

I. Conversion de puissance d'un aérogénérateur

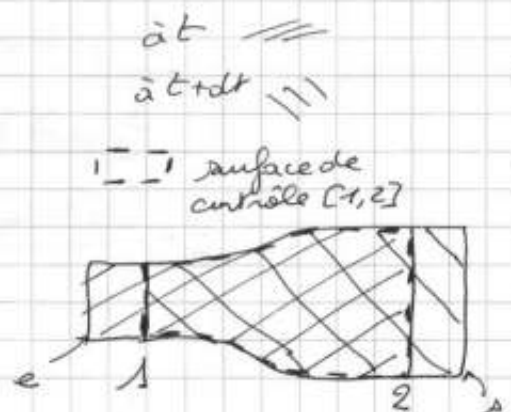
1) Le vent cède une partie de son énergie (cinétique) à l'éolienne donc sa vitesse diminue $v_2 < v_1$

Or le fluide est considéré comme incompressible donc son débit volumique se conserve $S_2 v_2 = S_1 v_1$ d'où $S_2 > S_1$ Le tube de courant s'évase.

2) $q_m = \rho S_1 v_1 = \rho S v = \rho S_2 v_2$

3) a) On considère le système fermé constitué:

→ à t : de ce qu'il y a dans la surface de contrôle $[1, 2]$ et ce qui va y entrer pendant dt noté e



→ à $t+dt$: de ce qu'il y a dans la surface de contrôle $[1, 2]$ et ce qui vient d'en sortir pendant dt , noté s .

On notera * tout ce qui est relatif à la surface de contrôle.

La quantité de mouvement du système vaut:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}^*(t) + q_m dt \vec{v}_1$$

$$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}^*(t+dt) + q_m dt \vec{v}_2$$

En régime stationnaire $\vec{p}^*(t) = \vec{p}^*(t+dt)$

$$\text{d'où } \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \frac{D\vec{p}}{Dt} dt = q_m dt (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$\left(\frac{D}{Dt}\right)$ est la dérivée particulière

$$\text{Or, d'après le PFD } \frac{D\vec{p}}{Dt} = \Sigma \vec{F}$$

Bilan des forces: → poids négligé (on n'en reparlera plus)

→ force de pression par le fluide à gauche: $\vec{F}_1$,
à droite $\vec{F}_2$ et tout autour $\vec{F}_{\text{ext}}$

→ force exercée par le rotor: $\vec{F}_{\text{rota}}$

La pression extérieure vaut P_0 partout donc $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

d'où $\frac{D\vec{p}}{Dt} dt = \boxed{\vec{F}_{R/a} dt = q_m dt (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}$

b) L'écoulement est parfait, homogène et isotherme, stationnaire, ~~instationnaire~~ et on néglige le poids donc on peut appliquer la relation de Bernoulli sur une ligne de courant:

$$P_0 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_E + \rho \frac{v^2}{2} \quad \text{entre (1) et (E)}$$

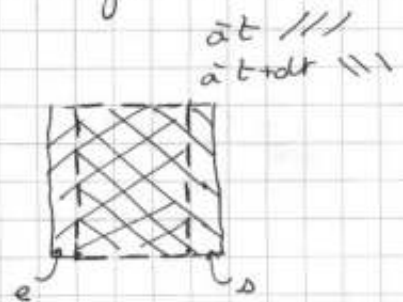
$$P_S + \rho \frac{v^2}{2} = P_0 + \rho \frac{v_2^2}{2} \quad \text{entre (S) et (2)}$$

d'où
$$\begin{cases} P_E = P_0 + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v^2) \\ P_S = P_0 + \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v^2) \end{cases}$$

c) On refait comme au 3.a) mais avec la surface de contrôle entre (E) et (S)

On étudie le système fermé composé:

→ à t de ce qu'il y a dans la surface de contrôle (*) et de ce qui va entrer entre t et $t+dt$ (e)



→ à $t+dt$ de ce qu'il y a dans la surface de contrôle (*) et de ce qui vient d'en sortir entre t et $t+dt$ (s).

$$\vec{p}(t) = \vec{p}^*(t) + q_m dt \vec{v}_e$$

$$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}^*(t+dt) + q_m dt \vec{v}_s$$

D'où $\frac{D\vec{p}}{Dt} = \vec{0}$

avec $\vec{p}^*$ indépendant du temps (stationnaire)
et $\vec{v}_e = \vec{v}_s$

Bilan des forces: → $\vec{F}_{R/a}$ exercée par le rotor

→ $\vec{F}_{Pg}$ la force de pression à gauche = $P_E S \vec{u}_x$

→ $\vec{F}_{Pd}$ la force de pression à droite = $-P_S S \vec{u}_x$

→ $\vec{F}_{per}$ la force latérale de pression, nulle par symétrie

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ pour tout couple de points.

