

Convertisseur pour table à induction (X-ENS PSI 2015)

1 Structure et commande pleine onde

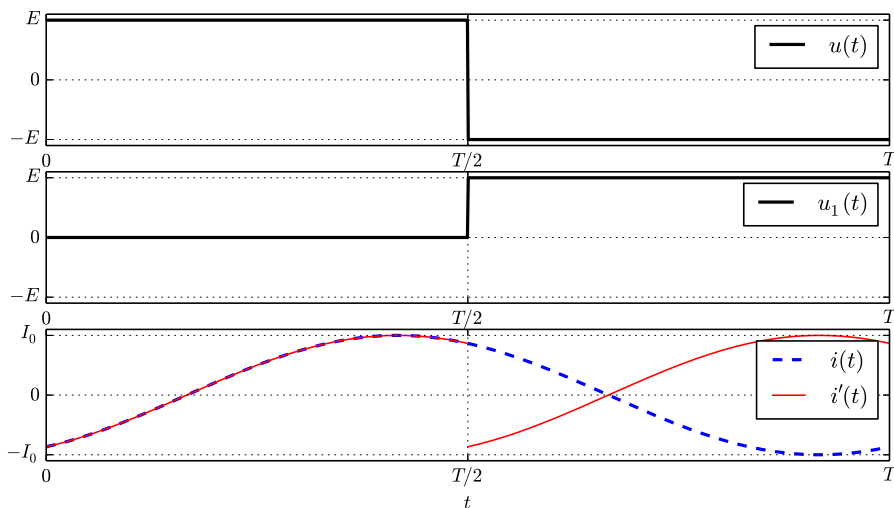
1. La charge comporte une bobine qui impose la continuité du courant ; on assimile la charge à une **source de courant**.

Remarque : il y a certes un condensateur au sein de la charge mais la tension aux bornes de la charge n'est pas la tension aux bornes du condensateur.

Choix des interrupteurs :

- si K_1 et K'_1 simultanément fermés, la source de tension est court-circuitée ;
- idem pour K_2 et K'_2 ;
- il faut toujours deux interrupteurs fermés sinon la source de courant est en circuit-ouvert.

On a donc nécessairement : K_1 et K'_1 complémentaires et K_2 et K'_2 complémentaires.



2. On peut résumer la séquence de fonctionnement sous forme d'un tableau :

	$u(t)$	$u_1(t)$	$i'(t)$
$0 < t < T/2$	E	0	$i(t)$
$T/2 < t < T$	$-E$	E	$-i(t)$

Le tracé a été réalisé pour $\varphi = -\pi/3$ (Cf. figure précédente). Pour déterminer le retard du courant $i(t)$ par rapport à la commande, on cherche le passage par zéro, c'est à dire $\omega t_0 = -\varphi$, donc : $t_0 = -\frac{\varphi}{2\pi}T$.

3. Valeur efficace :

$$U^2 = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} E^2 dt + \int_{T/2}^T (-E)^2 dt \right) \Rightarrow \boxed{U = E}$$

4. D'après l'énoncé, le terme fondamental a pour expression :

$$e_1(t) = \frac{4E}{\pi} \sin(\omega t) = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{2} \sin(\omega t)$$

On en déduit $\boxed{U_1 = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}}}$.

5. Taux de distorsion :

- (a) Avec les valeurs obtenues pour les grandeurs efficaces :

$$\tau_H(u) = 100 \times \frac{\sqrt{E^2 - 8E^2/\pi^2}}{4E/(\pi\sqrt{2})} = 100 \times \sqrt{(E^2 - 8E^2/\pi^2) \times \frac{\pi^2}{8E^2}}$$

$$\boxed{\tau_H(u) = 100 \times \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1}}$$

Application numérique (avec $\pi^2 \simeq 10$) :

$$\tau_H(u) = 100 \times \sqrt{\frac{10}{8} - \frac{8}{8}} = 100 \sqrt{\frac{2}{8}} = \frac{100\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\tau_H(u) = 50\%}$$

- (b) Le courant $i(t)$ est une fonction sinusoïdale, le signal s'identifie avec son fondamental, en conséquence : $\boxed{\tau_H(i) = 0\%}$.

C'est le filtre qui permet théoriquement d'éliminer les harmoniques.

6. L'intégrale est liée à l'aire sous la courbe, le signal se reproduisant à l'identique sur la seconde demi-période (Cf. courbe 1.2), on peut réduire l'intervalle d'intégration :

$$\begin{aligned} \langle i' \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T i'(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin(\omega t + \varphi) dt \\ \langle i' \rangle &= \frac{2I_m}{T} \left[-\frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{2I_m}{T\omega} \left[\cos \varphi - \cos\left(\frac{\omega T}{2} + \varphi\right) \right] = \frac{2I_m}{2\pi} \times 2 \cos \varphi \\ &\quad \boxed{\langle i' \rangle = \frac{2I_m}{\pi} \cos \varphi} \end{aligned}$$

7. En convention récepteur la puissance instantanée reçue par la charge s'écrit $p(t) = u(t)i(t)$, c'est à dire pour la puissance moyenne :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} Ei'(t)dt + \int_{T/2}^T (-E) \times (-i'(t))dt \right]$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T Ei'(t)dt = \langle Ei' \rangle = E \langle i' \rangle \Rightarrow \boxed{P = \frac{2EI_m \cos \varphi}{\pi}}$$

8. En convention générateur la puissance instantanée fournie par le générateur s'écrit $p'(t) = Ei'(t)$, c'est à dire pour la puissance moyenne :

$$P' = \langle Ei' \rangle = E \langle i' \rangle \Rightarrow \boxed{P' = \frac{2EI_m \cos \varphi}{\pi}}$$

On constate que $\boxed{P = P'}$. Avec des interrupteurs parfaits et en régime périodique (pas d'accumulation dans la bobine ou le condensateur), l'énergie fournie par le générateur est intégralement transmise à la charge.

