

I Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique

I.A Aurores polaires terrestres

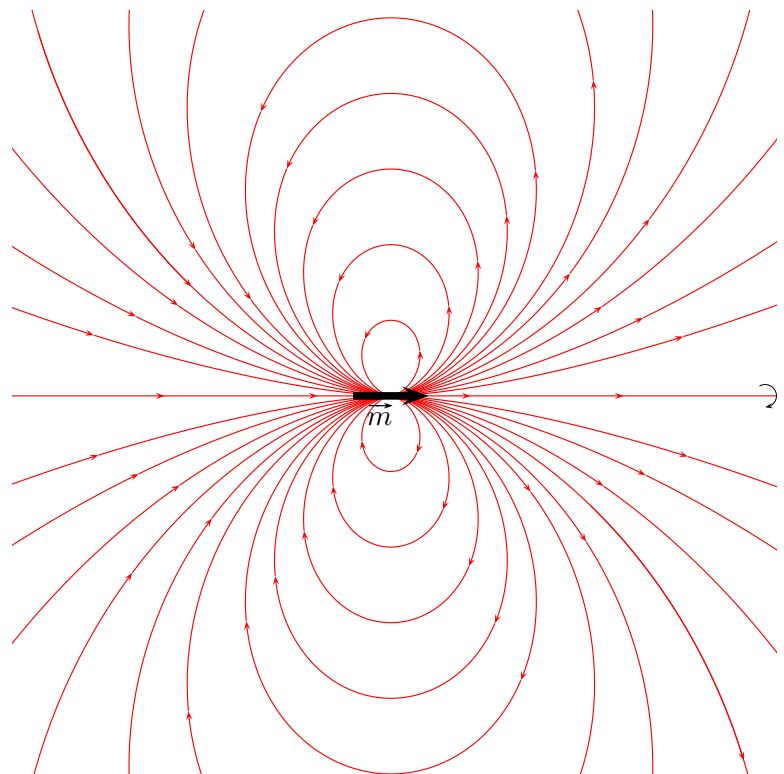
- I.A.1. cf. énoncé : « *Les particules chargées accélérées dans la queue de la magnétosphère arrivent le long du champ sur les couches denses de l'atmosphère.* »

Leurs collisions avec les molécules présentes excitent ces molécules (transfert d'énergie cinétique en énergie interne) qui se dés excitent ensuite en émettant un rayonnement dans le visible – notamment.

- I.A.2. Symétrie de la figure 1 de l'énoncé par rapport au plan équatorial : lorsqu'une reconfiguration magnétique intervient, les particules guidées par les lignes de champ magnétique arrivent aussi bien dans l'hémisphère nord que dans l'hémisphère sud.

- I.A.3. On reconnaît le champ d'un dipôle magnétique (présenté ci dessous) assez près de la Terre. A plus grande distance, le champ magnétique du vent solaire « tire » les lignes de champ (ldc) vers l'arrière (la droite sur la figure 1 de l'énoncé) : du côté de l'arrivée du vent solaire les ldc sont « aplaties » et à l'arrière on note que des ldc ne sont plus fermées.

FIGURE 1 – Topographie du champ d'un dipôle magnétique ;



I.B Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

- I.B.1. On néglige le poids car $\|m\vec{g}\| \ll \|q\vec{v} \wedge \vec{B}\|$: le poids est inférieur à 10^{-26} N pour un proton et à 10^{-29} N pour une électron ; $\frac{1}{2}mv^2 = E_c \sim 10^{-16}$ J $\Rightarrow v_e \sim 10^7$ m.s $^{-1}$ et $v_p \sim 10^5$ m.s $^{-1}$ et avec $B \sim B_T \sim 10^{-5}$ T on a $F_{\text{magn}} \sim evB \sim 10^{-19}$ à 10^{-17} N.

- I.B.2. La trajectoire est rectiligne uniforme à $\vec{v} = v_0 \vec{u}_z$ car alors $q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ puisque $\vec{v} \parallel \vec{B}$. La particule chargée suit une ligne de champ rectiligne.

- I.B.3. (a) Par analyse dimensionnelle $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$.

