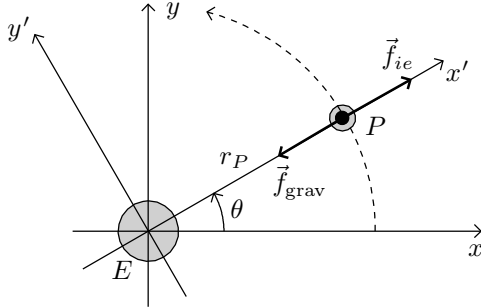


Problème B : Mines 2016

I Fascinantes exoplanètes

I.1 Une loi fondamentale

1) On peut représenter la situation par le schéma suivant :



Le référentiel $\mathcal{R}_0(E, x, y, z)$ lié à l'étoile E est considéré comme galiléen.

La planète P est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}'(E, x', y', z)$ en rotation uniforme dans $\mathcal{R}_0$ autour de l'axe z . La trajectoire circulaire de P dans $\mathcal{R}_0$ est représentée partiellement ci-dessus (arc en pointillés).

Dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$, la planète est en équilibre en étant soumise à deux forces :

- la force de gravitation $\vec{f}_{\text{grav}}$ exercée par l'étoile sur la planète

$$\vec{f}_{\text{grav}} = -G \frac{M_E M_P}{r_P^2} \vec{u}_{x'}$$

- la force d'inertie centrifuge $\vec{f}_{ie}$

$$\vec{f}_{ie} = M_P \theta^2 r_P \vec{u}_{x'}$$

On peut donc écrire :

$$-G \frac{M_E M_P}{r_P^2} \vec{u}_{x'} + M_P \theta^2 r_P \vec{u}_{x'} = \vec{0} \Rightarrow G M_E = \theta^2 r_P^3$$

$$\text{Comme } T_P = \frac{2\pi}{\theta} \Rightarrow G M_E = \frac{4\pi^2}{T_P^2} r_P^3$$

$$\frac{r_P^3}{T_P^2} = \frac{G M_E}{4\pi^2} \quad \text{troisième loi de KEPLER}$$

I.2 Principales caractéristiques de la planète

2) On peut appliquer la troisième loi de KEPLER au couple étoile-satellite :

$$\frac{r_{\mathcal{E}}^3}{T_{\mathcal{E}}^2} = \frac{G M_P}{4\pi^2} \Rightarrow M_P = \frac{4\pi^2}{G} \times \frac{(R_P + h)^3}{T_{\mathcal{E}}^2} \approx 1,59 \times 10^{22} \text{ kg}$$

En adoptant le modèle proposé :

- noyau central de rayon $r_{\text{noyau}} \approx 3000 \text{ km}$ de densité $d = 10$, soit de masse volumique $\rho_{\text{noyau}} \approx 10^4 \text{ kg.m}^{-3}$
- croûte et manteau de densité plus faible ($d_{\text{manteau}} \approx 5 \Rightarrow \rho_{\text{manteau}} \approx 5 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$), et d'épaisseur d'environ 2000 km

il est facile de calculer la masse correspondante :

$$\begin{aligned} M'_P &\approx \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{noyau}} r_{\text{noyau}}^3 + \frac{4}{3} \times \pi \rho_{\text{manteau}} (R_P^3 - r_{\text{noyau}}^3) \\ &\approx \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{noyau}} (r_{\text{noyau}}^3 + 2(R_P^3 - r_{\text{noyau}}^3)) \\ &\approx \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{noyau}} (2R_P^3 - r_{\text{noyau}}^3) \\ &\approx 9 \times 10^{24} \text{ kg} \end{aligned}$$

La différence entre les deux masses est significative (le rapport est de l'ordre de 1000) : la planète est probablement beaucoup moins dense que la Terre.

3) cf. cours d'électrostatique : le théorème de GAUSS permet de calculer le champ gravitationnel comme si toute la masse de la planète était concentrée en son centre. On a donc :

$$\vec{g}_P = -G \frac{M_P}{R_P^2} \vec{u}_r \Rightarrow \|\vec{g}_P\| \approx 4,03 \text{ m.s}^{-2}$$

Rem : ceci confirme la légèreté relative de la planète par rapport à la Terre ...

4) La différence entre le champ gravitationnel et l'accélération de la pesanteur à la surface d'un astre est liée à la force d'inertie centrifuge résultant de la rotation de la planète sur elle-même autour de l'axe des pôles.

En supposant que la planète reste sphérique (malgré sa rotation propre), on peut facilement calculer la différence entre le champ aux pôles et le champ à l'équateur (c'est la force d'inertie centrifuge) :

$$\|\vec{g}_{\text{pôle}} - \vec{g}_{\text{equa}}\| = \left(\frac{2\pi}{T_P} \right)^2 R_P \approx 0,04 \text{ m.s}^{-2}$$

La différence est difficilement mesurable avec un dispositif d'enregistrement vidéo de lycée ($\Delta g / g \approx 10^{-3}$: précision nécessaire de l'ordre du millième)

On pourrait imaginer par exemple de mesurer très précisément la période d'un pendule, d'utiliser un accéléromètre de précision ...

5) Le calcul de la vitesse de libération est très classique : on écrit que le mouvement du corps est conservatif, et qu'il échappe à l'attraction de la planète s'il peut arriver à l'infini avec une vitesse non nulle.