9. Pour les raisonnements suivants, attention que $\varphi < 0$. On se reportera aux courbes de la figure de la question 1.2.

- Pour $0 < \theta < \pi$: seuls K_1 et K'_2 sont passants.
— $0 < \theta < -\varphi$, $i'(t) = i_1(t) < 0$, D_1 et D'_2 sont passantes ;
— $-\varphi < \theta < \pi$, $i'(t) = i_1(t) > 0$, T_1 et T'_2 sont passants.
→ Pour $\pi < \theta < 2\pi$: seuls K'_1 et K_2 sont passants.
— $\pi < \theta < \pi - \varphi$, $i'(t) < 0$, D_2 et D'_1 sont passantes ;
— $\pi - \varphi < \theta < 2\pi$, $i'(t) > 0$, T_2 et T'_1 sont passants.

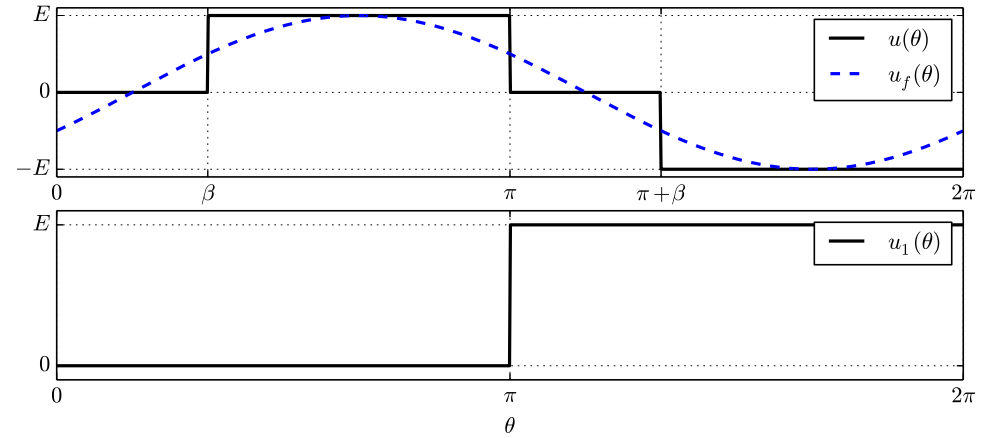
Intervalle de θ	0 à $-\varphi$	$-\varphi$ à π	π à $\pi - \varphi$	$\pi - \varphi$ à 2π
Interrupteurs fermés	D_1 et D'_2	T_1 et T'_2	D_2 et D'_1	T_2 et T'_1

2 Commande décalée

1. Pour $0 < \theta < \beta$, K_1 et K_2 sont fermés et le courant circule dans la maille formée de la charge et des interrupteurs K_1 et K_2 .
Pour $\pi < \theta < \pi + \beta$, K'_1 et K'_2 sont fermés et le courant circule dans la maille formée de la charge et des interrupteurs K'_1 et K'_2 .

Compte tenu de la commande proposée, on obtient la représentation graphique de $u(\theta)$ et $u_1(\theta)$ ci-contre.

2. Le fondamental de $u(t)$, noté u_f , représente une fonction sinusoïdale qui va épouser la forme de $u(\theta)$, c'est à dire, passer par 0 pour $\theta = \beta/2$ (Cf. figure, échelle verticale arbitraire).

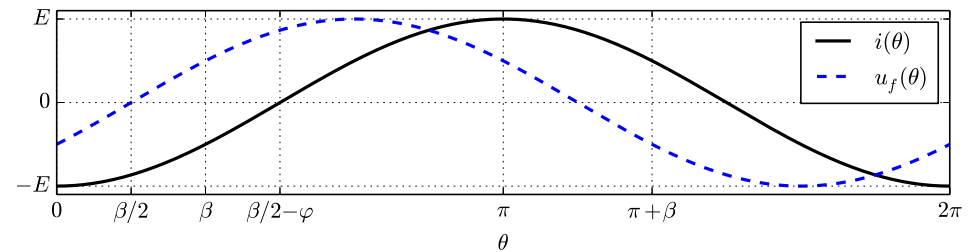


Dans la première partie, commande pleine onde, le signal fondamental de $u(\theta)$ avait pour expression $u_f(\theta) = \frac{4E}{\pi} \sin(\theta)$ (Cf. formule du I.1.4) et l'intensité dans la charge avait pour expression : $i(\theta) = I_m \sin(\theta + \varphi)$.

Le retard de phase de l'intensité du courant vis à vis de la tension est dû à l'impédance complexe de la charge. Si on conserve la même charge et la même fréquence, l'impédance de charge est inchangée, il en est de même du déphasage.

Dans cette nouvelle partie, commande décalée, le fondamental de la tension est décalée de $\beta/2$ et il s'écrit : $u_f(\theta) = U_{m,f} \sin(\theta - \beta/2)$ et donc pour l'intensité du courant décalée de φ , $i(\theta) = I_m \sin(\theta - \beta/2 + \varphi)$.

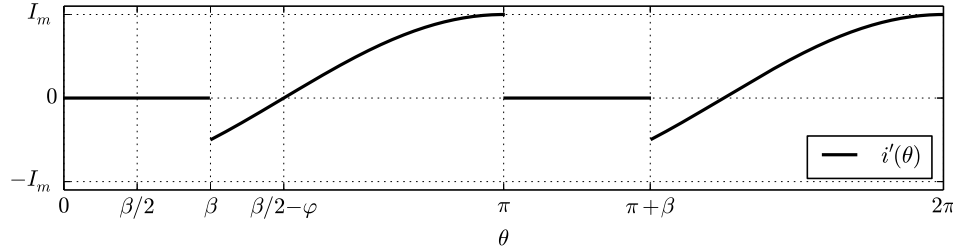
On obtient donc pour la représentation de $i(\theta)$ (le tracé a été réalisé avec $\beta = \pi/3$ et $\varphi = -\pi/3$) :