Pour l'ordre de grandeur : le champ magnétique terrestre assimilé à celui d'un dipôle magnétique décroît comme $\frac{1}{r^3}$ donc $B_{\text{geo}} \sim \left(\frac{R_T}{r_{\text{geo}}}\right)^3 B_T \sim \left(\frac{6400}{42200}\right)^3 5.10^{-5} \sim 1,7.10^{-7} \text{ T}$ d'où $\omega_c \sim 3.10^4 \text{ rad.s}^{-1}$.

Rem : avec cet ordg de B , l'approximation consistant à négliger le poids reste légitime.

- (b) Le fait de montrer que la trajectoire est circulaire est explicitement hors programme et doit être admis ce que nous ferons.

En coordonnées polaires, on projette alors la 2^e loi de Newton sur la direction radiale : $\frac{mv_0^2}{R_c} = ev_0 B$ d'où $R_c = \frac{mv_0}{eB} = \frac{v_0}{\omega_c}$.

En passant par l'équation cartésienne :

$$m \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = \omega_c v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \text{ d'où } v_z = \text{cte} = 0$$

Le mouvement reste plan dans un plan orthogonal à $\vec{B}_0$.

On pose les grandeurs complexes $\underline{r}(t) = x(t) + i y(t)$ et $\underline{u}(t) = v_x(t) + i v_y(t) = \frac{dr}{dt}$ qui vérifient

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = i\omega_c \underline{u} \Rightarrow \underline{u}(t) = \underbrace{v_{0x}}_{\underline{u}(0)} e^{i\omega_c t} \Rightarrow \underline{r}(t) = i \frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - e^{i\omega_c t}) \text{ par intégration avec la CI } \underline{r}(0) = 0$$

On prend les parties réelle et imaginaire et on a $x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin \omega_c t$ et $y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t)$.

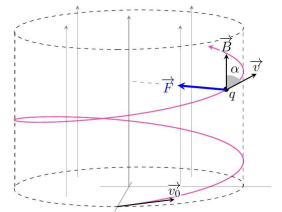
On retrouve bien sur $R_c = \frac{mv_0}{eB} = \frac{v_{0x}}{\omega_c}$ avec $x^2(t) + (y(t) - R_c)^2 = R_c^2$; la trajectoire est un cercle de centre $(0; R_c)$ de rayon R_c parcouru (dans le sens trigonométrique) à la pulsation ω_c .

- I.B.4. (a) Par analyse dimensionnelle avec $\left[\frac{e^2}{\varepsilon_0 L}\right] = \text{énergie (potentielle)} = \text{puissance} \times \text{temps}$ et $[c] = \frac{L}{t}$ on obtient $\alpha = 2$ et $\beta = -3$.

- (b) $E = E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega_c^2 R_c^2 \Rightarrow dE = m\omega_c^2 R_c dR_c = -P_{\text{ray}} dt = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \underbrace{\omega_c^4 R_c^2}_{\|\vec{a}\|^2} dt$ d'où $\frac{dR_c}{dt} = -\frac{R_c}{\tau}$ et $R_c(t) = R_c(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}{e^2 \omega_c^2} = \frac{6\pi\varepsilon_0 c^3 B_0}{e\omega_c^3}$. La particule spirale jusqu'à s'arrêter au bout de quelques τ .

AN : avec $\omega_c \sim 3.10^4 \text{ rad.s}^{-1}$: $\tau \sim 1,8.10^{14} \text{ s} \sim 6$ millions d'années ! Ce phénomène est donc négligeable à l'échelle d'observation.

- I.B.5. Il y a superposition des deux mouvements étudiés précédemment : superposition d'une translation uniforme selon Oz et du mouvement circulaire uniforme dans le plan (Oxy) d'où un mouvement hélicoïdal (cf. ci-contre) s'enroulant autour des lds magnétiques.



I.C Mouvement d'un électron dans un champ stationnaire et non uniforme

- I.C.1. (Maxwell-Thomson) $\text{div } \vec{B} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$.

On est proche de l'axe donc on suppose que $B_z(r, z) \simeq B_{\text{axe}}(z) = B_z(z)$ d'où $\frac{\partial(r B_r)}{\partial r} = -r \frac{dB_z}{dz}$ qui donne par intégration $r B_r(r, z) = -\frac{r^2}{2} \frac{dB_z}{dz} + \mathbf{f}(z)$. Pas de divergence sur l'axe donc en faisant $r = 0$, on obtient $\mathbf{f}(z) = 0$ d'où le résultat : $B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$.