Le PFD devient $\vec{O} = (P_E - P_S) S \vec{u}_x + \vec{F}_{r/a}$

d'où $\vec{F}_{r/a} = (P_S - P_E) S \vec{u}_x$

soit $\vec{F}_{r/a} = \left[P_0 + \rho \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = P_0 + \rho \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right] S \vec{u}_x$ d'après b)

$$\boxed{\vec{F}_{r/a} = P_2 (v_2^2 - v_1^2) S \vec{u}_x}$$

d) D'après a) $\vec{F}_{r/a} = \rho v S (v_2 - v_1) \vec{u}_x$ avec $q_m = \rho v S$

D'après c) $\vec{F}_{r/a} = \rho \left(\frac{v_2 + v_1}{2} \right) S (v_2 - v_1) \vec{u}_x$ avec $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

On identifie $\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{2}}$

4) a) Le système est défini au 2a)

$E_m(t) = E_c(t) + E_p(t)$ avec $E_p = 0$ car on néglige le poids

d'où $E_m(t) = E_c(t) = E_c^*(t) + q_m \frac{1}{2} v_1^2 dt$

$E_m(t+dt) = E_c^*(t+dt) + q_m \frac{1}{2} v_2^2 dt$

d'où $\frac{DE_m}{Dt} = \frac{1}{2} q_m dt (v_2^2 - v_1^2)$ avec E_c^* indépendant du temps (régime stationnaire)

On applique le T.E.N.

$$\frac{DE_m}{Dt} = P_{ext} + P_{int}$$

P_{ext} contient la $\vec{F}_{pext}$ qui ne travaille pas car elle est perpendiculaire au mouvement.

$\vec{F}_{pg}$ donc la puissance est $P_g = \vec{F}_{pg} \cdot \vec{v}_1 = P_1 S_1 v_1$

$\vec{F}_{pd}$ de puissance $P_d = -P_2 S_2 v_2$

$\vec{F}_{r/a}$ de puissance P recherchée

$P_{int} = 0$ car il n'y a pas de frottements de viscosité donc pas de dissipation.

Ainsi $\frac{1}{2} q_m (v_2^2 - v_1^2) = P_0 S_1 v_1 - P_0 S_2 v_2 + P$

D'où $P = \frac{1}{2} q_m (v_2^2 - v_1^2) - P_0 S_1 v_1 + P_0 S_2 v_2$

avec $q_m = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2$ et $S_1 v_1 = S_2 v_2$ d'où $P_0 S_2 v_2 - P_0 S_1 v_1 = 0$

~~Je remplace P_1 et P_2 ou plutôt $P_2 - P_1$~~

$$\text{d'où } \boxed{P = \frac{1}{2} \rho S_1 v_1 (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} q_m (v_2^2 - v_1^2)}$$

b) $P^* dt = \frac{1}{2} (\rho S v_1 dt) v_1^2$ C'est l'énergie cinétique d'un cylindre de section S et de longueur $v_1 dt$ qui se déplace à la vitesse v_1 , c'est-à-dire l'énergie cinétique qui traverserait S en l'espace d'éolienne pendant dt .

c) On définit le rendement par $\frac{P}{P^*} = \eta^*$.

$$\text{d'où } \eta^* = \frac{\frac{1}{2} \rho S v (v_2^2 - v_1^2)}{\frac{1}{2} \rho S v_1 v_1^2} = \frac{(v_1 + v_2)(v_2^2 - v_1^2)}{2 v_1 v_1^2}$$

avec $q_m = \rho S v$
et $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$

$$\text{d'où } \boxed{\eta^* = \frac{1}{2} (1+r)(1-r^2)} = \frac{1}{2} (1+r)(1-r)(1+r)$$

