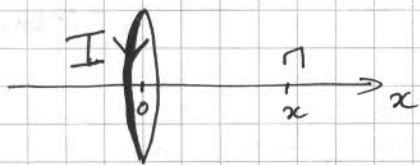


L'effet dynamique, origine du champ géomagnétique

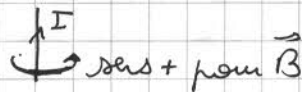
Centrale PC 2016

I Une mesure du champ géomagnétique

A)

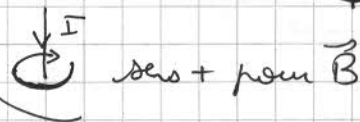


Le champ $\vec{B}$ "s'enroule" autour des courants en suivant la règle de la main droite



Alors $\vec{B}$ est suivant $+\vec{u}_x$

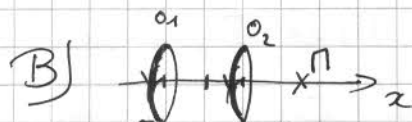
$$\vec{B}_{\text{spire}}(x) = + \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{u}_x$$



Oups, j'ai oublié de prouver que $\vec{B}$ était porté par l'axe.

Tous les plans contenant Π et $\vec{u}_x$ (etc.)

sont des plans d'antisymétrie pour les courants donc $\vec{B}(\Pi)$ appartient à tous ces plans. Ainsi $\vec{B}(\Pi)$ est suivant $\vec{u}_x$



bobine 1

bobine 2

$$\vec{B}_{\text{bobine 1}} = N \vec{B}_{\text{spire 1}}$$

car la bobine 1 contient N spires.

De même pour la 2^e bobine

$$\text{et } \vec{B}_{\text{spire 1}} = + \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \left(\frac{x_1}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{u}_x$$

avec $x_1 = 0$ en $-e/2 = x$

x_1 est l'abscisse du point Π sur l'axe $(O_1 x_1)$

d'origine O_1 d'où $x_1 = x + e/2$

On fait le changement de variable : $\vec{B}_{\text{spire 1}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \left(\frac{x+e/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{u}_x$

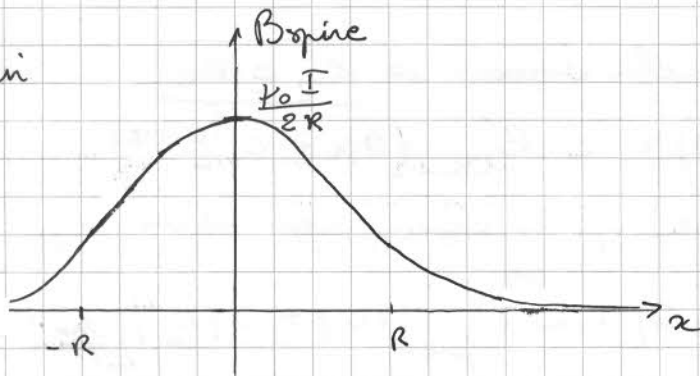
De même, on pose $x_2 = x - e/2$ et $\vec{B}_{\text{spire 2}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \left(\frac{x-e/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{u}_x$

$$\text{Finalement } \vec{B}_{\text{bobines}}(x) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left[\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x+e/2}{R} \right)^2} \right)^{3/2} + \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x-e/2}{R} \right)^2} \right)^{3/2} \right] \vec{u}_x$$

C) Pour $x=0$ $B_{\text{spire}}(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} = B_{\text{max}}(x)$.

et $B_{\text{spire}}(-x) = B_{\text{spire}}(x)$ B_{spire} est donc paire.