3. Il s'agit de relier i' à i sur les différentes phases :

→ Pour $0 < \theta < \beta$ et $\pi < \theta < \pi + \beta$, la source de tension est en circuit ouvert, en conséquence $i'(\theta) = 0$;

→ Pour $\beta < \theta < \pi$, K_1 et K'_2 fermés, $i'(\theta) = i(\theta)$;
→ Pour $\pi + \beta < \theta < 2\pi$, K_2 et K'_1 fermés, $i'(\theta) = -i(\theta)$.
On peut alors déduire le tracé de $i'(\theta)$ connaissant $i(\theta)$:



4. Commande décalée :

- *Avantages* : la tension $u(\theta)$ « épouse » mieux la forme d'une sinusoïde que le signal crêteau, la présence d'harmoniques est réduite ;
- *Inconvénients* : la commande est plus complexe à créer et la source de tension subit des discontinuités de courant plus nombreuses.

5. Valeur efficace :

$$U'^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^2(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u^2(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_\beta^\pi E^2 d\theta = \frac{\pi - \beta}{\pi} E^2$$

$$U' = E \sqrt{1 - \frac{\beta}{\pi}}$$

6. Taux de distorsion harmonique :

$$\tau_H(u) = 100 \times \frac{\sqrt{(1 - \beta/\pi) - \frac{8}{\pi^2} \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}}{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

7. Minimiser $\tau_H(\beta)$ revient à minimiser $f(\beta)$ et donc $g(\beta)$:

$$g(\beta) = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{1 - \beta/\pi}{\cos^2(\beta/2)} - \frac{8}{\pi^2} \right) = \frac{\pi^2}{8} \alpha(\beta)$$

$$\alpha'(\beta) = \frac{-1/\pi \times \cos^2(\beta/2) + (1 - \beta/\pi) \sin(\beta/2) \cos(\beta/2)}{\cos^4(\beta/2)}$$

$$\alpha'(\beta) = 0 \Leftrightarrow -\cos^2(\beta/2) + (\pi - \beta) \sin(\beta/2) \cos(\beta/2) = 0$$

$\cos(\beta/2) \neq 0$ sinon $\beta = \pi$ et on aurait toujours $u(\theta) = 0$ (aucun transfert d'énergie).

En conséquence, on retient $-\cos(\beta/2) + (\pi - \beta) \sin(\beta/2) = 0$, c'est à dire :

$$h(\beta) = (\pi - \beta) \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1$$

Du tableau de données, on en déduit : $\beta \simeq 45^\circ$ (en fait très légèrement supérieur).

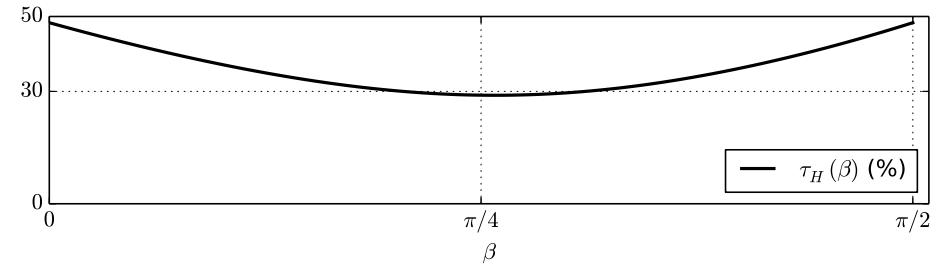
On peut alors, en utilisant le tableau, déterminer une valeur approchée du taux de distorsion :

$$\tau_{H,min} = 100 \times \frac{\sqrt{(1 - 1/4) - c(\pi/4)}}{k(\pi/4)} = 100 \times \frac{\sqrt{3/4 - 0,69}}{0,83} = 100 \times \frac{\sqrt{0,06}}{0,83}$$

$$\tau_{H,min} \simeq \frac{100 \times 10^{-1} \sqrt{6}}{10^{-1} \times 8} = \frac{2,5 \times 100}{8} \quad \tau_{H,min} \simeq 0,3 = 30\%$$

On constate que le taux de distorsion est significativement réduit par rapport à la commande pleine onde.

8. Le tracé « à la main » en utilisant les valeurs du tableau semble assez chronophage, un tracé à l'ordinateur donne :



3 Étude de la résonance

1. De la loi d'Ohm généralisée, on déduit pour les grandeurs complexes :

$$\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I} \Rightarrow \underline{U} = \left(R + j \left[L\omega - \frac{1}{C\omega} \right] \right) \underline{I}$$

Remarque : les deux grandeurs étant définies à partir de sinus, on peut effectuer un décalage globale de $-\pi/2$ pour se ramener à des cosinus, seul le déphasage d'une grandeur par rapport à l'autre étant significatif :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j(L\omega - 1/(C\omega))}$$

C'est à dire pour le module et la phase :

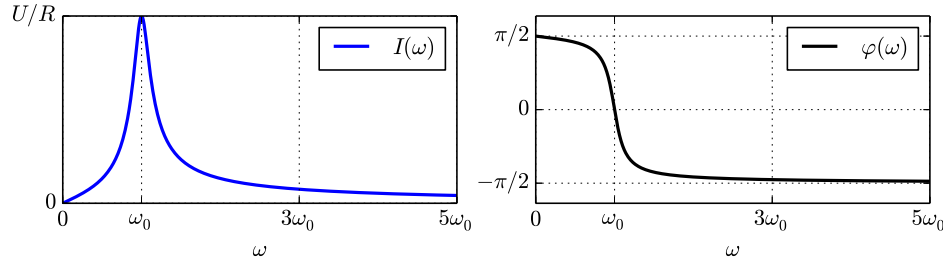
$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega - 1/(C\omega)}{R}\right)$$

2. I est maximale pour $L\omega - 1/(C\omega) = 0$ c'est à dire $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, avec $I_{max} = U/R$.

L'amplitude de l'intensité est nulle en basse fréquence (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert), et en haute fréquence (la bobine se comporte comme un circuit ouvert).