En effet, c'est P la puissance qu'on recherche (Fournie par l'air au rotor)

$$\boxed{\eta^* = \frac{1}{2} (1+r)^2 (1-r)}$$

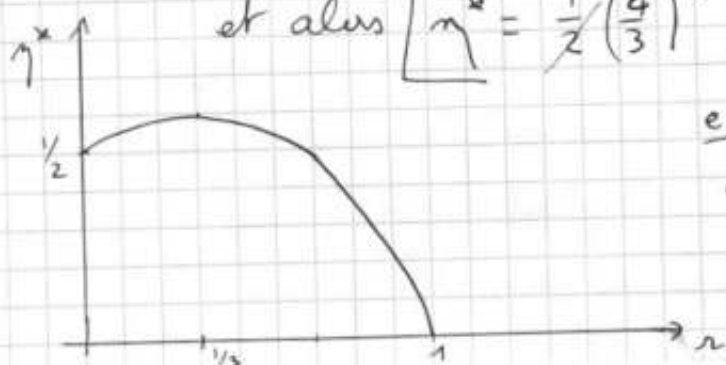
d) r est compris entre $r=0$ et $r=1$

$$\eta^*(0) = \frac{1}{2} \quad \eta^*(1) = 0.$$

$$\frac{d\eta^*}{dr} = \frac{1}{2} [2(1+r)(1-r) + (1+r)^2(-1)] = \frac{1}{2} [2(1-r) - (1+r)](1+r) = \frac{1}{2} (1-3r)(1+r)$$

$$\frac{d\eta^*}{dr} = 0 \text{ pour } r = \frac{1}{3} \text{ (et } r = -1 \text{ non admissible.)}$$

$$\text{et alors } \boxed{\eta^* = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{2}{3} = \frac{16}{27} \approx \frac{4 \times 4}{4 \times 7} = 0,6} \text{ (car } 7 \times 6 = 42)$$



e) Quand $v_2 < v_1$ augmente jusqu'à $\frac{1}{3}$, alors le rendement augmente mais ensuite il diminue jusqu'à 0 si $v_2 = v_1$ (l'optimum est $(r = \frac{1}{3}; \eta^* = \frac{16}{27})$). (12)

5) a) Il est visible sur le schéma que la vitesse a une composante radiale, sinon la section serait uniforme.

b) Il y a des forces exercées par l'éolienne sur le fluide entre (E) et (S) donc le fluide n'est pas soumis uniquement aux forces de pression et au poids. On ne peut pas appliquer le théorème de Bernoulli (pièce mobile).

2^e raison: le rotor tourne donc l'air n'est pas toujours au même endroit entre (E) et (S), son écoulement ne peut pas être stationnaire.

c) Cela doit dépendre de la forme des pales et de leur nombre.

II. Aérodynamique d'une pale d'éolienne

6) a) Un vent pas trop fort est à $36 \text{ km/h} = 10 \text{ m.s}^{-1}$, l'épaisseur d'une pale doit faire environ $10 \text{ cm} = L$, $\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ $\eta \approx 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$

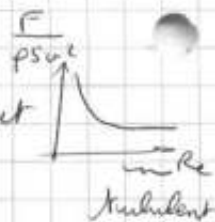
$$\boxed{Re = \frac{L v \rho}{\eta} = \frac{10 \cdot 0,1 \cdot 1,2}{1,8 \cdot 10^{-5}} \approx 10^5} \quad \text{L'écoulement est turbulent.}$$

$$b) \boxed{\vec{F} = -\rho C_x S \frac{v^2}{2} \frac{\vec{v}}{v}} \quad (\text{en } \text{kg.m}^{-3} \text{ m}^2 \text{ m}^2 \text{s}^{-2} = \text{kg.m.s}^{-2} = \text{N} = \text{OK})$$

