

Méthodes physiques de traitement des eaux

I Bassin de décantation.

I.A Entrée du canal.

1. Relation de l'hydrostatique entre les points **B** et **B₀** : $p_B = p_a + \rho \cdot g \cdot (h - z)$

Relation de Bernoulli : $p_a + \frac{1}{2}\rho \cdot \cancel{v_{A_0}^2} + \rho \cdot g \cdot H = p_B + \frac{1}{2}\rho \cdot V^2 + \rho \cdot g \cdot z$ (vitesse en **A₀** négligée d'après l'énoncé).

2. On remplace ensuite p_B par son expression et cela donne : $V^2 = 2g \cdot (H - h)$.

D'où : $V = \sqrt{2g \cdot (H - h)} = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3. Nombre de Reynolds : $Re = \frac{V \cdot h \cdot \rho}{\eta}$ (justifier un peu pour h , échelle de longueur transverse à l'écoulement).

◆ Application numérique : $Re = 4,0 \cdot 10^5$ On a $Re \gg 1$. Le transport de quantité de mouvement est purement convectif, pas diffusif. On pouvait donc bien négliger les frottements et considérer que le fluide est un fluide parfait, hypothèse qui est nécessaire pour que la loi de Bernoulli soit applicable.

Remarque : on a également $Re \gg 10^3$, ce qui montre que l'écoulement est turbulent.

4. $q_v = V \cdot h \cdot W = 2,0 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

I.B Canal de décantation.

I.B.a Sédimentation.

5. $\vec{F} = -6\pi \cdot \eta \cdot a \vec{U}$, car dans l'expression de la loi de Stokes, on prend la vitesse de la particule par rapport au fluide.

6. Le référentiel $\mathcal{R}'$ étant en translation uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ que l'on suppose galiléen, il est lui-même galiléen. Dans $\mathcal{R}'$, la vitesse est uniquement dirigée selon Oz .

Bilan des forces appliquées à la particule :

- Poids $\vec{P} = m \vec{g} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_s \vec{g}$
- Poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_a = -\frac{4}{3}\pi a^3 \rho \vec{g}$
- Force de Stokes $\vec{F}$.

On applique la deuxième loi de Newton à la particule solide : $m \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{\Pi}_a + m \vec{g} - 6\pi \cdot \eta \cdot a \vec{U}$.

On projette selon Oz : $-m \frac{dU}{dt} = -mg + \Pi_a + 6\pi\eta a U$.

En réarrangeant, on obtient : $\frac{dU}{dt} = -\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho_s \cdot a^2} \cdot U + \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s} \cdot g$

On pose : $\tau_s = \frac{2 \rho_s \cdot a^2}{9 \eta}$ et $U_s = \frac{2}{9} \cdot \frac{(\rho_s - \rho) \cdot a^2 \cdot g}{\eta}$ et on obtient l'équation différentielle demandée :

$$\tau_s \dot{U} + U = U_s$$

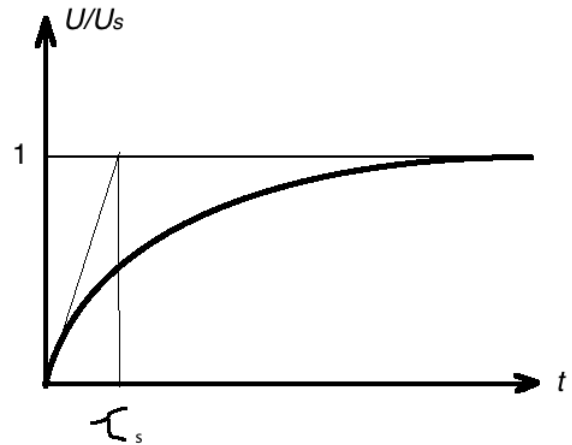
Interprétation physique : τ_s représente la constante de temps du régime transitoire. C'est la durée caractéristique de ce régime. Exemple : au bout d'un temps $t \simeq 5 \cdot \tau_s$, on peut considérer que la vitesse limite est atteinte (régime permanent).

U_s est justement cette vitesse limite en régime permanent : $U_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t)$.

7. Choisissons $U(0) = 0$. On obtient facilement :

$$U(t) = U_s \cdot (1 - e^{-t/\tau_s})$$

D'où le tracé ci-contre.



8. ♦ Application numérique : $U_s = 3,3 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,33 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$

L'ordre de grandeur est satisfaisant mais pas toujours facile à prévoir, car U_s varie en a^2 , c'est-à-dire qu'il dépend beaucoup du rayon a .

Modélisation de la force de frottement fluide par la force de Stokes : il faut que $Re \ll 1$ pour être en écoulement rampant. Or l'écoulement macroscopique est turbulent. Néanmoins, au voisinage de la particule de fluide, on peut calculer un nombre de Reynolds "local" : $Re_s = \frac{U \cdot h \cdot \rho}{\eta}$: $Re_s = 3 \times 10^{-3}$, ce qui valide en partie que l'on ait affaire à un écoulement rampant au voisinage d'une particule solide.