Ainsi

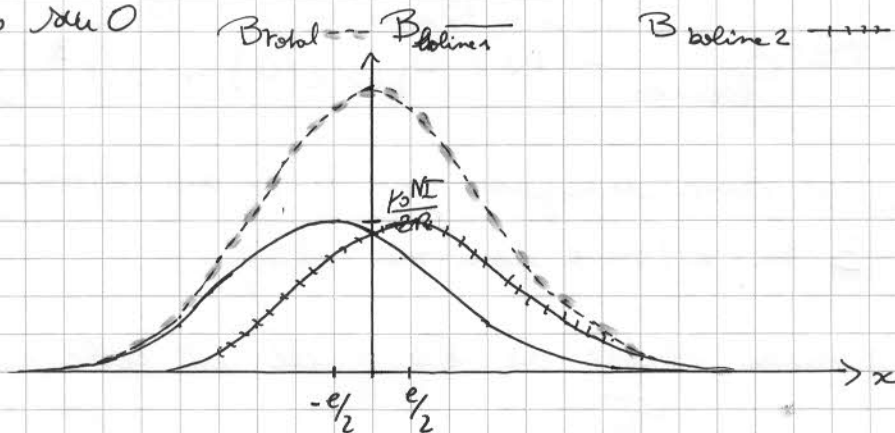


en $x=R$

$$B_{\text{spire}}(R) = \frac{k_0 I}{2R} \frac{1}{2^{3/2}} = 0,35 \frac{k_0 I}{2R}$$

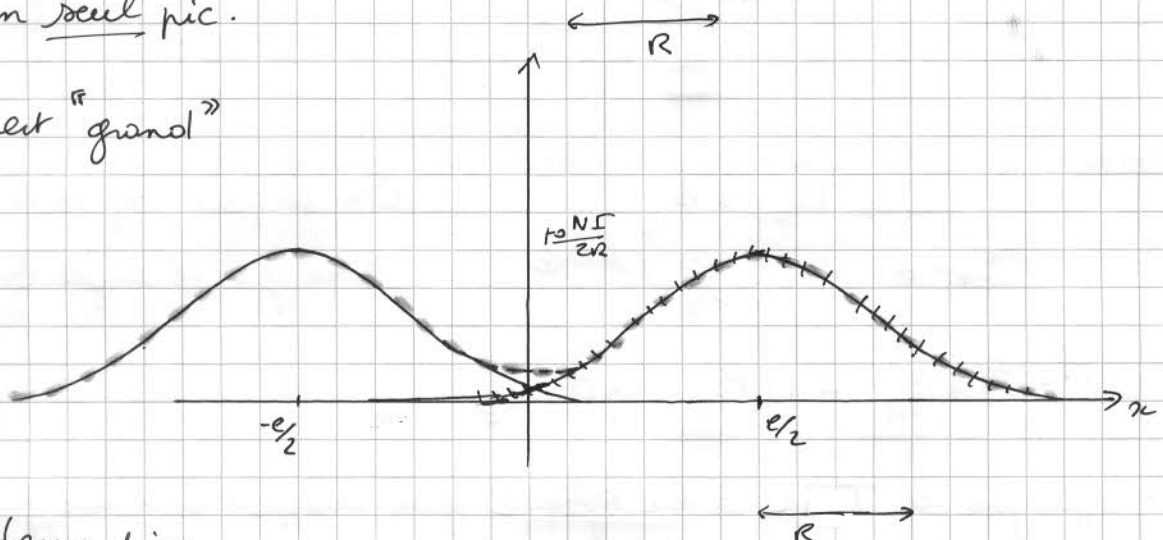
Il ne reste qu'à ajouter les 2 champs, centrés sur $-\frac{e}{2}$ et $+\frac{e}{2}$ au lieu de centrés sur 0

→ si e est "petit"



Il y a un seul pic.

→ si e est "grand"



Il y a deux pics.

D'après ce graphe e_0 est compris entre $R/2$ et $3R$.

Dans le cas $e=e_0$, on a le cas limite entre un pic $\wedge$ et 2 pics $\sim$, c'est-à-dire qu'il y a un pic plat au sommet $\sim$.

2) B_{spire} est croissante vers le bas pour x proche de 0 (inférieur à e_{lim}) et vers le haut pour x plus élevé (supérieur à e_{lim}).