coefficient de traînée

section de l'objet

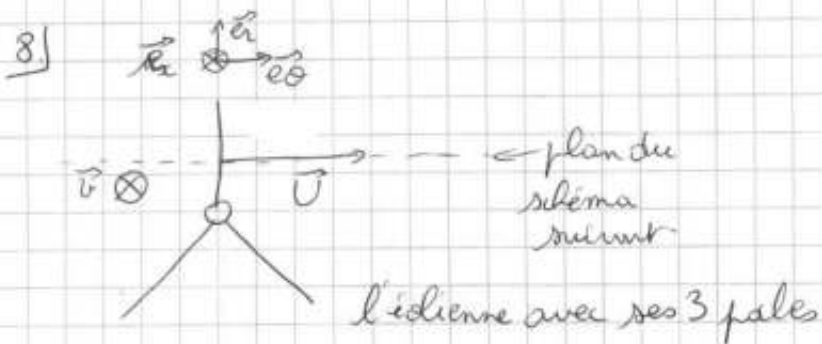
Un argument? le graphe $\frac{F}{\rho S v^2}$ en fonction de $Re = \frac{L v \rho}{\eta}$ qui est



Si non, il est logique que C_x intervienne et pas η pour un nombre de Reynolds élevé: la force de viscosité est négligeable.

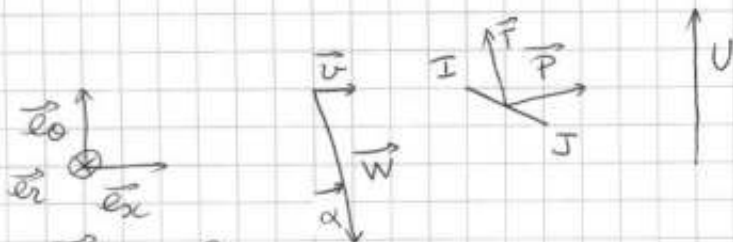
C_x est de l'ordre de l'unité (1,4 au pire pour un parachute).

7) Conformément à l'analyse dimensionnelle de la question précédente, C_T et C_p sont sans dimension. Ils dépendent de i , e et II , ainsi que de la forme exacte de la pale. On note A l'aire au lieu de S .



L'orientation de la corde est telle que le vent la "pousse".

On oriente comme demandé dans l'énoncé



$\vec{W}$ est la vitesse du vent par rapport à la pale fixe: $\vec{W} = \vec{v} - \vec{U}$

9) Pour un anneau, on a $\vec{W} \perp \vec{F}_p$ et sur le schéma précédent

l'orientation n'est pas bonne, ça fait $\vec{W} \perp \vec{F}_p$. On s'attend alors à avoir $\vec{F}_p$ dans une direction qui s'oppose au mouvement, ce qui est gênant. On suppose donc que $\rightarrow$ soit la corde est plus inclinée. $\vec{W} \perp \vec{F}_p$

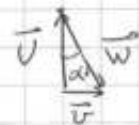
$\rightarrow$ soit la forme asymétrique de la pale permet d'avoir quand même $\vec{F}_p$ vers le haut.

J'ajoute > 0 au schéma $\vec{W} \perp \vec{F}_p$ et $\vec{P}$ perpendiculaire vers le haut.

10) On veut $F_u = (\vec{T} + \vec{P}) \cdot \vec{e}_0 = \int_A A \cdot > 0$.

$$F_u = \int_A A = T \cos \alpha + P \sin \alpha = \frac{1}{2} \rho A W^2 (C_T \cos \alpha + C_P \sin \alpha)$$

Or $U = W \cos \alpha$ et $v = W \sin \alpha$
(en norme)



D'où $\boxed{F_u = \frac{1}{2} \rho W (C_T U + C_P v)}$

The top graph plots C_p against i . The curve starts at $(-5, -0.5)$, passes through $(0, 0.5)$, reaches a maximum of 1.5 at $i = 10$, and ends at $(15, 1.4)$.

The bottom graph plots C_T against i . The curve starts at $(-5, 0.1)$, dips slightly to $(-2, 0.05)$, then increases to $(15, 0.7)$.

$\uparrow \vec{F}_p$ vers le haut d'après Bernoulli
 veine plus rapide
 angle faible, pas de tourbillons
 veine plus lente


 intensité faible
 angle élevé : bombillans
 intensité normale (= comme au-dessus)

La force de portance peut même être inversée. En tout cas, elle diminue si i est trop grand.

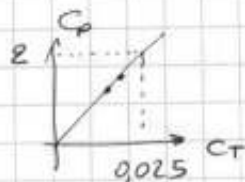
c) $\frac{C_P}{C_T}$ est la pente de la droite $C_P = \frac{C_P}{C_T} C_T$ qui passe par 0 et par le point qui nous intéresse.



