

Corrigé de l'épreuve de Physique I - Mines MP 2016

Proposé par Sylvain Condamin.

Remarques à envoyer à sylvain.condamin@normalesup.org

1 Oscillateur simple

1. On applique le PFD, en projection sur l'axe $\hat{u}_x$: on prend en compte la force de rappel du ressort, le poids et la force de frottement :

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) - mg - \alpha\dot{x}.$$

$$\text{Soit : } \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}(x - l_0 + \frac{mg}{k}) = 0$$

On a donc l'expression demandée avec $\tilde{x} = x - \frac{mg}{k}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (pulsation propre de l'oscillateur), et $2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m}$. On en déduit $\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$. ξ est le facteur d'amortissement, relié au plus usuel facteur de qualité par $\xi = \frac{1}{2Q}$. C'est un facteur sans dimension caractérisant l'intensité de l'amortissement.

2. $\xi = 0$ correspond à un oscillateur libre non amorti : on a alors :

$X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$. Les conditions initiales donnent $A = X_0$ et $B\omega_0 = V_0$, donc :

$$X(t) = X_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Dans le cas $\xi \in]0, 1[$, on obtient un discriminant $\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$, ce qui donne des racines $r = -\omega_0\xi \pm i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$, et donc un régime pseudo-périodique :

$$X(t) = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)e^{-\omega_0\xi t}, \text{ avec } \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \text{ la pseudo-pulsation.}$$

Les conditions initiales donnent $A = X_0$, et une dérivée :

$$\dot{X} = ((-A\omega_0\xi + B\Omega) \cos \Omega t + (-B\omega_0\xi - A\Omega) \sin \Omega t)e^{-\omega_0\xi t}, \text{ d'où :}$$

$$V_0 = B\Omega - X_0\omega_0\xi.$$

On peut donc conclure en écrivant :

$$X(t) = \left(X_0 \cos \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \frac{V_0 + X_0\omega_0\xi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t \right) e^{-\omega_0\xi t}$$

L'influence de la force supplémentaire est de remplacer α par $\alpha - \beta$ avec potentiellement la possibilité d'avoir un ξ négatif, ce qui conduirait à une amplification des oscillations avec le temps (instabilité).

3. on ajoute au PFD une force supplémentaire, qui en projection sur $\hat{u}_x$, vaut $-F_0 - F_1 \cos(2\pi ft)$. En reprenant le calcul, cela donne :

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos(2\pi ft).$$

On a donc :

$$\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos(2\pi ft)$$

En passant en complexe, on a :

$$-\omega^2 \underline{Y} + 2i\xi\omega_0\omega \underline{Y} + \omega_0^2 \underline{Y} = -\underline{E}.$$

On en conclut donc :

$$\underline{H} = \frac{1}{\omega_0^2(\Omega^2 - 2i\xi\Omega - 1)}$$

4. Le gain vaut $G = \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{(\Omega^2 - 1)^2 + 4\xi^2 \Omega^2}}$.

En notant $u = \Omega^2$, on étudie la fonction $F(u) = (u - 1)^2 + 4\xi^2 u$, dont un minimum correspondrait à un maximum du gain.

$F'(u) = 2(u - 1) + 4\xi^2$ est nul pour $u = 1 - 2\xi^2$, ce qui n'est possible que pour $\xi < 1/\sqrt{2}$.

On a alors $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

On a, pour $\Omega^2 = 1 - 2\xi^2$,

$G = \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{4\xi^2 + o(\xi^2)}}$, donc, en première approximation,

$$G = \frac{1}{2\omega_0^2 \xi}.$$

5. On a $\omega_0 \simeq \omega_r \simeq 12 \text{ rad.s}^{-1}$, et le gain $|\underline{H}|/\omega_0^2$ à la résonance est de l'ordre de 9 en décibels, soit $10^{9/20}$ en valeur absolue. Cela donnerait $\frac{1}{2\xi} = 10^{9/20}$, et donc $\xi = \frac{1}{2}10^{-9/12} = 0,18$

6. Il vaut mieux éviter que la fréquence de résonance corresponde à la fréquence de l'action périodique sous peine de voir démultipliés les effets de cette action (ce qui est certainement arrivé au Millenium Bridge...)