En revanche, la loi de Stokes n'est valide que pour une particule solide isolée, ce qui n'est pas du tout le cas : il y a des phénomènes de circulation induite qui modifie la force de frottement. Ceci n'affecte pas trop la dépendance en a^1 , mais modifie la viscosité apparente de la suspension.

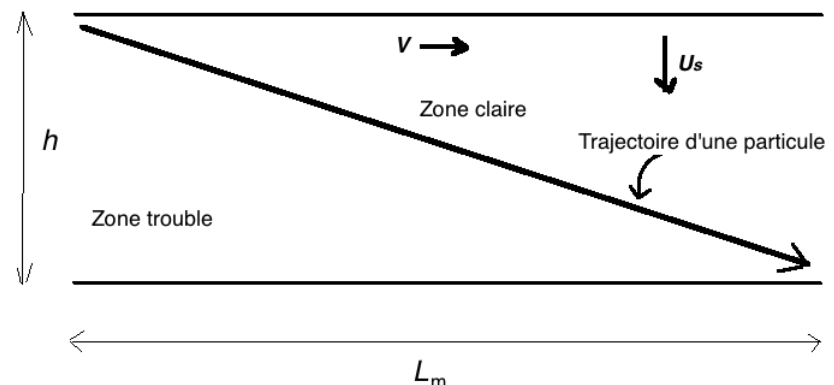
9. On compare τ_s et le temps τ_∞ que met une particule pour sédimenter jusqu'au fond du canal lorsqu'elle a atteint sa vitesse limite U_s : $\tau_\infty = \frac{h}{U_s}$.

♦ Application numérique : $\tau_s = 6 \times 10^{-5} \text{ s}$ et $\tau_\infty \simeq 60 \text{ s}$. On a bien $\tau_s \ll \tau_\infty$: on peut négliger le régime transitoire.

10. Calculons un ordre de grandeur de la distance **horizontale** L_m parcourue par la particule avant qu'elle n'arrive au fond du canal :

$$L_m \simeq \tau_\infty \cdot V.$$

♦ Application numérique : $L_m \simeq 60 \times 2 = 120 \text{ m}$. D'où le tracé ci-contre.



11. L_m est justement la longueur que nous avons définie à la question précédente. $L_m \simeq 120 \text{ m}$.

12. V ne change pas. $\tau'_\infty = \frac{h}{U_s} = \frac{9}{2} \cdot \frac{\eta \cdot h}{(\rho_s - \rho) \cdot a'^2 \cdot g}$ est divisé par 100 lorsque le rayon des particules est multiplié par 10. Donc la longueur minimale est divisée par 100 et devient égale à 1,2 m environ.

13. *Performances* : L_m dépend fortement de la taille des particules solides : les particules très fines sédimentent très lentement, tandis que les plus grosses (grains de sable, etc) se déposent dès l'entrée du canal.

Remarques sur le modèle.

- Il est très simplifié : la zone trouble et la zone claire ne sont pas aussi bien délimitées.
- C'est un processus lent pour éliminer les petites particules dans les eaux usées.
- Cette propriété découle de la loi d'échelle $\propto a^{-2}$ (**important**).

I.B.b Limitation de la sédimentation par la diffusion.

14. $\vec{j}_d = -D_a \overrightarrow{\text{grad}} C = -D_a \cdot \frac{\partial C}{\partial z} \vec{e}_z$ (loi de Fick).

15. Le vecteur densité de flux par convection est : $\vec{j}_s = C(z, t) \vec{U}_s$ (voir le cours).

16. En régime permanent, C doit être indépendante de t . Il faut que les deux vecteurs densité de flux $\vec{j}_d$ et $\vec{j}_s$ se compensent : $\boxed{\vec{j}_d + \vec{j}_s = \vec{0}}$

Projetons sur Oz , en tenant compte de ce que $\vec{U}_s = -U_s \vec{e}_z$. On obtient : $\boxed{\frac{dC}{dz} = -\frac{U_s}{D_a} \cdot C(z)}$

17. On remplace D_a par $\beta \frac{z \cdot (h - z)}{h} V$. L'équation différentielle devient : $\frac{dC}{dz} = -\frac{h \cdot U_s}{V \cdot \beta \cdot z \cdot (h - z)} \cdot C(z)$.

On sépare les variables et on décompose en éléments simples : $\frac{dC}{C} = -\frac{U_s}{V \cdot \beta} \cdot \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{h - z} \right)$.

On pose $\boxed{Ro = \frac{U_s}{V \cdot \beta}}$ et en intégrant entre z_0 (concentration C_0) et z , on obtient bien l'expression (3).

Ro apparaît comme un exposant dans la loi de variation de C avec z . Mais cette loi n'est pas simple.

Les deux effets antagonistes sont celui de l'écoulement horizontal, caractérisé par la vitesse V et celui de la vitesse limite de sédimentation verticale donnée par U_s .