Ainsi
$$B_{\text{spire}}(e_{\text{lim}} + \varepsilon) = B_{\text{spire}}(e_{\text{lim}}) + \varepsilon B'_{\text{spire}}(e_{\text{lim}}) + \frac{\varepsilon^2}{2} B''_{\text{spire}}(e_{\text{lim}}) + \frac{\varepsilon^3}{6} B'''_{\text{spire}}(e_{\text{lim}}) + o(\varepsilon^3)$$

car point d'inflexion $\Rightarrow$

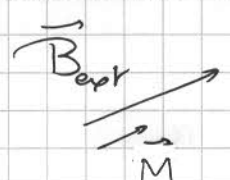
Après changement d'origine, cela donne si $\boxed{e_2 = e e}$

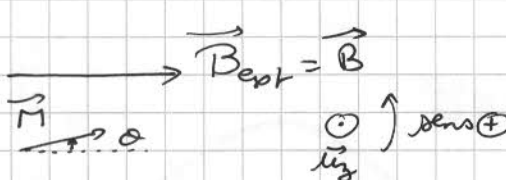
et
$$\vec{B}_{spine1}(\varepsilon) = \left(B_{spine1}(0) + \varepsilon B'_{spine1}(0) + o(\varepsilon^2) + \frac{\varepsilon^3}{6} B'''_{spine1}(0) + o(\varepsilon^3) \right) \vec{u}_x$$

et
$$\vec{B}_{spine2}(\varepsilon) = \left(B_{spine2}(0) + \varepsilon B'_{spine2}(0) + o(\varepsilon^2) + \frac{\varepsilon^3}{6} B'''_{spine2}(0) + o(\varepsilon^3) \right) \vec{u}_x$$

Or par symétrie $\begin{cases} B'_{spine1}(0) = -B'_{spine2}(0) \text{ et } B'''_{spine1}(0) = -B'''_{spine2}(0) \\ B_{spine1}(0) = B_{spine2}(0) \end{cases}$
 donc
$$\vec{B}_{holines} = \left[N^2 B_{spine1}(0) + o(\varepsilon^3) \right] \vec{u}_x$$

$\vec{B}_{holines}$ est donc uniforme sur l'axe au voisinage de 0 à l'ordre 3 en x (ou ε pour mon calcul)

D) La portion stable de l'aiguille est celle où ~~elle~~ son moment est aligné avec $\vec{B}$ est : 

E)  On définit $\vec{u}_z$ et le sens positif, ainsi que l'angle θ . (voir schéma)

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 \vec{B} = -\Gamma B \sin \theta \vec{u}_z$$

On applique le TPC à l'aiguille par rapport à l'axe fixe de l'aiguille (O_3).
 Le seul couple est $\vec{\Gamma}$, il n'y a pas de force qui ait un moment par rapport à cet axe ($\vec{P}$ le poids et $\vec{R}$ la réaction du support passer par l'axe)

d'où
$$\frac{dL_{(O_3)}}{dt} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = -\Gamma B \sin \theta$$

or $L_{(O_3)} = J \dot{\theta}$ pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

d'où
$$\boxed{J \ddot{\theta} = -\Gamma B \sin \theta}$$

Pour des angles petits : $\sin \theta \approx \theta$ et
$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{\Gamma B}{J} \theta}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi B}{J}} \quad \text{et de période} \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\pi B}}$$

$$F) \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{B_H - B_{\text{belines}}}} \quad \leftarrow \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{B_H + B_{\text{belines}}}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_H + B_{\text{belines}}}{B_H - B_{\text{belines}}}}$$

$$\text{Je pose } \alpha = \frac{B_H}{B_{\text{belines}}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}}$$

J'ai supposé que
 $B_{\text{belines}} < B_H$

$$\text{d'où} \quad \alpha - 1 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 (\alpha + 1)$$

$$\alpha \left(1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\right) = 1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{B_H = B_{\text{belines}} \frac{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}}$$

L'avantage est qu'on n'a pas besoin de mesurer π et J , ce qui risque d'être difficile. Il faut juste maîtriser B_{belines} , donc I , e et R .

II. Nécessité d'un mécanisme d'entretien du champ géomagnétique: l'effet dynamo

A) Limites des explications historiques

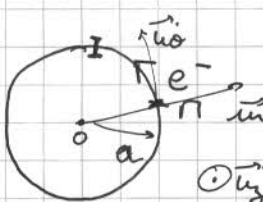
1) D'abord, il est écrit dans l'annexe 1 (Température de Curie) que les aimants permanents perdent leur aimantation (ils deviennent des métaux "normaux" ne créant pas de champ magnétique) au-delà d'une température dite de Curie voisine de 800°C .

Or le noyau est à plus de 4000°C et aucun matériau n'a une température de Curie aussi élevée.

D'autre part, le champ magnétique s'est inversé à plusieurs reprises au cours des âges géologiques, ce que ne peut pas faire un aimant enfoncé au centre de la Terre.