7. Le plus simple serait d'utiliser un capteur piezoélectrique, placé sous les semelles du piéton.

8. C'est un bel exemple de repliement de spectre : si l'enregistrement 4 montre correctement l'étendue du spectre (essentiellement un signal périodique à 2 Hz et ses harmoniques), les autres présentent des repliements de spectre partiels (pour la figure 2, qui permet la mesure la plus précise de la fréquence du fondamental) ou totaux (pour les autres figures, qui sont inexploitable). Le spectre le plus pertinent peut être le 4 (pour la visualisation de la totalité du spectre) ou le 2 (pour la précision de la mesure du fondamental).

Il est possible de vérifier ces raisonnements en retrouvant les fréquences de Nyquist dans les différents cas :

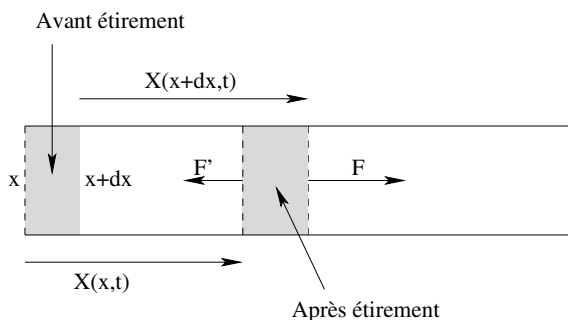
$f_N = \frac{f_e}{2} = \frac{N}{2t_{max}}$, ce qui donnerait $f_N = 0,87 \text{ Hz}$ pour 1, $f_N = 1,67 \text{ Hz}$ pour le 2, $f_N = 5,6 \text{ Hz}$ pour le 3 et $f_N = 15 \text{ Hz}$ pour le 4.

La fréquence de 2 Hz trouvée correspond à la période $T = 0,5 \text{ s}$ observée dans la figure 2.

9. Le problème est que la fréquence du forçage correspond à la fréquence de résonance du Millenium Bridge (une pulsation de résonance de l'ordre de 12 rad.s^{-1} correspond à une fréquence de l'ordre de 2 Hz. L'installation d'amortisseurs harmoniques élimine la résonance à cette fréquence particulière (cela en crée en revanche à des fréquences ne correspondant pas à la marche).

2 Système élastique continu

10. E est homogène à une force sur une surface, c'est donc une pression, qui peut s'exprimer en Pa.
11. Un schéma peut aider à visualiser la situation, avec une tranche d'épaisseur dx dont les extrémités se déplacent de $X(x, t)$ et de $X(x + dx, t)$.



La variation de longueur de cette tranche correspond donc à $dX = X(x + dx) - X(x) = \frac{\partial X}{\partial x} dx$, on peut donc écrire que la variation relative de longueur vaut $\frac{\partial X}{\partial x}$ (ce qui correspond au $\frac{\Delta L}{L}$ dans la loi de Hooke).

La force exercée par la partie droite sur la partie gauche vaut donc :

$$\vec{F} = ES \frac{\partial X}{\partial x} \hat{u}_x.$$

On applique maintenant le PFD à un élément de longueur dx sur lequel est appliquée les forces $\vec{F}(x + dx, t)$ à droite mais également une force $\vec{F}' = -\vec{F}(x, t)$ à gauche.

On a donc :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = F(x + dx, t) - F(x, t) = \frac{\partial F}{\partial x} dx = ES dx \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

On en conclut :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0.$$

On peut remarquer (ce n'était pas demandé...) qu'il s'agit d'une équation de D'Alembert, avec une vitesse de propagation $c = \sqrt{E/\rho}$ (bien homogène à une vitesse) : il s'agit de la vitesse du son dans le matériau !