Lorsque U_s est élevée, la sédimentation doit prédominer et la décantation doit être efficace. Au contraire, lorsque V est élevée, le coefficient de diffusion D_a augmente. La diffusion, qui tend à rendre le milieu plus homogène, prédomine.

18. C'est bien ce que l'on observe sur le figure (2) de l'énoncé :

- si Ro est élevé (U_s grande), alors la sédimentation doit être efficace (comme dans les questions précédentes) et la diffusion, qui tend à homogénéiser le milieu, doit être peu efficace. C'est ce que l'on constate pour $Ro = 2$: pour presque toutes les altitudes, sauf celles voisines de z_0 , $C(z)$ est faible ($C(z) \ll C_0$) : il n'y a de particules solides qu'au fond du canal.
- Au contraire, si Ro est petit (U_s faible), la diffusion prédomine : le milieu est pratiquement homogène sur la hauteur h du canal, excepté au voisinage de $z = h$. En effet, au voisinage de la surface libre, le coefficient de diffusion D_a tend vers 0.

Conclusion : Il faut Ro grand. Ce qui implique $\boxed{\beta \times V \ll U_s}$.

Ce processus lent est limitant pour le traitement.

19. Il y a accumulation de particules au fond du canal. Comme le modèle ne tient pas compte du volume qu'elles occupent, cela conduit à une divergence de la concentration. Cette divergence n'est pas réaliste. C'est un défaut du modèle.

II Floculation.

II.A Floculation brownienne de particules simples.

20. $\phi = \iint_S \vec{\varphi}(r, t) \cdot d\vec{S} = -4\pi r^2 D \cdot \frac{\partial n_1}{\partial r}$. Le sens croissant de r correspond au sens de $\vec{e}_r$, donc on laisse le signe "-".

21. (HP). dn_1 représente la variation entre t et $t + dt$ de la densité particulaire : $4\pi r^2 dr dn_1$ représente le nombre de particules qui rentrent - celui qui sortent pendant dt : $4\pi r^2 dr dn_1 = (\phi(r) - \phi(r + dr)) \cdot dt$, d'où $4\pi r^2 \cdot \frac{\partial n_1}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = +4\pi D \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial n_1}{\partial r} \right)$, d'où la relation demandée.

22. $r = 2a$ correspond à la limite où deux particules de rayon a sont en contact. À cette limite, la particule i n'a plus d'autres particules en contact, ou bien il y aurait collision et agrégation.

Pour $r \rightarrow +\infty$, la concentration particulaire tend vers la concentration macroscopique $N_1(t)$.

23. On a : $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial n_1}{\partial r} \right) = 0$.

On intègre une première fois : $r^2 \cdot \frac{\partial n_1}{\partial r} = C$, où C est une constante d'intégration.

Cela donne : $\frac{\partial n_1}{\partial r} = \frac{C}{r^2}$.

On intègre une 2^{me} fois :

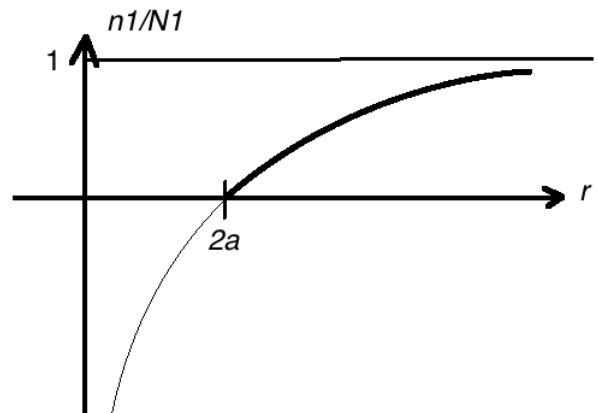
$n_1(r) = -\frac{C}{r} + K$ où K est une 2^{me} constante d'intégration.

On détermine C et K par les conditions aux limites de la question **22** : $K = N_1$ et $C = 2a \cdot N_1$.

D'où finalement :

$$\boxed{n_1(r, t) = N_1 \cdot \left(1 - \frac{2a}{r} \right)}$$

24.



25. $\phi^* = -\phi$ car ϕ^* correspond au flux de particules collectées, se dirigeant vers la particule i , dans le sens opposé à $\vec{e}_r$.

D'autre part, c'est un flux de particules pris en $r = 2a$, lorsqu'il y a collision :

$$\phi^* = -\left(\frac{\partial n_1}{\partial t} \right)_{r=2a} = -D \cdot 4\pi a^2 \left(\frac{\partial n_1}{\partial r} \right)_{r=2a}. \text{ Or } \left(\frac{\partial n_1}{\partial r} \right) = \frac{2a \cdot N_1}{r^2} = \frac{N_1}{2a} \text{ en } r = 2a.$$

D'où finalement : $\phi^* = 8\pi \cdot D \cdot a \cdot N_1$

26. On remplace D par l'expression donnée. Cela conduit à : $\phi^* = \frac{8}{3} \cdot \frac{k_B T}{\eta} \cdot N_1$

Nombre de collisions total par unité de temps et de volume. On vient de calculer le nombre de collisions par unité de temps pour une particule. Pour avoir le nombre total de collision par unité de volume, on multiplie par N_1 . Pour ne pas compter deux fois chaque collision, il faut diviser par 2.