Le déphasage est nul à la résonance (la charge est équivalente à une simple résistance), $\varphi(0) = +\pi/2$ et $\varphi \rightarrow -\pi/2$ quand $\omega \gg \omega_0$.

Ce qui donne pour les tracés (pour un facteur de qualité $Q = 5$) :



3. Cherchons les expressions des pulsations de résonance :

$$I(\omega_c) = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow L\omega_c - \frac{1}{C\omega_c} = \pm R$$

Il s'agit donc de résoudre les équations du second degré :

$$LC\omega_c^2 \pm RC\omega_c - 1 = 0$$

Ces équations admettent pour solutions :

$$\omega_c = \frac{\pm RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

Parmi ces solutions, deux sont positives :

$$\omega_{c,2} = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} \quad \text{et} \quad \omega_{c,1} = \frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

Et donc pour la largeur de la bande passante (avec $\omega = 2\pi/f$) :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \Rightarrow \Delta f = \frac{R}{2\pi L}$$

Le facteur de qualité est très généralement défini par $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, c'est à dire :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

4. Il s'agit d'appliquer l'action de la fonction de transfert à chacune des composantes du signal de la tension $e(t)$ (Cf. énoncé I.1.4) :

$$I_{2k+1} = \frac{4E/\pi}{\sqrt{R^2 + \left[L(2k+1)\omega - \frac{1}{C(2k+1)\omega}\right]^2}} \times \frac{1}{2k+1}$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{L(2k+1)\omega - 1/(C(2k+1)\omega)}{R}\right)$$

5. Application numérique :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2\pi} \times 10^{-3} \times \frac{0,5}{2\pi} \times 10^{-6}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5^2 \times 10^{-10}}} = \frac{2\pi}{5 \times 10^{-5}}$$

$$\text{Et donc } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0,2 \times 10^5 \text{ Hz} \Rightarrow f_0 = 2 \times 10^4 \text{ Hz}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{5}{2\pi} \times 10^{-3} \times 2\pi \times 2 \times 10^4 / 20 = \frac{100}{20} \Rightarrow Q = 5$$

6. En introduisant $x = \omega/\omega_0$ et $Q = L\omega_0/R$, la grandeur efficace peut se réécrire :

$$I_{2k+1}^{eff} = \frac{4E/(\pi R\sqrt{2})}{\sqrt{1 + Q^2 [(2k+1)u - 1/[(2k+1)u]]^2}} \times \frac{1}{2k+1}$$

À la résonance $u = 1$ et on en déduit :

$$I_1 = \frac{4E}{\pi R\sqrt{2}}$$

$$I_3 = \frac{4E}{3\pi R\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(3 - 1/3)^2}} \Rightarrow I_3 = \frac{4E}{3\pi R\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(8/3)^2}}$$

$$I_5 = \frac{4E}{5\pi R\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(5 - 1/5)^2}} \Rightarrow I_5 = \frac{4E}{5\pi R\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(24/5)^2}}$$

Application numérique :

$$I_1 = \frac{4 \times \pi\sqrt{2} \times 150}{\pi \times 20 \times \sqrt{2}} = \frac{600}{20} \Rightarrow I_1 = 30 \text{ A}$$

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{1}{3\sqrt{1 + 5^2 \times (8/3)^2}} \simeq \frac{1}{3 \times 5 \times 8/3} \Rightarrow \frac{I_3}{I_1} = 1/40$$

$$\frac{I_5}{I_1} = \frac{1}{5\sqrt{1 + 5^2 \times (24/5)^2}} \simeq \frac{1}{5 \times 5 \times 24/5} \Rightarrow \frac{I_5}{I_1} = 1/120$$

Deux effets d'atténuation se superposent : les harmoniques du créneau dont l'amplitude décroît comme $1/(2k+1)$ et le filtre qui affecte les hautes fréquences d'un facteur aussi égale à $1/(2k+1)$ (Cf. formule des I_{2k+1} pour

$2k + 1 \gg 1$. On obtient donc une décroissance globale en $1/(2k + 1)^2$.

Les harmoniques de rang élevé sont donc très atténués.

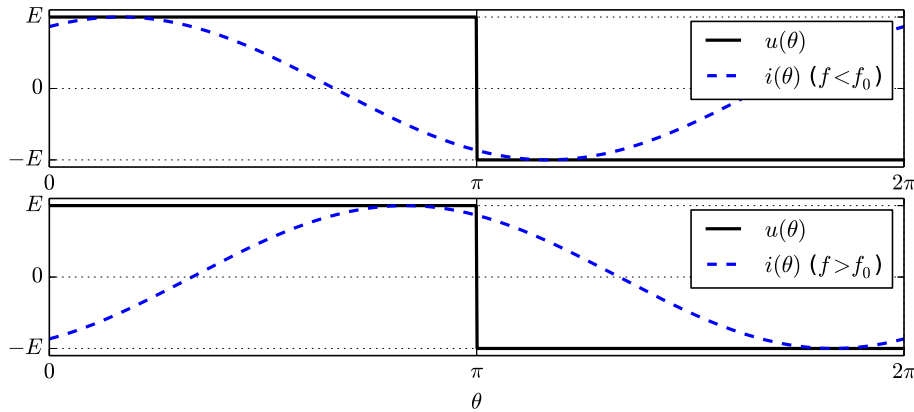
7. La formule de Parseval fournie par l'énoncé donne $I^2 = I_1^2 + I_3^2 + I_5^2$, donc :

$$\frac{\tau_H(i)}{100} = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{I_3^2 + I_5^2}}{I_1} = \sqrt{\frac{1}{40^2} + \frac{1}{120^2}} \simeq \frac{1}{40} \Rightarrow \tau_H(i) = 2,5\%$$