On va donc trouver le point qui correspond à la droite la plus pentue.

Pour $i^* = 2^\circ$ (ou 3°), on a une pente de $\frac{2}{0,025}$

$$\text{c'est-à-dire } 80 = \frac{C_p^*}{C_T^*}$$



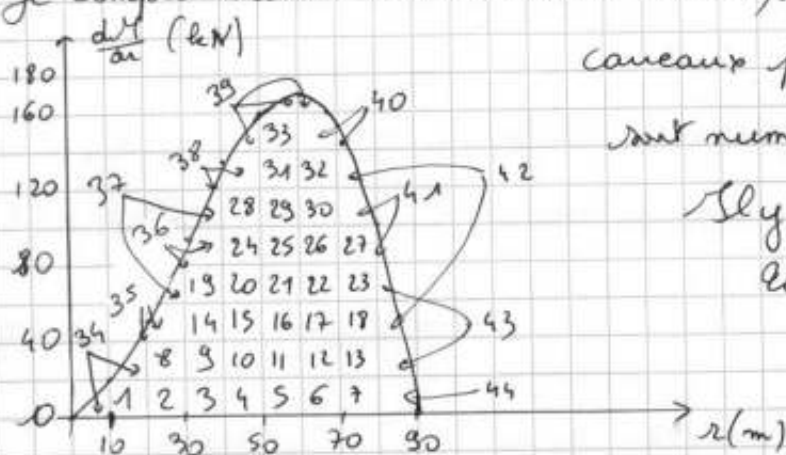
Pour $i^* = 3^\circ$, $C_p^* = 1,0$ et $C_T^* = 0,012$.

d) $V = r \Omega$ où Ω est la vitesse angulaire du rotor et r la distance à l'axe du point étudié.

Ainsi W est de plus en plus inclinée sur le schéma ($V \uparrow$ donc $\alpha \downarrow$) quand r augmente. Pour garder le même i^* , il faut augmenter son inclinaison au fur et à mesure que r augmente.

12) $M = \int \frac{dM}{dr} dr$ donc c'est l'aire sous la courbe

Je compte d'abord les caueaux entiers, puis je regroupe des morceaux de caueaux pour en faire un entier. Tous sont numérotés.



Il y a donc 44 caueaux de côtés $20 \text{ kN} \times 10 \text{ m}$

$$\text{D'où } \boxed{M = 44 \times 20 \times 10 \text{ kN.m} = 8,8 \cdot 10^6 \text{ N.m}}$$

La puissance fournie par l'air aux pales est $M \Omega$ avec $f = 3 \text{ min}^{-1}$ d'où $\Omega = \frac{2\pi}{60} \times 3 \text{ rad.s}^{-1} \approx 0,3 \text{ rad.s}^{-1}$

$$\boxed{P = 8 \cdot 10^6 \text{ W}}$$

13) On va comparer à $P^* = \frac{1}{2} \rho S v_1^3$ (cf I 4b)

où $S = \pi r^2$ $v_1 = 13 \text{ m.s}^{-1}$ et $r = 30 \text{ m}$ (valeur max de r sur le graphique précédent)

$$P^* = 0,5 \times 1,2 \times \pi \times (30)^2 \times (13)^3 = 3 \cdot 10^7 \text{ W.}$$

$\swarrow$ $\searrow$
 10^4 $2 \cdot 10^3$

$$\boxed{\eta_{\text{aéro}} = \frac{P}{P^*} = 0,27}$$

C'est bien moins que dans l'étude idéalisée du I.

III. Distribution de la vitesse du vent

14) L'aire sous la courbe est 1 (ou 100 suivant qu'on intègre Z ou $100Z$).