Par conséquent, $A_{1,1} = \frac{\Phi^* \times N_1}{2}$ et $K_{1,1} = \frac{16k_B T}{3\eta}$

Remarque. La réponse ne prenant pas en compte la remarque sur le double comptage des collisions est

acceptée : $K_{1,1} = \frac{8k_B T}{3\eta}$

27. En supposant que chaque collision est efficace, elle fait disparaître 2 particules.

Donc : $\frac{dN_1}{dt} = -2K_{1,1} \cdot N_1^2$

28. On sépare les variables : $\frac{dN_1}{N_1^2} = -2K_{1,1}dt$, puis on intègre entre $t' = 0$ et $t' = t$:

$-\frac{1}{N_1(t)} + \frac{1}{N_0} = -2K_{1,1}t$. On obtient finalement : $N_1(t) = \frac{N_0}{1 + 2N_0K_{1,1}t}$

29. *Schéma à faire* : branche d'hyperbole décroissant vers 0 et valant 1 pour $t = 0$.

30. On a facilement : $2N_0K_{1,1}\tau_f = 1$. D'où : $\tau_f = \frac{1}{2N_0K_{1,1}}$, puis $\tau_f = \frac{3\eta}{16N_0k_B T}$ (réponse 3/8 acceptée)

31. ♦ Application numérique : $\tau_f = 3,0 \times 10^4$ s. Il faut une réponse dans des unités adaptées : $\tau_f \sim 8$ h (4 h acceptée).

32. Par analyse dimensionnelle, $\tau_d = \frac{r^2}{D}$. Prenons l'échelle de longueur $r = a$.

Connaissant l'expression de D , cela donne : $\tau_d = \frac{a^2}{D} = \frac{3\pi\eta a^3}{k_B T}$

33. $\kappa = \frac{\tau_d}{\tau_f} = 32\pi a^3 N_0$ ♦ Application numérique : $\kappa = 0,3$ (réponse 0,15 acceptée).

Commentaire : Puisque $\kappa < 1$, on peut considérer que la floculation se fait dans un régime stationnaire de diffusion des particules vers la particule cible.

II.B Généralisation.

34. Les coefficients $K_{p,q}$ sont, comme $K_{1,1}$, en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

35. Le 1^{er} terme correspond à la formation de l'agrégat de taille j à partir de deux agrégats plus petits, de tailles i et $k = j - i$. Pour ne pas former l'agrégat de taille 1, on a $\varepsilon_1 = 0$. Le facteur $\frac{1}{2}$ permet de ne pas compter 2 fois la collision entre les agrégats i et k dans la sommation. Le 2^{me} terme correspond à la disparition de l'agrégat de taille j lorsqu'il entre en collision avec un agrégat de taille i .

36. Le nombre de collisions faisant disparaître N_1 est, d'après le terme de droite de l'équation (8) :

$$dN_{c,1} = K \cdot N_1 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} N_i \cdot dt$$

De même pour celles faisant disparaître $N_2, \dots, N_j$:

$$dN_{c,2} = K \cdot N_2 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} N_i \cdot dt$$

...

$$dN_{c,j} = K \cdot N_j \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} N_i \cdot dt$$

dN_c est la moitié de la somme de tous les $dN_{c,j}$ (il ne faut pas compter deux fois chaque collision) :

$$dN_c = \frac{1}{2} \cdot K \times (N_1 + N_2 + \dots + N_j + \dots) \times \sum_{i=1}^{+\infty} N_i = \frac{1}{2} \cdot K \times \sum_{j=1}^{+\infty} N_j \times \sum_{i=1}^{+\infty} N_i = \frac{K}{2} N_a^2 \cdot dt$$

avec $N_a = \sum_{i=1}^{+\infty} N_i$.

37. Au total, chaque collision fait disparaître un agrégat :

- elle en consomme 2 : les agrégats (i) et (j) ;
- elle en forme un : l'agrégat $(i + j)$.

Par conséquent : $\boxed{dN_a = -dN_c}$

Remarque. Ce résultat pourrait être obtenu en sommant toutes les équations (8), en faisant varier j de 1 à $+\infty$, mais le calcul est plus délicat. La méthode suggérée par l'énoncé est plus astucieuse.

On obtient donc l'équation différentielle : $\boxed{\frac{dN_a}{dt} = -\frac{K}{2} \cdot N_a^2}$.

38. On intègre comme à la question 28 et on obtient : $\boxed{N_a(t) = \frac{N_0}{1 + N_0 K t / 2}}$

On en déduit : $\boxed{\tau_a = \frac{2}{N_0 K}}$

Or $K = K_{1,1} = \frac{8k_B T}{3\eta}$, d'après la question 26. Donc $\boxed{\tau_a = \frac{3\eta}{4N_0 k_B T}}$

On remarque que $\tau_a = 4\tau_f$.