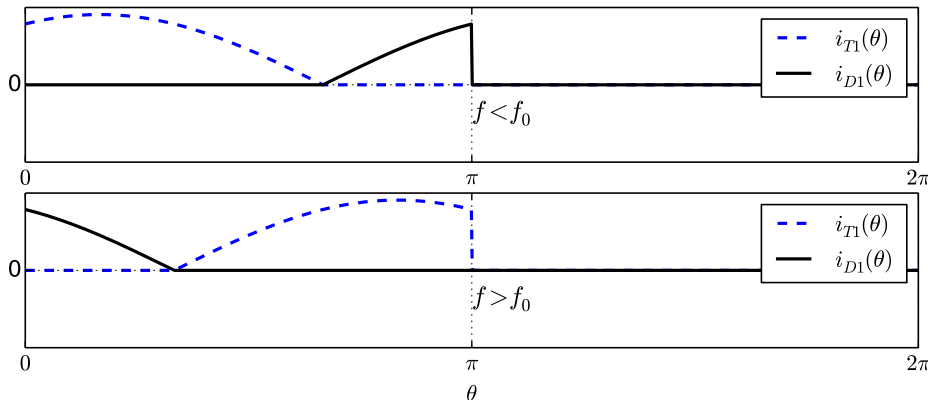
Le taux de distorsion de l'ordre de 2,5% est inférieur au critère de 5%, on peut donc confondre l'intensité avec son terme fondamental.

8. D'après le tracé de $\varphi(\omega)$ (III.2), on constate que $\varphi > 0$ pour $f < f_0$ et $\varphi < 0$ pour $f > f_0$.

Ce qui donne pour les tracés (pour le tracé $\varphi = \pm\pi/3$) :



9. Pour la commande pleine onde, l'interrupteur K_1 est passant pour $0 < \theta < \pi$ et bloqué sinon.



Plus précisément, pour $i > 0$, la diode est bloquée, le transistor est passant et $i_{T_1} = i$; pour $i < 0$, le transistor est bloqué, la diode est passante et $i_{D_1} = -i$. On peut alors déduire du tracé de l'intensité i , les intensités dans le transistor et la diode au cours du temps.

10. On constate qu'une extinction forcée se produit pour le transistor en $\theta = \pi$ pour $f > f_0$.

On retient donc $f < f_0$ caractérisé par une extinction naturelle pour le courant dans le transistor.

4 Asservissement de puissance

1. On constate que $P = P(f)$, en modifiant la fréquence, on modifie la puissance.

2. Pour cette courbe en cloche, il y a **deux valeurs de fréquence** l'une supérieure à f_0 l'autre inférieure à f_0 .

3. On suppose que l'OCT fournit une fréquence fonction croissante de la tension d'entrée.

On part d'une situation telle que les grandeurs soient indicées par s :

On suppose la présence d'une perturbation telle que la puissance augmente : $P > P_s$ alors e décroît, donc f décroît ; pour que le système soit stable, il faut que la puissance diminue quand f décroît. Il faut donc se situer en amont de la résonance, on retient donc $f < f_0$.

À la résonance, P ne dépend pas de f à l'ordre 1, on ne peut donc pas asservir la puissance à la valeur $P = P_{max}$.

4. Avec $x(t) = k_i i(t)$ et $y(t) = k_v u(t)$, on obtient à la sortie du multiplieur :

$$s(t) = K_0 k_i k_v i(t) u(t) = K_0 k_i k_v p(t) = 10^{-1} \times 2 \times 10^{-1} \times 5 \times 10^{-2}$$

$$s(t) = 10^{-3} \times p(t)$$

5. On se place dans le cas d'une commande pleine onde, car l'expression des harmoniques de la tension u n'est pas fournie pour la commande décalée :

$$s(t) = K_0 k_i k_v \times \frac{4EI_m}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)\omega t] \sin(\omega t + \varphi) \right]$$

$$s(t) = K_0 k_i k_v \times \frac{4EI_m}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (\cos[2k\omega t - \varphi] - \cos[(2k+2)\omega t + \varphi])$$

Le signal $s(t)$ contient donc un terme de fréquence nulle proportionnel à $\cos \varphi$ et des termes de pulsation $2k\omega$ avec $k \in N^*$.

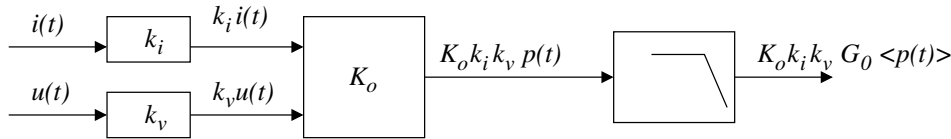
Pour récupérer la puissance moyenne, il ne faut conserver que le terme de fréquence nulle et éliminer les termes oscillants.

Il faut donc utiliser un filtre passe-bas qui élimine les harmoniques de type $2k\omega$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

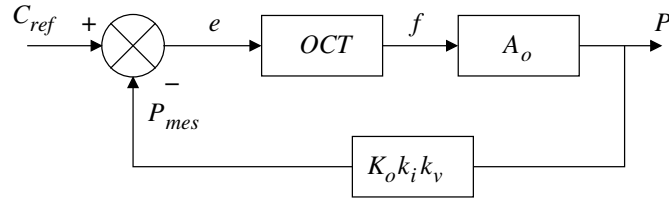
Une atténuation d'un facteur 100 du signal correspond à une atténuation de 40 dB ; un filtre passe-bas du second ordre possède une pente de -40 dB/dec ; pour éliminer la plus petite des pulsations (ici 2ω) la pulsation 2ω doit être au moins égale à $10\omega_c$, donc :

$$\omega_c^{max} = \frac{2\omega}{10} \Rightarrow \boxed{\omega_c^{max} = \frac{\omega}{5}}$$

Schéma du bloc de puissance :



6. Schéma fonctionnel :



En régime permanent $e = 0$ (erreur souhaitée nulle), ce qui impose :

$$C_{ref} = P_{mes} = K_0 k_i k_v P$$

Avec un point de fonctionnement $P = 3P_{max}/4$:

$$C_{ref} = K_0 k_i k_v \times \frac{3}{4} P_{max} \Rightarrow \boxed{C_{ref} = 7,5 \times 10^{-4} P_{max}}$$

5 Modélisation thermique

1. Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}} T$.