Deuxième raison non évoquée par les documents, un aimant se désaimante spontanément si on ne "canalise" pas ses lignes de champ $\vec{B}$, ce qui est la raison pour laquelle on stocke les aimants par 2:  ou 

2) a) C'est l'électron qui a un moment magnétique orbital proportionnel à son moment cinétique orbital, le coefficient de proportionnalité étant le rapport gyromagnétique.


$$\vec{L}_o = \overrightarrow{ON} \wedge m \vec{v} = m a v \vec{u}_z \quad \text{avec } \vec{v} = r \dot{\theta}$$
$$\vec{M} = S I \vec{n} = \frac{e h}{4 \pi m} I \vec{u}_z$$

Pendant dt , $dq = I dt$ traverse le segment $\vec{I}$ avec $dq = -e dN$

dN étant le nombre de fois où l'électron passe par le segment

c'est-à-dire $\frac{dt}{T}$ fois. De plus $T = \frac{2 \pi a}{v}$ ← périmètre
← vitesse (constante)

D'où $S_q = I dt = -e \frac{dr v}{2\pi a}$ soit $I = -\frac{ev}{2\pi a}$

Alors $\vec{M} = -\pi a^2 \frac{ev}{2\pi a} \vec{u}_z = -\frac{ev a}{2} \vec{u}_z$

D'où $\boxed{\vec{M} = \gamma \vec{L}_0}$ avec $\boxed{\gamma = -\frac{e}{2m_e}}$ marque de l'e⁻
le rapport gyromagnétique

b) On donne J d'une sphère, je vais m'en servir.

$\vec{L}_0 = J \vec{\omega}$

Pour 1 e⁻, j'admets qu'on peut garder $\vec{M}_1 = \gamma \vec{L}_0$ avec le même γ
et donc pour Z e⁻, $\vec{M}_2 = Z \gamma \vec{L}_0$

d'où $\vec{M} = J Z \gamma \vec{\omega} = \underbrace{\frac{2}{5} (Z m_e) a^2}_{\text{moment de la sphère}} Z \frac{e}{2m_e} \omega \vec{u}_z$

Soit $\boxed{\vec{M} = -\frac{4}{5} Z^2 e a^2 \omega \vec{u}_z}$

(s'exprime en C m² s⁻¹ = A.m²
comme tout moment magnétique).

c) Les inversions de polarité du champ magnétique, alors que la Terre tourne toujours dans le même sens, réfutent cette hypothèse.
(De même que le fait que la Terre n'est pas chargée!)

B) L'effet dynamo

1) a) On écrit la force de Lorentz dans R

$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

et dans R' $\vec{F} = q \vec{E}' + \vec{0}$ car $\vec{v}' = \vec{0}$

Or la force ne dépend pas du référentiel donc $\boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}}$

b) D'après la question suivante $\vec{j} = \vec{j}'$

c) d'où $\vec{j}' = \sigma \vec{E}' = \boxed{\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$

e) On ne considère que des champs permanents (stationnaires)

Or l'équation de Maxwell 4 s'écrit alors.

$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{0})$ soit avec $\vec{E}_0 = \vec{0}$ et $\vec{E}_{m0} = \vec{v} \wedge \vec{B}_0$:

$$\text{rot } \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j} \wedge \vec{B}_0$$

↑ ce champ n'est pas $\vec{B}_0$ car il est uniforme, c'est donc le champ magnétique induit $\vec{B}_1$

b) en admettant de grandeur $\text{rot } \vec{B}_1 \rightarrow \frac{\vec{B}_1}{L}$

$$\mu_0 \vec{j} \wedge \vec{B}_0 \rightarrow \mu_0 \vec{j} \wedge \vec{B}_0$$

d'où $B_1 = r_m B_0$ avec $\boxed{r_m = L \mu_0 \vec{j} \wedge \vec{B}_0} = \frac{L V}{\lambda}$

Plus r_m est grand, plus le champ magnétique induit est grand (à B_0 fixe)

r_m augmente quand $\vec{j}$ augmente; ce qui est logique car plus $\vec{j}$ est grand, plus $\vec{B}_1$ est grand donc plus $\vec{B}_1$ et r_m sont grands