♦ Application numérique : $\boxed{\tau_a = 6,0 \times 10^4 \text{ s}}$ (environ 17 h).

39. On suppose que le volume d'un agrégat de taille i est i fois celui d'un agrégat initial de taille 1 (hypothèse d'additivité des volumes). Alors, par rapport aux N_0 particules de taille 1 et de rayon a que

l'on avait au départ, qui avaient chacune un volume $V_0 = \frac{4}{3}\pi a^3$, le volume moyen V_a des N_a agrégats que l'on a maintenant est tel que : $N_0 \times V_0 = N_a \times V_a$.

D'où $V_a = V_0 \cdot \frac{N_0}{N_a}$ et on obtient facilement : $R_a(t) = a \cdot \left(\frac{N_0}{N_a(t)} \right)^{1/3}$.

En remplaçant par l'expression de $N_a(t)$ obtenue précédemment (question 37), on a :

$$R_a(t) = a \cdot \left(1 + \frac{N_0 K t}{2} \right)^{1/3}$$

40. Pour $t = t_{2a}$, $\left(1 + \frac{N_0 K t_{2a}}{2} \right)^{1/3} = 2$. Donc $t_{2a} = \frac{2 \cdot (2^3 - 1)}{N_0 K} = 7\tau_a$.

♦ Application numérique : $\tau_{2a} = 4,2 \times 10^5 \text{ s}$ (environ 5 jours).

41. L'inconvénient est que les particules doivent rester plusieurs jours dans le réservoir, mais **l'avantage** est qu'elles sont plus grosses et sédimentent beaucoup plus rapidement dans le canal de décantation, voir parties **I.B.a** et **I.B.b** : la longueur minimale L_m du canal diminue.

D'après la loi d'échelle : $L_m \propto a^{-2}$: si a double, L_m est divisée par 4 !

42. L'équation (8) appliquée à l'agrégat de taille (1) ne contient que les termes de disparition ($\varepsilon_1 = 0$) : $\frac{dN_1}{dt} = -K \cdot N_1 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} N_i = -K \cdot N_1 \cdot N_a$.

Or $N_a(t) = \frac{N_0}{1 + N_0 K t / 2}$ (question 38). On a donc : $\frac{dN_1}{dt} = -\frac{K \cdot N_1 \cdot N_0}{1 + N_0 K t / 2}$.

Séparation des variables : $\frac{dN_1}{N_1} = -\frac{K \cdot N_0}{1 + N_0 K t / 2} dt$.

Intégration entre $t' = 0$ et $t' = t$: $\ln \left(\frac{N_1}{N_0} \right) = -2 \ln \left(1 + \frac{N_0 K t}{2} \right)$.

En supprimant les logarithmes, on obtient bien : $N_1(t) = \frac{N_0}{(1 + t/\tau)^2}$ avec $\tau = \tau_a = \frac{2}{N_0 \cdot K}$

43. Dans le modèle des agrégats, $N_1(t)$ varie, à temps longs, en t^{-2} (évolution que l'on rencontrerait en chimie pour une cinétique d'ordre 3), tandis que dans le modèle plus simple de la partie précédente (question (28)), il varie en t^{-1} (analogie avec une cinétique d'ordre 2, assez couramment rencontrée.)

Remarque : il n'est certainement pas facile de valider expérimentalement l'un des modèles par rapport à l'autre.

44. Seule la quantité d'agrégats de taille (1) est une fonction strictement décroissante du temps (d'après le résultat de la question précédente ou en disant que dans le modèle, ces agrégats ne se forment jamais et ne font que disparaître) : **B** correspond à N_1/N_0 .

A correspond à N_2/N_0 et **B** correspond à N_3/N_0 : $N_3(t)$ croît plus lentement avec t que $N_2(t)$.

Autre réponse, plus précise. La dérivée $\left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{t=0} = K \cdot N_0^2 > 0$: la pente initiale pour $N_2(t)$ doit être non nulle.

En revanche, la pente initiale en $t = 0$ de $N_3(t)$ est nulle : $\left(\frac{dN_3}{dt}\right)_{t=0} = K \cdot N_1 \cdot N_2 - K \cdot N_3 \cdot N_a = 0$, comme on peut le vérifier à partir de l'équation (8) appliquée pour $j = 2, 3$.

II.C Floculation dans un mélangeur.

45. Selon Oz , il faut que la différence d'altitude des deux particules soit inférieure à $2a$: $z' - z \leq 2a$

Selon Ox , il faut que la particule du dessus en (x', z') rattrape la particule située en (x, z) :

$$x' - x \leq (u(z') - u(z)) \cdot dt$$

Finir le calcul avec $\dot{\gamma}$.