Cas unidimensionnel : $j_{Qx} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$.

2. On applique le premier principe de la thermodynamique à l'élément de longueur dx et de section S entre les instants voisins t et $t + dt$. On néglige la dilatation du matériau.

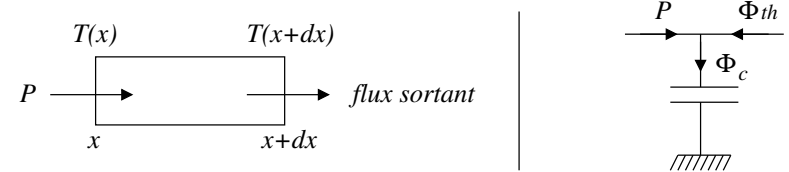
$$dU = \delta Q + \delta W \simeq \delta Q \Rightarrow \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = j_Q(x) S dt - j_Q(x+dx) S dt + P_v S dx dt$$

$$\Leftrightarrow \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} dx S dt + P_v S dx dt$$

En utilisant la loi de Fourier, on en déduit :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + P_v}$$

Commençons par représenter le problème thermique équivalent :



Le bilan thermique s'écrit alors :

$$\rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = P dt - j_Q S dt \Leftrightarrow \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} = P + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} S \quad (1)$$

En partant du schéma électrique proposé, et en appliquant la loi des nœuds au niveau du condensateur et la définition de la résistance thermique, la température jouant le rôle du potentiel et le flux thermique celui du courant électrique, on peut écrire :

$$\Phi_c = P + \Phi_{th} \Leftrightarrow dC_{th} \times \frac{\partial T}{\partial t} = P + \frac{T(x+dx) - T(x)}{dR_{th}}$$

$$dC_{th} \frac{\partial T}{\partial t} = P + \frac{1}{dR_{th}} \frac{\partial T}{\partial x} dx \quad (2)$$

En identifiant les deux équations, on en déduit :

$$\boxed{dC_{th} = \rho c S dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\lambda S = \frac{dx}{dR_{th}}}$$

3. D'après les relations précédemment obtenues :

$$\boxed{\Lambda_x = \frac{1}{\lambda S}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Gamma_x = \rho c S}$$

4. En considérant que $P(x, t)$ est la puissance thermique traversant la résistance $\Lambda_x dx$, on obtient :

→ « Loi des mailles » : $T(x, t) = \Lambda_x dx P(x, t) + T(x+dx, t)$, donc :

$$\boxed{-\frac{\partial T}{\partial x} = \Lambda_x P(x, t)}$$

→ « Loi des nœuds » : $\Gamma_x dx \frac{\partial T(x+dx, t)}{\partial x} = P(x, t) - P(x+dx, t)$. À l'ordre

1 en dx , on peut confondre $T(x+dx)$ avec $T(x)$ dans le membre de gauche :

$$\Gamma_x \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

5. En combinant les deux équations, on en déduit :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \Lambda_x \frac{\partial P}{\partial x} = -\Gamma_x \Lambda_x \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \Gamma_x \Lambda_x \frac{\partial T}{\partial t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}}$$

6. Pour effectuer une simulation numérique, il faut réaliser une double discrétisation spatiale et temporelle :

$$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T[(n+1)\tau] - T[n\tau]}{\tau};$$

$$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} \simeq \frac{T[(i+1)l] - T[il]}{l}; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T[(i+1)l] + T[(i-1)l] - 2T[il]}{l^2}$$

Il faut alors effectuer une double itération, une itération spatiale pour chaque pas de temps, compte tenu des conditions aux limites et des conditions initiales.

7. Avec $\underline{H} = \frac{T_j}{p}$, on obtient dans l'espace temporel :

$$T_j(t) + (R_{jb}C_b + R_{ba}C_b + R_{ba}C_j) \frac{dT_j}{dt} + R_{jb}R_{ba}C_jC_b \frac{d^2T_j}{dt^2} \\ = (R_{jb} + R_{ba})p + R_{jb}R_{ba}C_b \frac{dp}{dt}$$

8. Pour $t > 0$, la puissance est constante et l'équation se simplifie selon :

$$T_j(t) + (R_{jb}C_b + R_{ba}C_b + R_{ba}C_j) \frac{dT_j}{dt} + R_{jb}R_{ba}C_jC_b \frac{d^2T_j}{dt^2} = (R_{jb} + R_{ba})P_0$$

Avec $R_{ba} \gg R_{jb}$ et $C_b \gg C_j$, on peut déjà effectuer une première série de simplifications :

$$T_j(t) + R_{ba}C_b \frac{dT_j}{dt} + R_{jb}R_{ba}C_jC_b \frac{d^2T_j}{dt^2} = R_{ba}P_0$$

Avec $R_{ba} \gg R_{jb}$ et $C_b \gg C_j$, on peut en première approximation négliger le terme d'ordre 2 par rapport au terme d'ordre 1 et l'équation se simplifie selon :

$$\boxed{T_j + \tau \frac{dT_j}{dt} = R_{ba}P_0} \quad \text{avec} \quad \tau = R_{ba}C_b$$

La solution est de la forme :

$$T_j(t) = Ae^{-t/\tau} + R_{ba}P_0 \quad \text{avec} \quad T_j(0) = 0$$

Il faut bien comprendre que T_j représente la fluctuation par rapport à l'équilibre ; en effet comme le montre l'équation différentielle, avec une puissance

P_0 nulle, $T_j = 0$ en régime permanent.

$$\text{On en déduit} \quad \boxed{T_j(t) = R_{ba}P_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right)}$$

On cherche t_r tel que :

$$\frac{95}{100} = 1 - e^{-t_r/\tau} \Rightarrow e^{t_r/\tau} = 20 \Rightarrow t_r = \tau \ln 20$$

Avec $\ln 20 \simeq \ln e^3 = 3$ et $\tau = R_{ba}C_a = 40$ s, on en déduit $\boxed{t_r \simeq 120 \text{ s}}$.