12. Il s'agit de projeter le PFD dans la direction $\hat{u}_x$: cela donne :

$0 = T(x + dx) \cos \alpha(x + dx, t) - T(x) \cos \alpha(x, t)$. Au premier ordre en α (ce que l'énoncé omet de préciser...) on a bien $T(x + dx) = T(x)$, donc T indépendant de x .

13. Le résultat donné n'est valable que si on néglige le poids (ce que l'énoncé oublie là aussi de préciser !)

On a alors, en projetant le PFD sur $\hat{u}_y$, et en assimilant (au premier ordre en α) dl à dx

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \sin \alpha(x + dx) - T_0 \sin \alpha(x).$$

En écrivant (toujours à l'ordre 1), $\sin \alpha \simeq \alpha$, on obtient :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 dx \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

On peut donc écrire :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ ce qui est l'équation demandée avec } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}.$$

c_l est là aussi la vitesse de propagation des ondes sur la corde (typiquement une corde de Melde).

Note : rajouter le poids conduisait à ajouter un terme $-g$ à la fin de l'équation. Cela ne modifie pas les propriétés de propagation des ondes, mais induit en plus une courbure de la corde correspondant à la solution statique.

On notera également que cette partie est au programme de PC mais hors-programme en MP, ce qui a possiblement échappé au concepteur du sujet...

3 Modèle de la poutre élançée

14. On cherche des ondes stationnaires. Des ondes stationnaires peuvent apparaître en réponse à des stimuli périodiques après un régime transitoire (l'énergie apportée étant compensée par l'amortissement - on peut prendre comme exemple la corde de Melde) ou en régime libre (si on néglige l'amortissement) si les conditions initiales sont adaptées (on peut prendre comme exemple une corde de guitare, même si les oscillations initiales sont la somme de plusieurs ondes stationnaires).
15. On a $\rho S f(x) g''(t) + I E f^{(4)}(x) g(t) = 0$. Comme souvent avec des ondes stationnaires, on divise par $y(x, t)$ de manière à séparer les variables :

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = -\frac{I E}{\rho S} \frac{f^{(4)}(x)}{f(x)}.$$

Les deux termes dépendant de variables différentes, ils sont nécessairement égaux à une même constante que l'on notera C .

On a donc $g''(t) - C g(t) = 0$.

Si $C > 0$ il existe des solutions divergentes, ce qui paraît peu physique dans ce modèle où aucune énergie n'est a priori apportée au système. On supposera donc $C < 0$, et on notera $C = -\omega^2$ pour obtenir des solutions sinusoïdales de pulsation ω . On a pour $f(x)$ une équation différentielle d'ordre 4, pour laquelle il faudra donc 4 constantes d'intégration, et pour $g(t)$ une équation différentielle d'ordre 2, qui nécessite 2 constantes d'intégration. Une subtilité ici est que ces constantes d'intégration ne sont pas indépendantes : on peut multiplier toutes celles de f par un α arbitraire et diviser toutes celles de g par α pour obtenir le même $y(x, t)$ à la fin ; ceci équivaut à fixer arbitrairement une constante d'intégration. On a donc besoin de 5 constantes d'intégration indépendantes.

16. On a $f^{(4)}(x) - \omega^2 \frac{\rho S}{I E} f(x) = 0$.

Si on note $\beta^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{I E}$, le polynôme caractéristique s'écrit :

$r^4 = \beta^4$, dont les solutions sont :

$r_1 = \beta$, $r_2 = -\beta$, $r_3 = i\beta$, $r_4 = -i\beta$. L'espace vectoriel des solutions admet donc pour base $e^{\beta x}$, $e^{-\beta x}$, $e^{i\beta x}$ et $e^{-i\beta x}$; cet espace vectoriel peut également être décrit à partir de la base $\cos(\beta x)$, $\sin(\beta x)$, $\cosh(\beta x)$ et $\sinh(\beta x)$, ce qui donne la forme générale indiquée par l'énoncé.

17. On a alors : $A + C = 0$ et $-\beta^2 A + C \beta^2 = 0$ d'après les conditions aux limites en $x = 0$, ce dont on peut déduire $A = C = 0$.