I.C.2. L est l'échelle caractéristique de variation de B_z selon z donc $\frac{dB_z}{dz} \sim \frac{B_z}{L}$ et avec la question précédente $B_r \sim \frac{r}{L} B_z$. On pourra donc considérer la composante radiale B_r comme une petite perturbation de la composante axiale B_z tant que $r \ll L$.

I.C.3. Avec l'approximation ci-dessus on peut utiliser le résultat de la question B.3)b) soit $R(z) = \frac{m v_\theta}{e B_z(z)}$.

I.C.4. On assimile le mvt de l'électron à une boucle de courant de moment magnétique $M_z = I S = I \pi R^2(z)$, où $I = \frac{\delta q}{dt} = \frac{-e}{T}$ car débit de charge d'un électron par tour parcouru en une période $T = \frac{2\pi R(z)}{v_\theta}$.

On a donc $M_z = -\frac{e R(z) v_\theta}{2} = -\frac{e}{2m} L_z$ en identifiant $L_z = m R(z) v_\theta$.

I.C.5. TMC à l'électron dans (R) projeté sur $\vec{u}_z$: $\frac{dL_z}{dt} = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z \simeq 0$ au premier ordre donc L_z et $M_z = -\frac{e}{2m} L_z$ peuvent être considérés comme des constantes du mouvement au premier ordre.

I.C.6. (a) c.f. cours MPSI, le TEC donne la conservation de l'énergie cinétique d'où $v_z^2 + v_\theta^2 = \text{cte} = v^2$ où v est la norme – constante – de la vitesse.

La conservation du moment magnétique M_z implique $\frac{v_\theta^2}{B_z} = \text{cte}$ soit $\frac{v_\theta^2}{1 + \frac{z^2}{L^2}} = v_{\theta,0}^2$ où $v_{\theta,0}$ est la vitesse orthoradiale dans le plan $z = 0$.

Ainsi $v_z^2 = v^2 - v_\theta^2 = v^2 - v_{\theta,0}^2 \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right) \geq 0$ d'où un confinement entre $[-z_{\max}; z_{\max}]$ où $z_{\max} = L \sqrt{\frac{v^2}{v_{\theta,0}^2} - 1}$ (points de rebroussement).

(b) La conservation de l'énergie cinétique s'écrit $E_c = \frac{1}{2} m \left(v_z^2 + v_{\theta,0}^2 \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right) \right) = \text{cte}$, ou encore avec l'expression de M_z dans le plan $z = 0$ et en éliminant la constante inutile : $\frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{M_z B_0}{L^2} z^2 = \text{cte}$, où on reconnaît l'expression de la conservation de l'énergie pour un OH 1D de pulsation propre $\omega_m = \sqrt{\frac{2 M_z B_0}{m L^2}}$.

Temps d'aller-retour : $T_{ar} = \frac{2\pi}{\omega_m}$ et on peut réécrire $\omega_m \sim \frac{\sqrt{\frac{E}{m}}}{L}$ donc avec un électron ($m \sim 10^{-30}$ kg) d'énergie de qqs keV, avec $L \sim$ qqs 10^6 m, on obtient $T_{ar} \sim 1$ s.

I.C.7. (a) Il s'agit d'un rayonnement d'accélération proportionnel à ω^4 donc d'autant plus important que B augmente, le rayonnement est donc particulièrement intense près de la Terre, aux pôles puisque c'est là que les particules chargées sont guidées par les lds magnétiques.

(b) $\omega = \frac{eB}{m} \sim \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{10^{-30}} \sim 9 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ d'où $f \sim 1,4 \text{ MHz}$ et $\lambda = 200 \text{ m}$ (cohérent avec le document où $\lambda = \frac{c}{f} \sim \text{km}$). On sait que les ondes EM de cette fréquence ne traversent pas l'ionosphère, il faut donc être au dessus de celle-ci pour pouvoir l'observer.

I.D Ceintures de Van Allen

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \sim 0,1 \text{ à } 1 \text{ GeV} \Rightarrow v \sim 10^{10} \text{ m.s}^{-1}$! Le mvt de l'électron est donc fortement relativiste ! Toute l'étude est à reprendre dans ce cadre !