15) a) $g(x) = \frac{F(x)}{a} = x \exp(-x^2)$

si $x \rightarrow 0$ $g(x) \sim x$

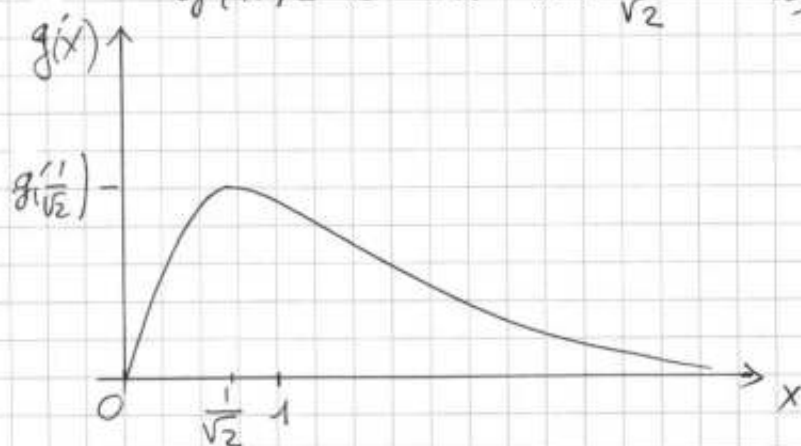
si $x \rightarrow +\infty$ $g(x) \rightarrow 0$.

$$g'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1 - 2x^2) e^{-x^2}$$

$$g'(x) = 0 \text{ en } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et ~~$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{0.7}{\sqrt{0.25}} \approx \frac{0.7}{0.5} \approx 1.4$~~

~~$g(1) = 1 \exp(-1) = \frac{1}{0.25}$~~

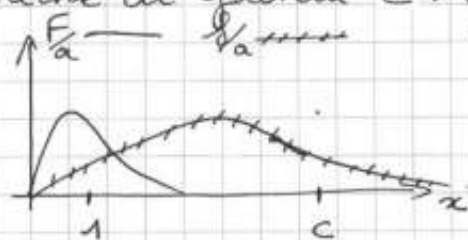


Cela ressemble bien à la courbe précédente.

b) C'est une homothétie de facteur c qui permet de passer de F à f ou de $\frac{F}{a}$ à $\frac{f}{a}$ ^{pour passer à l'horizontal}

$$F \text{ à } f \text{ ou de } \frac{F}{a} \text{ à } \frac{f}{a}$$

$$F(1) = f(c)$$



c) $\int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$ d'après la page 1.

et $\int_0^{+\infty} f(v) dv = 1$ d'où $\int_0^{+\infty} F(x) dx = \frac{a}{2}$

c'est-à-dire $1 = \int_0^{+\infty} F\left(\frac{v}{c}\right) dv = \int_0^{+\infty} F(x) c dx = c \int_0^{+\infty} F(x) dx$

D'où $\boxed{\frac{ca}{2} = 1}$ ou $\boxed{c = \frac{2}{a}}$ $= c \frac{a}{2}$

d) Le maximum n'est pas à $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ mais à $7 (= 0,7 \times 10)$.
 donc $c = 10 \text{ m s}^{-1}$ (pour que X soit sans dimension $X = \frac{v}{c}$)

e) Je fais un tableau de mesures contenant $X_i, Z_i, Z(X_i)$ mesurée.
 ainsi que X_i^2 et $\ln\left(\frac{Z_i(X_i)}{X_i}\right)$ qui est censé valoir $-(\ln a)X_i^2$. Je trace alors $\ln\left(\frac{Z(X)}{X}\right)$ en fonction de X^2
 c'est censé être une droite de pente $-\ln a$. Si les points
 sont correctement alignés, la fonction l'est bien.

Pour savoir s'ils sont correctement alignés, on calcule l'écart
 quadratique moyen : (je pose $\ln\left(\frac{Z(X)}{X}\right) = A(X)$ et $aX^2 = B(X)$).

$\sqrt{\frac{\sum (A(X_i) - B(X_i))^2}{n-2}}$ est l'écart quadratique moyen qui
 doit être le plus petit possible.

16) v^* est la vitesse la plus probable, c'est $\boxed{\frac{c}{\sqrt{2}} = v^*}$

17) Si $v^* = 13 \text{ m s}^{-1}$, alors $c = 13 \times \sqrt{2} = 13 \times 1,4 \approx 20 \text{ m s}^{-1}$

18) On peut mesurer la vitesse du vent avec un anémomètre à
 fil chaud (qui refroidit à cause du vent), ou un anémomètre
 à loupes dont on mesure la vitesse angulaire
 ou un tube de Pitot double  } rotation
 où on mesure la différence de pression entre les 2 entrées (qui
 vaut $\frac{1}{2} \rho v^2$).

~~Proportion~~

vgadiou@netcourrier.com.

Proportion de correction à l'usage de l'UPS et de ses membres.