46. *Faire un schéma.* Les particules qui pourront heurter la particule-cible située en (x, z) sont celles comprises dans un rectangle (hachuré) de longueur $(u(z') - u(z)) \cdot dt$ et de largeur $2a$:

$dN_H = (2a) \cdot (u(z') - u(z)) \cdot dt \times N'_1$ (rappel : N'_1 représente le nombre de particules par unité de surface = densité surfacique de particules).

$u(z') - u(z)$ peut s'exprimer à partir du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$: $u(z') - u(z) \simeq \left|\frac{du}{dz}\right| \times \delta z = |\dot{\gamma}| \times 2a$ car $\delta z = 2a$. La valeur absolue permet de prendre en compte la situation où la particule du "dessous" est plus rapide que celle du "dessus", c'est-à-dire quand $\dot{\gamma} < 0$: il y aura également collision dans ce cas.

En réarrangeant, on obtient bien l'équation (13) de l'énoncé.

47. κ_v est le produit du volume d'une particule par la densité volumique de particules :

$$\kappa_v = \frac{4}{3}\pi a^3 \times N_0 = \frac{4}{3}\pi R_a^3 \times N_a$$

♦ Application numérique : $\kappa_v = 1,26 \times 10^{-2}$. L'ordre de grandeur est acceptable : les particules occupent environ 1,3% du volume total.

48. On remplace R_a^3 par $\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\kappa_v}{N_a}$ dans l'équation (14). On obtient :

$$\frac{dN_a}{dt} = -\frac{3\kappa_v\Gamma}{4\pi} \cdot N_a = -\Gamma N_0 a^3 \cdot N_a \quad \text{Le temps caractéristique } \tau_m \text{ est : } \tau_m = \frac{1}{\Gamma N_0 a^3} = \frac{4\pi}{3\kappa_v\Gamma}$$

49. On intègre facilement en : $N_a(t) = N_0 \cdot \exp(-t/\tau_m)$

50. En augmentant le taux de cisaillement moyen Γ , c'est-à-dire en agitant davantage, on peut augmenter la vitesse de floculation (diminuer τ_m) et décanter plus rapidement.

51. La puissance P est en Watt : $W = J \times s^{-1}$ soit en $kg \times m^2 \times s^{-1}$ (les énergies ont la même unité que $\frac{1}{2}m \cdot v^2$). Donc $P = M \times L^2 \times T^{-3}$.

Dans le membre de droite de l'équation (15), $[\rho] = M \times L^{-3}$; $[\Omega] = T^{-1}$ et $[B] = L$.

Donc : $M \times L^2 \times T^{-3} = M^\alpha \cdot L^{-3\alpha} \times T^{-\beta} \times L^\gamma$, ce qui conduit à : $\alpha = 1$; $\beta = 3$ et $\gamma - 3\alpha = 2$, d'où $\gamma = 5$

52. On cherche Γ sous la forme : $\Gamma = k' \times P^\delta \times \eta^\epsilon \times V_M^\lambda$. η est en $Pa.s = kg.m^{-1} \cdot s^{-1}$, ou : $[\eta] = M \times$

Cela entraîne : $T^{-1} = (M \cdot L^2 \cdot T^{-3})^\delta \times (M \cdot L \cdot T^{-1})^\epsilon \times L^{3\lambda}$ et finalement : $\delta = \frac{1}{2}$, $\epsilon = \lambda = -\frac{1}{2}$ et

$$\Gamma = k' \times P^{\frac{1}{2}} \times \eta^{-\frac{1}{2}} \times V_M^{-\frac{1}{2}}$$

53. On a : $P \cdot V_M = 3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$. On en déduit $\Gamma = (P \cdot V_M)^{\frac{1}{2}} \times \eta^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{10^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5,5 \times 10^1 \text{ s}^{-1}$ et

$$\tau_m = \frac{1}{\Gamma N_0 a^3} = 6,1 \text{ s}$$

54. Si l'agitation est trop forte, la ré-homogénéisation des particules ayant déjà décanté peut avoir lieu ce qui ne va pas dans le sens de la séparation souhaitée.

III Filtration par osmose inverse.

III.A Potentiel chimique.

55. Question peu claire, en partie hors programme, que l'on peut sauter.

Réponse possible : le potentiel thermodynamique associé à une évolution à pression et température constantes, est G . Ou bien : $G(p, T, n_i)$ est adapté à l'étude d'un système évoluant à p et T constantes.

Autre difficulté pour répondre à cette question : en toute rigueur, p n'est pas constante, puisqu'elle n'est pas la même dans le compartiment (1) et dans le compartiment (2).