Par ailleurs les conditions aux limites en $x = L$ donnent :

$$B \sin(\beta L) + D \sinh(\beta L) = 0 \text{ et } -\beta^2 B \sin(\beta L) + D \beta^2 \sinh(\beta L) = 0.$$

On en déduit donc : $B \sin(\beta L) = 0$ et $D \sinh(\beta L) = 0$, donc $D = 0$.

La seule possibilité pour avoir une solution non-nulle est donc que $\sin(\beta L) = 0$, donc $\beta L = n\pi$.

On en déduit alors, à l'aide de la définition de β , $\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{I E}{\rho S}}$, soit :

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{I E}{\rho S}}$$

18. Les modes de vibration considérés sont unidimensionnels, il faut donc exclure tous les modes de vibration dépendant de la deuxième dimension horizontale (b,d,g,h).

On a $f(x) = B \sin \frac{n\pi x}{L}$, donc la vibration est sinusoïdale avec un nombre de demi-périodes égal à n .

On a donc $n = 1$ pour le mode a, $n = 2$ pour le mode c, $n = 3$ pour le mode e, et $n = 4$ pour le mode f.

19. Seuls sont susceptibles de se déclencher des modes d'oscillation où l'amplitude est nulle (ou très faible) au niveau de chacun des appuis. En effet les trois travées sont solidaires, et donc vibrent ensemble ou pas du tout (la continuité de $\frac{\partial y}{\partial x}$ empêche une vibration d'une seule des deux travées).

Il faut donc trouver les modes de vibration où les noeuds correspondent environ aux positions des travées. Le mode le plus prometteur est le $n = 9$, qui donne une demi-longueur d'onde de 35,8 m : la première travée correspond alors à deux ventres, la deuxième à quatre ventres et la troisième à trois ventres (à peu de chose près).

Pour ce mode, on a donc :

$$\omega_9 = 12,0 \text{ rad.s}^{-1}.$$

C'est quasi-exactement la fréquence du forçage piéton : la résonance est donc tout à fait envisageable.

Certains modes plus élevés (en particulier multiples de $n = 9$) pourraient potentiellement entrer en résonance avec des harmoniques du forçage piéton ; ceci est probablement anecdotique dans la mesure où l'intensité du forçage est faible, et que l'écart entre la position du noeud et la position de l'appui sera plus important comparé à la taille du ventre de vibration : on peut donc s'attendre à une atténuation plus élevée.

Pour ce qui est des vibrations latérales, cela dépend des propriétés des appuis : Si chaque pile de pont, ainsi que les côtés, correspond à un appui, on peut envisager d'utiliser le même modèle ; les pulsations des modes purement latéraux sont obtenus en inversant les rôles de h et b . On a alors $I' = \frac{1}{12}hb^3$ ($S = bh$ restant lui inchangé).

On obtient alors : $\omega_9 = 45 \text{ rad.s}^{-1}$. Ce mode peut éventuellement être excité par des harmoniques élevées (4e harmonique) du forçage piéton, mais la correspondance semble moins convaincante, et l'amplitude de l'harmonique plus faible.

Il est probablement possible d'obtenir encore d'autres modes en considérant d'autres modes d'appui : par exemple, en supposant que les seuls appuis latéraux à prendre en compte sont les piliers, les extrémités de la passerelle pouvant alors osciller librement, seule la longueur du tablier principal de 144 m compte. On trouverait alors une pulsation du fondamental à $\omega_1 = 2,77 \text{ rad.s}^{-1}$, qui n'est pas susceptible d'être excité par le forçage piéton. En revanche, l'harmonique $\omega_2 = 11,1 \text{ rad.s}^{-1}$ est plus susceptible de l'être...

Notons cependant que ce modèle ne semble pas reproduire les fréquences de l'ordre du Hz qui ont été observées pour le mouvement latéral (cette fréquence est due à l'alternance entre les forces latérales exercées par les pieds des piétons, synchronisés avec le mouvement latéral du pont...)

La modélisation doit donc être plus complète pour entièrement comprendre le phénomène.