II Confinement d'objets quantiques

II.A Confinement dans une boîte quantique

II.A.1. (a) Confinement au voisinage d'un minimum de potentiel : oscillateur harmonique

$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \text{cte}$ d'où en dérivant par rapport au temps $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$; conversion d'énergie cinétique en énergie potentielle et réciproquement.

Circuit électrique LC : $E = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}L i^2 = \text{cte}$ où $i = \frac{dq}{dt}$; $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; mêmes calculs (analogie méca-élec) ; conversion d'énergie électrique stockée dans le condensateur en énergie magnétique stockée dans la bobine et réciproquement.

- (b) $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + V(x) \psi(x, t)$ où $\rho = |\psi|^2$ est la densité de probabilité de présence, c'est à dire que la probabilité dP de se trouver entre x et $x + dx$ à t est $dP = |\psi(x, t)|^2 dx$.

- (c) $g(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ où E est l'énergie de cet état. Cet état est stationnaire car la densité de probabilité de présence $\rho = |\psi|^2$ est bien indépendante du temps.

- (d) C'est un état lié et la fonction d'onde doit être normalisée : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2(x) dx = 1$.

- (e) $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi|^2(x) dx = 0$ (impairité de la fonction ou changement de variable $x \rightarrow -x$). Avec le formulaire on a directement l'extension caractéristique $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega}} = 3,0 \text{ nm}$.

- (f) $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta p_x \geq \sqrt{\frac{m^* \hbar \omega}{2}}$. Et $\langle p_x \rangle = 0$ donc $\langle p_x^2 \rangle = (\Delta p_x)^2 \geq \frac{m^* \hbar \omega}{2}$ d'où $E = \left\langle \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m^* \omega^2 x^2 \right\rangle \geq \frac{\hbar \omega}{2}$. Pour l'OHQ le minimum est atteint et $E_0 = \frac{\hbar \omega}{2}$.

Contrairement au cas classique cette énergie minimale n'est pas nulle mais strictement positive. Cette énergie minimale est directement liée au confinement au travers de ω et de la relation d'incertitude de Heisenberg (c.f. calcul ci-dessus).

- (g) On a toujours $g(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ et en injectant la solution à variables séparées $\psi(x, y, t) = \varphi(x) \chi(y) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ dans l'équation de Schrödinger bidimensionnelle

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\Delta \psi}_{\text{laplacien}} + V(x, y) \psi$$

$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \chi + \varphi \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) + (V(x) + V(y)) \varphi \chi = E \varphi \chi$; on divise par $\varphi(x) \chi(y)$ et on sépare les variables pour obtenir $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(x)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + V(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi(y)} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) - V(y) = \text{cte}$ puisque le terme de gauche ne dépend que de x et celui de droite que de y .

Ainsi $\varphi(x)$ est solution de l'équation de Schrödinger stationnaire 1D pour le potentiel harmonique V d'où une énergie $E_x = \left(n_x + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$ et de même pour $\chi(y)$ avec une énergie $E_y = \left(n_y + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$. En réinjectant dans l'égalité précédente on en déduit que $E = E_x + E_y = (n_x + n_y + 1) \hbar \omega$ avec n_x et n_y entiers positifs.

- (h) On obtient $E_n^{2D} = (n + 1) \hbar \omega$ où n entier positif de dégénérescence $g_n^{2D} = n + 1$ (nombre de paires d'entiers positifs n_x et n_y tels que $n_x + n_y = n$). Le fondamental d'énergie $E_0^{2D} = \hbar \omega$ est non dégénéré.

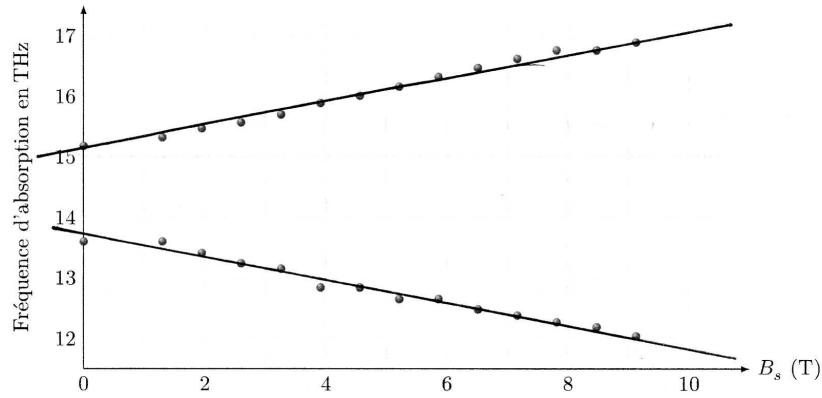
II.A.2. (a) On peut citer les diodes laser qui émettent principalement dans l'infrarouge.