3) a) $\boxed{\vec{B}_2 = r_m \vec{B}_1}$, de la même façon que $\vec{B}_1 = r_m \vec{B}_0$
 ↑ champ induit par ↑ champ induit par

d'où $\boxed{\vec{B}_2 = (r_m)^2 \vec{B}_0}$

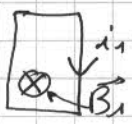
b) $\vec{B} = \sum_n \vec{B}_n = \sum_n (r_m)^n \vec{B}_0$

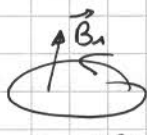
c) si $B_{n+1} > B_n$, alors le champ magnétique total diverge
 c'est-à-dire si $\boxed{r_m > 1}$ ou $\boxed{r_m > \frac{1}{\delta}}$

C'est comme dans 1 laser: si l'amplitude du champ $\vec{E}_1$ après un aller-retour dans la cavité est plus petite que celle de $\vec{E}_0$, alors il n'y a pas d'émission laser; si $\vec{E}_1 > \vec{E}_0$ alors il y a une émission laser à partir d'une petite perturbation (et on remarque que $\vec{E}_1$ diminue alors peu que $\vec{E}_{\text{tot}}$ se stabilise)

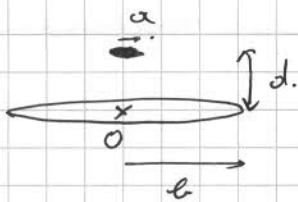
Ici c'est pareil: une petite perturbation $\vec{B}_0$ est amplifiée jusqu'à ce que le champ $\vec{B}$ soit mesurable. Il y a alors en théorie une non-linéarité qui l'empêche de diverger.

c) La dynamo de Bullard.

1) Dans le circuit A, il y a une "spire"  qui crée donc un champ $\vec{B}_1$ qui sera plutôt suivant $\vec{u}_0$ donc pas parallèle à $\vec{B}_0$.

Dans le circuit B, il y a en plus une spire  qui crée un champ $\vec{B}_1$ qui sera plutôt suivant $\vec{u}_z$ donc parallèle à $\vec{B}_0$ de même sens. On est dans le cas B3], grâce à l'effet dynamo si $\lambda_m \gg 1$.

2)



si $d \ll a \ll l$, on peut considérer que le disque est au centre de la spire, donc qu'il subit le champ $\vec{B}_{\text{moy}}$ induit au IC.

$$\vec{B}_1(r, t) = \vec{B}_1(0, t) = \vec{B}_1(t)$$

3) a) ~~On représente le circuit électrique équivalent.~~

$\Phi_{\text{spire} \rightarrow \text{disque}}$, c'est le flux de $\vec{B}_1$ (créé par le disque) dans le disque de surface πa^2 d'où $\Phi_{\text{spire} \rightarrow \text{d}} = \pi a^2 B_1 = M i_1$

$$\text{d'où } i_1 = \frac{\pi a^2 B_1}{M}$$

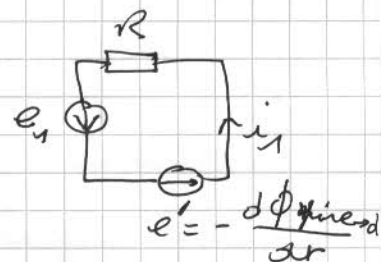
On représente le circuit électrique équivalent

En régime stationnaire $e' = 0$

$$\text{d'où } e_1 = R i_1$$

$$\text{et } \Omega B_0 \frac{a^2}{2} = R \pi a^2 \frac{B_1}{M}$$

$$\text{d'où } B_1 = \frac{\pi \Omega B_0}{2 R M}$$



b) C'est comme au II B3) $B_1 = \lambda_m B_0$; il y a effet dynamo

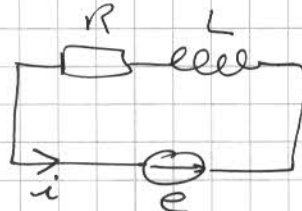
$$\text{si } \lambda_m = \frac{\pi \Omega}{2 R M} \gg 1$$