56. $dG = V \cdot dp - S \cdot dT + \sum_i \mu_i \cdot dn_i$ (identité thermodynamique ; cf cours)

57. On applique le théorème de Schwarz : $\frac{\partial \mu_i}{\partial p} \Big|_{T, n_j} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right) = \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right) = \frac{\partial V}{\partial n_i} \Big|_T = v_i$

58. On applique la relation précédente (16) au corps pur : $\frac{\partial \mu_i^*}{\partial p} \Big|_{T, n_j} = v_i^* \longrightarrow d\mu_i^* = v_i^* \cdot dp$ à T constante et l'on intègre de $p' = p^\circ$ à $p' = p$, toujours à T constante : $\mu_i^*(T, p) = \mu_i^\circ(T, p^\circ) + v_i^* \cdot (p - p^\circ)$. On remplace ensuite dans la relation (17) et on obtient la relation demandée.

III.B Principe de l'osmoseur.

59. Compartiment (1) d'eau salée à la pression p_1 : $\mu_e^{(1)} = \mu_e^\circ + v_e^* \cdot (p_1 - p^\circ) + RT \ln x_e$

Compartiment (2) d'eau douce à la pression p_2 : $\mu_e^{(2)} = \mu_e^\circ + v_e^* \cdot (p_2 - p^\circ)$

60. $dG = \mu_e^{(2)} \cdot dn_e^{(2)} + \mu_e^{(1)} \cdot dn_e^{(1)}$ ou $dG = dn_e^{(2)} \cdot (\mu_e^{(2)} - \mu_e^{(1)})$ car $dn_e^{(2)} = -dn_e^{(1)}$.

61. Évolution spontanée à T, p : $dG < 0$. On veut $dn_e^{(2)} > 0$. Il faut donc avoir : $\mu_e^{(1)} > \mu_e^{(2)}$, soit :

$$(p_1 - p_2) \times v_e^* > -RT \ln x_e \text{ ou : } \Delta p = p_1 - p_2 > -\frac{RT \ln x_e}{v_e^*}$$

Remarque : $RT \ln x_e < 0$

62. On a donc $\Pi = -\frac{RT \ln x_e}{v_e^*}$. Comme $x_e + x_{Na} + x_{Cl} = 1$, on en déduit :

$$\Pi = -\frac{RT \ln(1 - x_{Na} - x_{Cl})}{v_e^*}$$

En effectuant un développement limité au 1^{er} ordre en $x_{Na} + x_{Cl}$, on a : $\ln(1 - x_{Na} - x_{Cl}) \simeq -(x_{Na} + x_{Cl})$,

ce qui conduit à : $\Pi = \frac{RT(x_{Na} + x_{Cl})}{v_e^*}$.

Les grandeurs x_i sont des fractions molaires : $x_i = \frac{n_i}{n_t}$, avec $n_t = n_e + n_{Na} + n_{Cl} \simeq n_e$ car $n_{Na} \ll n_e$ et $n_{Cl} \ll n_e$. On obtient donc :

$\Pi = \frac{RT(n_{Na} + n_{Cl})}{n_e \times v_e^*} \simeq \frac{RT(n_{Na} + n_{Cl})}{V}$ car le volume de la solution est voisin du volume qu'occuperait l'eau si elle était seule : $V_e^* = n_e \times v_e^*$.

Finalement, les concentrations en ions Na^+ et Cl^- apparaissent dans l'expression de Π et on a bien :

$$\Pi = RT(C_{Na} + C_{Cl})$$

63. $M_{NaCl} = 58,44 \text{ g.mol}^{-1}$. La concentration molaire en chlorure de sodium est donc $C_{NaCl} = \frac{35}{58,44} = 0,60 \text{ mol.L}^{-1} = 600 \text{ mol.m}^{-3}$ (on se place dans les unités du système international).

De plus, $C_{Na} + C_{Cl} = 2 \cdot C_{NaCl}$. On obtient : $\Pi = 2RT \cdot C_{NaCl} = 3,0 \times 10^6 \text{ Pa} = 30 \text{ bar}$

64. La fraction de l'eau non convertie en eau douce est plus salée que l'eau qui est entrée. La pression osmotique y est donc plus élevée et la surpression à appliquer pour dessaler cette eau est trop élevée ; ce n'est pas économiquement rentable. Il est préférable de rejeter la saumure plus salée et d'introduire de l'eau de mer moins salée. L'unité fonctionne en régime permanent (système ouvert). On veillera également à ne pas rejeter de l'eau trop salée en mer.

III.C Écoulement à travers la membrane.

65. Loi de Poiseuille : $q_v = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2 - \Pi}{\ell} \cdot r^4 = b \cdot (p_1 - p_2 - \Pi) = b \cdot (\Delta p - \Pi)$, car en convention récepteur, Δp correspond à $p_1 - p_2$.

66. Le débit Q_{us} est obtenu en multipliant q_v par le nombre n_S de tubes que contient la surface (unité) de membrane, soit : $Q_{us} = n_S \cdot q_v = n_S \cdot b \cdot (\Delta p - \Pi) = n_S \cdot \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p - \Pi}{\ell} \cdot r^4$

67. ♦ Application numérique : On reprend $\Pi = 3,0 \times 10^6 \text{ Pa}$ obtenu précédemment.