9. En régime permanent : $T_{j,f} = R_{ba}P_0 = 30$ K, valeur à laquelle il faut ajouter la valeur initiale T_a pour obtenir :

$$\boxed{T_{j,final} = 60^\circ\text{C}}$$

La température étant inférieure à la température limite, **le système n'est pas endommagé**.

10. Comme $p(t) = u(t)i(t)$, avec $i(t)$ sinusoïdal de fréquence f et $u(t)$ signal crêteau possédant un fondamental à la fréquence f , le terme fondamental de la puissance est un terme qui oscille à la fréquence $2f$.

Une fréquence $2f$ est associée à une période $T = 1/(2f) = 0,5$ ms.

Les fluctuations de puissance se font à l'échelle de la milliseconde quand le temps caractéristique de réponse thermique de l'interrupteur est de l'ordre de 40 s.

Le système ne peut donc pas suivre des fluctuations si rapides, il y est donc insensible.

11. Ailette de refroidissement

(a) D'après la formule proposée : h en $\boxed{\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}}$.

(b) En régime stationnaire, les apports doivent compenser les pertes :

- puissance reçue en x : $j_Q(x)ab$;
- puissance évacuée en $x+dx$: $j_Q(x+dx)ab$;
- puissance évacuée latéralement : $h[T(x) - T_a] \times (2adx + 2bdx)$.

On en déduit :

$$\boxed{j_Q(x)ab = j_Q(x+dx)ab + h[T(x) - T_a](a+b) \times 2dx}$$

(c) À l'aide de la loi de Fourier, on obtient :

$$-\frac{\partial j_Q}{\partial x} dx \times ab = \lambda' \frac{d^2 T}{dx^2} ab dx = h[T(x) - T_a](a+b) \times 2dx$$

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h(a+b)}{\lambda' ab} [T(x) - T_a] = 0}$$

$$(d) \quad \boxed{\delta^2 = \frac{\lambda' ab}{2h(a+b)}}$$

- (e) Pour la grandeur $\theta(x) = T(x) - T_a$, l'équation différentielle prend la forme :

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}\theta(x) = 0$$

La solution est de la forme : $\theta(x) = Ae^{-x/\delta} + Be^{x/\delta}$

Le milieu semi-infini impose nécessairement $B = 0$, avec $A = \theta(0) = T(0) - T_a = T_b - T_a$, on en déduit :

$$T(x) = T_a + (T_b - T_a)e^{-x/\delta}$$

- (f) La surface latérale a une aire $dS = 2dx(a+b)$, et donc pour la puissance dissipée :

$$dP = h(T_b - T_a)e^{-x/\delta} \times 2(a+b)dx$$

- (g) En intégrant sur l'ensemble de l'ailette, on détermine la puissance totale dissipée :

$$P = 2h(T_b - T_a)(a+b) \int_0^{+\infty} e^{-x/\delta} dx \Rightarrow P = 2h(T_b - T_a)(a+b)\delta$$

- (h) La puissance transmise du boîtier à l'interrupteur se détermine à l'aide du vecteur courant en $x = 0^+$:

$$P_0 = j_Q(0^+)ab = -\lambda' \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0^+} \times ab = -\lambda' \times ab \times (T_b - T_a) \times \left(-\frac{1}{\delta} \right)$$

$$P_0 = \frac{\lambda' ab(T_b - T_a)}{\delta}$$

En régime permanent, la puissance émise par le boîtier est nécessairement évacuée par l'ailette, il faut donc :

$$P = P_0 \Leftrightarrow 2h(T_b - T_a)(a+b)\delta = \frac{\lambda' ab(T_b - T_a)}{\delta} \Leftrightarrow \delta^2 = \frac{\lambda' ab}{2h(a+b)}$$

On retrouve bien la définition de δ , on a donc bien $P = P_0$.

- (i) Avec la définition proposée pour la résistance thermique de l'ailette :

$$R_\infty = \frac{T_b - T_a}{P} = \frac{1}{2h(a+b)\delta} = \frac{\delta^2}{\lambda' ab} \times \frac{1}{\delta} \Rightarrow R_\infty = \frac{\delta}{\lambda' ab}$$

La résistance thermique d'un barreau de longueur L et de section ab est donnée par :

$$R = \frac{L}{\lambda' ab} \Rightarrow \frac{R_\infty}{R} = \frac{\delta}{L} \ll 1$$

La résistance thermique est beaucoup plus faible et l'évacuation bien meilleure avec l'ailette ; ceci est sans surprise car la surface latérale d'évacuation est considérablement augmentée.

12. Continuité de la température $T(x = 0^+) = T_b$.

13. La continuité du flux en $x = L$ s'écrit :

$$j_Q(L^-) \times ab = h(T(L^-) - T_a) \times ab \Leftrightarrow -\lambda' \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{L^-} = h[T(L^-) - T_a]$$

14. Pour une longueur L finie, la solution est de la forme :

$$T(x) - T_a = Ae^{-x/\delta} + Be^{x/\delta}$$

Les conditions aux limites imposent :

$$\rightarrow T_b - T_a = A + B$$

$$\rightarrow -\lambda' \times \left[-\frac{A}{\delta} e^{-L/\delta} + \frac{B}{\delta} e^{L/\delta} \right] = h[Ae^{-L/\delta} + Be^{L/\delta}]$$

La seconde égalité peut se réécrire :

$$Ae^{-L/\delta} \left[\frac{\lambda'}{\delta} - h \right] = Be^{L/\delta} \left[h + \frac{\lambda'}{\delta} \right] \Leftrightarrow A = \frac{Be^{2L/\delta} [h + \lambda'/\delta]}{\lambda'/\delta - h}$$