4) On applique II4) au cas où le champ est B au lieu de B_0

$$e = \Omega B \frac{a^2}{2} \quad \text{or} \quad i = \frac{\pi a^2 B}{n} \quad \text{d'après II(3a)}$$

d'où
$$e = \frac{n \Omega i}{2n}$$

5) Schéma électrique:



$$e = L \frac{di}{dt} + Ri \quad \text{or} \quad e = \frac{n \Omega i}{2n} \quad \text{d'où} \quad \boxed{L \frac{di}{dt} = \left(\frac{n \Omega}{2n} - R \right) i}$$

Pour démasquer l'effet dynamique, il faut $\frac{di}{dt} > 0$ d'où $\frac{n \Omega}{2n} > R$

c'est-à-dire $\frac{n \Omega}{2n R} > 1$ comme au II(2b) (Sauf que c'est $>$ et pas $\geq$).

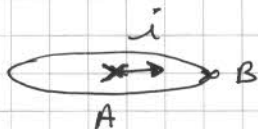
6) ? (Peut-être Φ disque $\rightarrow$ mine ? peut-être les frottements qui modifient R ?)

7) On a déjà
$$\boxed{L \frac{di}{dt} = \left(\frac{n \Omega}{2n} - R \right) i}$$

On applique le TNC au disque par rapport à l'axe (A_3) fixe et dans le référentiel galiléen du circuit filiforme "fixe".

$$\frac{dT_{A_3}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{(A_3)}$$

Bilan des forces



$\rightarrow$? poids

$\rightarrow$? réaction d'axe

$\rightarrow$ Forces de Laplace

$\left. \begin{array}{l} \text{ça dépendra de} \\ \text{travaille avec la} \\ \text{Terc ou avec une} \\ \text{exp. faite au labo.} \end{array} \right\}$

⊕ Couple moteur.

Il faut déterminer $\mathcal{M}_{(A_3)}(\vec{F}_{\text{exp}}) = \int_0^R \vec{A} \wedge (i d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_3$

$\vec{dl} \wedge \vec{B}$ est nul $\odot$ d'où $\vec{A} \wedge (i d\vec{l} \wedge \vec{B})$ est nul. $\downarrow$

$$\text{d'où} \quad \mathcal{M}_{(A_3)}(\vec{F}_{\text{exp}}) = -iB \int_0^R l dl = -iB \frac{a^2}{2}$$

or $B = \frac{n i}{\pi a^2}$ d'où
$$\boxed{\mathcal{M}_{(A_3)}(\vec{F}_{\text{exp}}) = -\frac{n i^2}{2n}}$$

Les autres termes n'ont pas de moment par rapport à l'axe d'axe.

$$\boxed{J \dot{\Omega} = -\frac{n i^2}{2R} + \Gamma_m}$$
 C'est la première équation.

8) En régime stationnaire $\dot{\Omega} = 0$ et $\frac{di}{dt} = 0$

d'où $\boxed{i = \pm \sqrt{\frac{2R\Gamma_m}{n}}}$ et $\boxed{\Omega = \frac{2RiR}{n}}$

9) Pour avoir la puissance, on multiplie $J \dot{\Omega}$ par Ω et Ri par i .

d'où $J \dot{\Omega} \Omega = \Gamma_m \Omega - \frac{n i^2 \Omega}{2R}$ $\nearrow P_{\text{aplace}}$

$$L i \frac{di}{dt} = \frac{n \Omega i^2}{2R} - R i^2$$

$\nwarrow P_{\text{induction}}$ $\nearrow P_{\text{dissipée par effet Joule}}$

On remarque que $P_{\text{induction}} + P_{\text{aplace}} = 0$ comme toujours

d'où $\boxed{\Gamma_m \Omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \Omega^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) + R i^2}$

La Puissance du couple moteur sert à augmenter l'énergie cinétique $\frac{1}{2} J \Omega^2$ et l'énergie emmagasinée dans la bobine $\frac{1}{2} L i^2$ et à être "perdue" par effet Joule

10) En régime stationnaire $\frac{1}{2} J \Omega^2$ et $\frac{1}{2} L i^2$ sont constants et

$$\boxed{\Gamma_m \Omega = R i^2}$$

Il faut une source d'énergie qui est ici le couple moteur et pour la Terre la radioactivité qui entraîne de la convection thermique

11) Il y a 2 solutions $i = \pm i_0$ pour le même Ω , c'est ce qui explique les inversions de polarité du champ terrestre.

1) L'expérience VKS2