Donc : $Q_{us} = 1,6 \times 10^{15} \times \frac{\pi}{8 \times 10^{-3}} \times \frac{4,0 \times 10^6}{5,0 \times 10^{-5}} \cdot (10^{-8})^4$, soit $Q_{us} = 5,0 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, ou bien 0,5 litre par seconde et par mètre carré de surface.

68. On effectue un bilan de matière dans le compartiment (1), celui où il y a du sel. De l'eau douce (supposée entièrement désalée) sort de ce compartiment avec un débit volumique $S \times Q_{us}$. Ce compartiment est assimilé à un système ouvert, avec une sortie d'eau douce : la membrane et pas d'entrée. Le volume V_1 de ce compartiment varie donc de la manière suivante : $\frac{dV_1}{dt} = -S \times Q_{us}$.

Relions ensuite la fraction molaire ionique x et V_1 : $x \simeq \frac{2 \cdot n_{\text{NaCl}}}{n_e} \simeq \frac{2 \cdot n_{\text{NaCl}}}{(V_1/v_e^*)}$ car, comme précédemment (question 62) le volume de la solution est voisin du volume qu'occuperait l'eau si elle était seule : $V_1 \simeq n_e \times v_e^*$. On a donc : $x(t) = \frac{2 \cdot n_{\text{NaCl}} \cdot v_e^*}{V_1(t)}$ où n_{NaCl} est une constante car le compartiment est fermé pour NaCl.

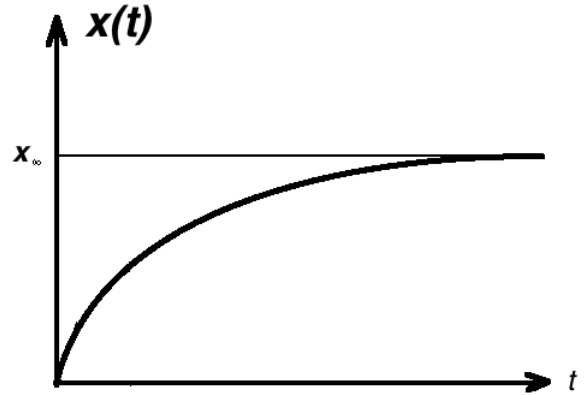
Dérivons la dernière relation par rapport au temps afin d'y faire apparaître le débit volumique :

$\frac{dx}{dt} = -\frac{2 \cdot n_{\text{NaCl}} \cdot v_e^*}{V_1^2} \times \frac{dV_1}{dt}$. Il vient ensuite : $\frac{dx}{dt} = +\frac{2 \cdot n_{\text{NaCl}} \cdot v_e^* \cdot S}{V_1^2} \times Q_{\text{us}}$, puis d'après la question (66) : $\frac{dx}{dt} = +\frac{2 \cdot n_{\text{NaCl}} \cdot v_e^* \cdot S}{V_1^2} \times n_s \cdot b \cdot (\Delta p - \Pi)$. On remplace ensuite V_1 par $\frac{2 \cdot n_{\text{NaCl}} \cdot v_e^*}{x(t)}$ et Π par $\frac{RT \cdot x(t)}{v_e^*}$ (question 62).

On obtient finalement : $\frac{dx}{dt} = \frac{S \cdot n_s \cdot b}{2 \cdot n_{\text{NaCl}} \cdot v_e^*} \cdot x^2(t) \times \left(\Delta p - \frac{RT \cdot x(t)}{v_e^*} \right)$

69. Avec l'hypothèse : $\Delta p > \Pi(t=0) = \frac{RT \cdot x(t)}{v_e^*}$,

on a : $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} > 0$. L'évolution de $x(t)$ présente une asymptote horizontale lorsque le terme entre parenthèses dans l'expression finale de la question 68 s'annule : $x_\infty = \frac{v_e^* \cdot \Delta p}{RT}$, c'est-à-dire lorsque la différence de pression Δp est égale à la pression osmotique : condition d'équilibre thermodynamique de la question (61).



70. $W_m = \Delta p \times V_e$ (voir cours sur les systèmes ouverts).

Expression en grandeur instantanée : $\delta W_m = \Delta p \times dV_e$

et la puissance instantanée s'écrit : $P_m = \Delta p \times \frac{dV_e}{dt} = \Delta p \cdot S \cdot Q_{\text{us}}$

Remarque : le travail est converti en énergie thermique dans la membrane.

71. Seule la fraction η_p du travail de la pompe est utile.

Pour 1 m^3 d'eau dessalée, $w = \eta_p \times \Delta p \times 1$; $w = \eta_p \times \Delta p$.

♦ Application numérique : 1 kWh correspond à une puissance de 1 kW pendant une heure :

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \times 3600 = 3,6 \times 10^6 \text{ J.}$$

Finalement, $w = 1,6 \text{ kWh} \cdot \text{h}^{-1}$

Je n'ai pas ça : $w = 3600 \text{ Pelec} / V_e = 365 \text{ kWh} / \text{m}^3$. Mais je n'ai pas vérifié ce dernier calcul.

*
* *