En reportant dans la première relation, on obtient :

$$T_b - T_a = B \left(1 + \frac{e^{2L/\delta} [h + \lambda'/\delta]}{\lambda'/\delta - h} \right)$$

C'est à dire :

$$B = \frac{T_b - T_a}{1 + \frac{e^{2L/\delta} [h + \lambda'/\delta]}{\lambda'/\delta - h}} \quad \text{et} \quad A = \frac{Be^{2L/\delta} [h + \lambda'/\delta]}{\lambda'/\delta - h}$$

15. La condition $\frac{T(L) - T_a}{T_b - T_a} = \frac{5}{100}$ impose :

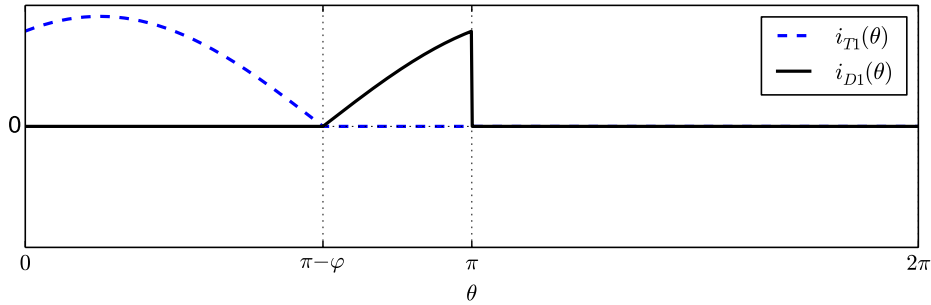
$$\frac{Ae^{-L/\delta} + Be^{L/\delta}}{T_b - T_a} = \frac{5}{100}$$

Il s'agit de résoudre cette équation en L sachant que A et B sont données par les relations ci-dessus.

6 Pertes dans les interrupteurs

1. On est ramené à la situation de la question III.9 avec $f < f_0$:

La puissance instantanée reçue par le transistor est $p_{T_1}(t) = u_{T_1}(t)i_{T_1}(t)$ ce qui donne pour la puissance moyenne :



$$P_{T_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{T_1}(\theta) i_{T_1}(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi-\varphi} V_0 I_m \sin(\theta + \varphi) d\theta$$

$$P_{T_1} = \frac{V_0 I_m}{2\pi} [-\cos(\theta + \varphi)]_0^{\pi-\varphi} \Rightarrow \boxed{P_{T_1} = \frac{V_0 I_m}{2\pi} [1 + \cos \varphi]}$$

De même pour la diode :

$$P_{D_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\varphi}^{\pi} V_0 \times [-I_m \sin(\theta + \varphi)] d\theta = \frac{V_0 I_m}{2\pi} [\cos(\theta + \varphi)]_{\pi-\varphi}^{\pi}$$

$$\boxed{P_{D_1} = \frac{V_0 I_m}{2\pi} [1 - \cos \varphi]}$$

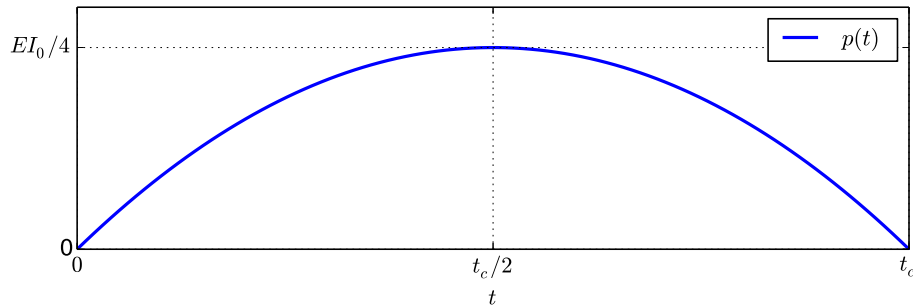
Et finalement pour la puissance totale :

$$P_{tot} = P_{D_1} + P_{T_1} \Rightarrow \boxed{P_{tot} = \frac{V_0 I_m}{\pi}}$$

$$2. \forall t \in [0, t_c], p(t) = u_T(t) i_T(t) = E \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) \times I_0 \frac{t}{t_c} :$$

$$\forall t \in [0, t_c], p(t) = E I_0 \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) \times \frac{t}{t_c} \quad \text{et} \quad \forall t \geq t_c \quad p(t) = 0$$

Cette fonction s'annule en $t = 0$ et $t = t_c$ et passe par un maximum en $t = t_c/2$:



Ce qui donne pour la puissance moyenne dissipée en une période T (en posant $u = t/t_c$) :

$$P_{com} = \frac{1}{T} \int_0^{t_c} E I_0 \left(\frac{t}{t_c} - \frac{t^2}{t_c^2} \right) dt = \frac{E I_0 t_c}{T} \int_0^1 (u - u^2) du$$

$$P_{com} = \frac{E I_0 t_c}{T} \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{E I_0 t_c}{6T} \Rightarrow \boxed{P_{com} = \frac{E I_0 t_c}{6} f}$$

Ce qui donne pour la puissance totale dissipée :

$$\boxed{P_0 = \frac{E I_0 t_c}{6} f + \frac{V_0 I_m}{\pi}}$$

3. Commençons par exprimer la puissance sous forme numérique avec les données fournies, en notant f' la valeur de la fréquence en dizaine de kHz ($f = 10^4 f'$) :

$$P_0 = \frac{200 \times 1,2 \times 2 \times 10^{-6} \times 10^4 \times f'}{6} + \frac{1 \times 5\pi}{\pi} \Rightarrow P_0 = 0,8f' + 5$$

La puissance est une relation affine de la fréquence.

La puissance dissipée par commutation dépasse la puissance dissipée par conduction pour :

$$0,8f' \geq 5 \Rightarrow f' \geq \frac{5}{0,8} \simeq 6$$

ce qui correspond à une fréquence $\boxed{f = 60 \text{ kHz}}$.