale à la vitesse de groupe. Celle-ci dépend de k donc de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. Les signaux correspondant à deux longueurs d'onde différentes ne mettront pas la même durée pour nous parvenir : il y aura un décalage des dates de réception.

5. La durée de parcours d'une impulsion est : $t = \frac{L}{v_g}$ d'où $\delta t = L \frac{\Delta v}{v_g^2} \simeq L \frac{\Delta v}{c^2}$ (au premier ordre en

$$\frac{c - v_g}{c}), \text{ ou encore : } \frac{\Delta v}{c} = c \frac{\delta t}{L}.$$

$$6. \frac{\Delta v}{c} < 3 \times 10^8 \frac{2 \times 10^{-5}}{6 \times 10^{19}} = 10^{-16}.$$

7. On a vu précédemment que $c - v_g = \frac{c\mu^2}{2k^2} = \frac{c\mu^2 \lambda^2}{8\pi^2}$. Donc $\Delta v = v_g(\lambda_2) - v_g(\lambda_1) = c \frac{\mu^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{8\pi^2}$ (avec

$\lambda_2 \simeq 0,8 \mu\text{m}$ (rouge) et $\lambda_1 \simeq 0,4 \mu\text{m}$ (bleu)). On en déduit : $\mu^2 < \frac{8\pi^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \times 10^{-16}$, c'est-à-dire : $\mu^2 <$

$$\frac{80}{48} \times 10^{-2} \simeq 2 \times 10^{-2}, \text{ ou encore } \mu < 10^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

Alors $m < \frac{10^{-35}}{3 \times 10^8} \simeq 3 \times 10^{-44} \text{ kg}$.

8. δt est proportionnel à la distance entre l'observateur et l'objet astrophysique, d'où l'intérêt d'avoir recours à des objets lointains. Pour améliorer la borne supérieure obtenue, c'est-à-dire pour la diminuer, il faudrait travailler avec des longueurs d'onde plus grandes, des ondes radio par exemple.

9. D'une part : $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \frac{\vec{\text{grad}} \rho}{\epsilon_0} - \mu^2 \vec{\text{grad}} V - \Delta \vec{E}$. D'autre part : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ dans

le cadre de l'électrostatique, et $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$.

$$\text{Donc : } \frac{\vec{\text{grad}} \rho}{\epsilon_0} + \mu^2 \vec{E} - \Delta \vec{E} = \vec{0}.$$

Les équations (1) et (2) sont compatibles si $\vec{\text{grad}} \rho = 0$ donc si ρ est uniforme.

10. Si $\mu = 0$, on se trouve dans une situation classique. La distribution étant à symétrie sphérique, $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$. Le théorème de Gauss à travers une sphère de rayon $r < R$ donne : $4\pi r^2 E(r) = 0$ puisque l'intérieur de la sphère est vide de charges. Donc à l'intérieur de la sphère le champ électrique est nul et le potentiel uniforme, égal à V_0 .

11. L'équation (2) s'écrit ici : $\text{div} \vec{E} = -\mu^2 V$. Quand $\mu = 0$, $\vec{E} = \vec{0}$ et $V = V_0$. Si μ est faible (on précisera dans la question suivante), la présence de μ constitue un terme correctif par rapport à la situation

$\mu = 0$ (traitement perturbatif). Dans ce cas, le terme prépondérant du second membre de l'équation (2) est $\mu^2 V_0$. L'équation (2) s'écrit alors : $\text{div } \vec{E} = -\mu^2 V_0$.

Le théorème de Gauss à travers la sphère de rayon $r < R$ s'écrit : $4\pi r^2 E(r) = -\mu^2 V_0 \times \frac{4}{3}\pi r^3$, d'où :

$$\vec{E} = -\frac{1}{3}\mu^2 V_0 r \vec{e}_r,$$

et :

$$V(r) = V_0 \left(1 + \frac{\mu^2}{6}(r^2 - R^2) \right),$$

en utilisant le fait que $V(R) = V_0$.

12. $V(r) \simeq V_0$ revient à dire que $\mu \ll \frac{1}{R}$.

13. La différence de potentiel à mesurer est de l'ordre de (en valeur relative) : $\frac{\delta V}{V_0} \simeq \frac{\mu^2 R^2}{6}$. Si on prend R de l'ordre de 10 cm et μ de l'ordre de la valeur maximale déterminée à la question 7, on obtient : $\frac{\delta V}{V_0} \simeq 2 \times 10^{-4}$. Cette valeur ne semble pas trop difficile à atteindre avec un bon voltmètre. On peut sans doute obtenir une précision encore meilleure donc réduire la borne supérieure obtenue à la question 7.

Dans le vieux sujet X M' 1990 qui traite de la même question, on donne pour une sphère de rayon 72 cm et une mesure du potentiel à 61 cm du centre, la valeur $\frac{\delta V}{V_0} < 0,32 \times 10^{-9}$, ce qui donne une borne supérieure de la masse du photon de 4×10^{-48} kg.