- (b) On éclaire l'échantillon par une source de fréquence réglable (IR/visible/UV) et on mesure l'absorbance en fonction de la fréquence ; des pics de résonance se présentent à certaines pulsations de résonance $\omega_{n,p}$ liée aux niveaux d'énergie par $\hbar \omega_{n,p} = E_n - E_p$.

- (c) $\omega_c = \frac{eB_s}{m^*} < \frac{\omega}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow B_s < B_{\max} = \frac{m^* \omega}{e\sqrt{2}} = 25,6 \text{ T}$ ok !

- (d) $k_B T \sim 10^{-22} \text{ J} \ll \hbar \omega \sim 10^{-20} \text{ J}$ donc l'agitation thermique est négligeable et la – quasi – totalité des électrons se trouve dans l'état fondamental d'énergie E'_0 qui est donc le seul à contribuer à l'absorbance.

(e) On effectue une modélisation linéaire très satisfaisante des courbes $f_{\text{abs}}(B_s)$.



Interprétation : on a $B_s < 9 \text{ T} \sim \frac{B_{\text{max}}}{3}$ donc $\frac{\omega_c^2}{4} < \frac{\omega^2}{3^2 * 4 * 2} \ll \omega^2$; on peut donc considérer que $\Omega \simeq \omega$.

Les fréquences d'absorption s'expriment alors $f_1 = \frac{E_- - E'_0}{h} \simeq \frac{\omega}{2\pi} - \frac{e}{4\pi m^*} B_s$ et $f_2 = \frac{E_+ - E'_0}{h} \simeq \frac{\omega}{2\pi} + \frac{e}{4\pi m^*} B_s$.

Cela correspond bien aux variations affines symétriques observées.

Aspect quantitatif : pente mesurée $\pm 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Hz.T}^{-1}$ pour une pente théorique $\pm \frac{e}{4\pi m^*} = \pm 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Hz.T}^{-1}$; l'accord est excellent !

Il y a par contre un problème car les deux droites devraient se croiser sur l'axe des ordonnées à $\frac{\omega}{2\pi} = 14,5 \text{ THz}$ ce qui n'est pas le cas (la question suivante va apporter l'explication).

II.A.3. On se place à $B = 0$ et l'anisotropie lève la dégénérescence sur le premier niveau excité $E'_1 = 2\hbar\omega$:

en effet on a $E_x = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ (DL au premier ordre en ε), $E_y = \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et $E = E_x + E_y$.

Le fondamental $(n_x, n_y) = (0, 0)$ est d'énergie inchangée $\hbar\omega$ mais les couples $(1, 0)$ et $(0, 1)$ correspondent désormais à des niveaux d'énergie différents :

$E_{(0,1)} = \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \hbar\omega$ premier niveau excité et $E_{(1,0)} = \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \hbar\omega$ deuxième niveau excité. C'est bien ce qui est observé à $B = 0$ sur la figure 5 avec $f_{(0,1)} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\omega}{2\pi} \simeq 13,75 \text{ THz}$ et $f_{(1,0)} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\omega}{2\pi} \simeq 15,15 \text{ THz}$. On note que l'on a bien une moyenne de $14,45 \text{ THz}$ égale à la valeur attendue de $14,5 \text{ THz}$ aux incertitudes de lecture près.

On obtient une anisotropie $\varepsilon = \frac{f_{(1,0)} - f_{(0,1)}}{f_{\text{moy}}} = \frac{15,15 - 13,75}{14,45} \simeq 0,1$. On note qu'on a bien $\varepsilon \ll 1$.

II.A.4. (a) C'est le cours sur le puits infini de largeur D : $E_z = \frac{n_z^2 \hbar^2 \pi^2}{2m^* D^2}$ où $n_z \in \mathbb{N}^*$.

(b) On pourra considérer que le mvt de l'électron selon z est « gelé » si $|E_{z,2} - E_{z,1}| \gg \hbar\omega$ soit $D \ll \sqrt{\frac{3}{2}} \pi \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega}}$ (voir paragraphe B ci-après pour la justification).

(c) L'inégalité ci dessus se réécrit $D \ll \pi \sqrt{3} \Delta x$ alors que sur la figure on a $\Delta z \sim \Delta x$ donc l'échelle verticale a été dilatée.

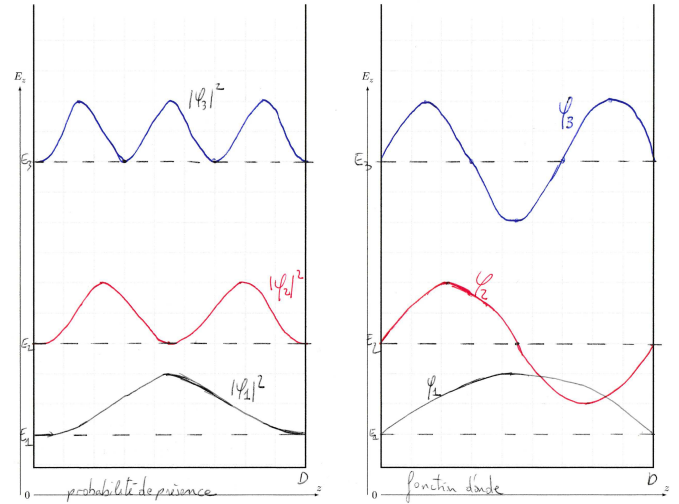
(d) cf. cours, avec la condition de normalisation ($z \in [0 ; D]$), $\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{D}} \sin\left(\frac{n\pi z}{D}\right)$.

(e) Dans les deux cas les états stationnaires correspondent à $D = n \frac{\lambda}{2}$ mais la corde de Melde correspond à une onde mécanique classique alors que le puits quantique est justement quantique avec des aspects à la fois ondulatoires et corpusculaires où $|\varphi|^2$ est une probabilité de présence; pour le puits quantique l'énergie est quantifiée, contrairement à la corde de Melde où elle ne l'est pas.

(f) Voir tracés ci-contre.

La fonction d'onde φ_n et la probabilité de présence $|\varphi_n|^2$ s'annulent sur les bords, et présentent n maxima (ventres) entre 0 et D et $n - 1$ annulations (nœuds) à l'intérieur.

(g) Pour les énergies élevées, la distance entre les nœuds et les ventres devient très faible : on tend vers une probabilité de présence uniforme qui est le comportement classique attendu.



II.B OHQ en équilibre thermique

II.B.1. $P_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$ où $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{E_n}{k_B T}} = e^{-\frac{E_0}{k_B T}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right)^n = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\hbar\omega}{2k_B T}}$ est la fonction de partition.

II.B.2. $r = \frac{P_{n+1}}{P_n} = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} < 1$.

Si $\hbar\omega \ll k_B T$ alors l'agitation thermique domine et $P_{n+1} \simeq P_n$; les états sont sensiblement équiprobables.

Si $\hbar\omega \gg k_B T$ alors $P_{n+1} \ll P_n$. On peut dire que l'OHQ est « gelé » dans son état fondamental où se trouvent l'immense majorité des particules.

II.B.3. $\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n E_n$. On pose $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et on constate que $\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{+\infty} E_n e^{-\beta E_n} = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta}$.

Du calcul de Z au 1) on déduit

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} = \frac{\hbar\omega}{2 \tanh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)}$$

II.B.4. On déduit que pour l'OHQ en équilibre thermique :

- Si $\hbar\omega \ll k_B T$ alors $\tanh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \simeq \frac{\hbar\omega}{2k_B T}$ et $\langle E \rangle = k_B T$; on retrouve le résultat classique correspondant au théorème d'équipartition de l'énergie : 2 degrés de liberté (DL) quadratiques et $\frac{k_B T}{2}$ par DL quadratique classique.
- Si $\hbar\omega \gg k_B T$, l'OHQ est « gelé » dans son état fondamental et $\langle E \rangle = E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ (ok car $\tanh u \rightarrow 1$ si $u \rightarrow +\infty$).

La courbe en trait plein correspond donc à l'OHQ et celle en pointillés à l'OH classique.