On peut exprimer l'énergie mécanique du mobile :

$$\mathcal{E}_{\text{méca}} = \mathcal{E}_{\text{pot}} + \mathcal{E}_{\text{ciné}} = -G \frac{M_P m}{r} + \frac{1}{2} m v^2 = C^{\text{ste}}$$

et faire un bilan entre l'instant du lancement et l'infini :

$$-G \frac{M_P m}{R_P} + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_{\infty}^2$$

Comme on veut $v_{\infty} \geq 0$

$$v \geq \sqrt{2G \frac{M_P}{R_P}} = v_{\text{lib}} \approx 6,3 \text{ km/s}$$

Sur Terre, la vitesse de libération est d'environ 11 km/s

6) On voit sur les courbes fournies qu'à la température $T = 290 \text{ K}$, les vitesses les plus probables pour les gaz composant éventuellement l'atmosphère de la planète sont toutes nettement inférieures à la vitesse de libération calculée dans la question précédente.

On en déduit que la planète est susceptible de retenir son atmosphère.

7) Le théorème d'équipartition de l'énergie permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} m \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

$$v_{\text{quad, moy}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} \approx 475 \text{ m/s}$$

Cette valeur est en accord avec les données de la figure proposée.

1.3 Détection d'une exoplanète depuis la Terre

8) La distance séparant le système solaire de 51-Pégase est de

$$d_{\text{Pég-Sol}} \approx 42 \times 365,24 \times 86400 \times 3 \times 10^8 \approx 4 \times 10^{14} \text{ km}$$

L'angle sous lequel on voit le couple Soleil-Jupiter depuis 51-Pégase est donc

$$\alpha \approx \frac{778 \times 10^6}{4 \times 10^{13}} \approx 2 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Le pouvoir de résolution du télescope de l'OHP est

$$\alpha' = 1,2 \times \frac{500 \times 10^{-9}}{1,93} \approx 2,6 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

La séparation « optique » du couple Soleil-Jupiter est donc possible.

En dehors du pouvoir séparateur lié à la diffraction du télescope, de nombreux facteurs nuisent à cette détection :

- turbulences atmosphériques
- diffusion de la lumière à la traversée de l'atmosphère
- faible luminosité de la planète par rapport à l'étoile

9) La vitesse radiale de l'étoile E vue depuis la Terre se calcule en projetant la vitesse absolue $\vec{v}_0(E)$ de l'étoile (dans le référentiel $Oxyz$) le long de l'axe $\vec{OG}$, de vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{OG}}{\|\vec{OG}\|}$.

La vitesse absolue de l'étoile se calcule évidemment par composition des vitesses :

$$\vec{v}_0(E) = \vec{v}_G + \vec{v}$$

et donc

$$v_r = (\vec{v}_G + \vec{v}) \cdot \vec{u} = v_G - v \sin \theta \Rightarrow \begin{cases} v_{r, \max} = v_G + v \\ v_{r, \min} = v_G - v \end{cases}$$

On a donc, compte tenu des formules fournies :

$$\delta f = \frac{f}{2c} ((v_G + v) - (v_G - v)) = \frac{fv}{c}$$

10) La fréquence de la lumière reçue varie sinusoidalement avec une période T égale à la période de rotation de l'étoile autour de G .

Cette méthode est particulièrement facile à mettre en œuvre pour des périodes relativement courtes, donc pour des couples étoiles-planète proches (penser à la troisième loi de KEPLER).

L'étoile ayant une trajectoire circulaire dans le référentiel $(Gxyz)$, on peut écrire : $vT = 2\pi GE$. Comme $v = c \delta f / f$, il vient :

$$c \frac{\delta f}{f} T = 2\pi GE \Rightarrow GE = \frac{c}{2\pi} \times \frac{\delta f}{f} \times T$$

11) Comme G est le barycentre de E et P , on a :

$$(M_E + M_P) \vec{EG} = \cancel{M_E \vec{EG}} + M_P \vec{EP}$$

Comme $M_P \ll M_E \Rightarrow$

$$M_E \vec{EG} \approx M_P \vec{EP} \Rightarrow M_E GE \approx M_P EP$$

La troisième loi de KEPLER donne en outre :

$$\frac{GP^3}{T^2} = \frac{GM_E}{4\pi^2} \quad M_P \ll M_E \quad \frac{EP^3}{T^2} \approx \frac{GM_E}{4\pi^2}$$

On en déduit finalement :

$$EP = \sqrt[3]{\frac{GM_E}{4\pi^2} T^2} \quad M_P = \frac{M_E GE}{EP} = \left(\frac{4\pi^2}{G} \right)^{\frac{1}{3}} M_E^{2/3} \frac{GE}{T}$$

12) De la formule de la question 10, on déduit :

$$\frac{\delta f}{f} = 2\pi \frac{GE}{cT} = 2\pi \times \frac{M_P}{M_E} \times \frac{EP}{cT}$$

En appliquant cette dernière formule au couple Soleil-Jupiter :

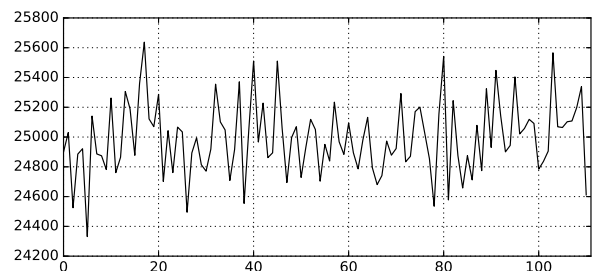
$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{f} &\approx 2\pi \times \frac{1,90 \times 10^{27}}{1,99 \times 10^{30}} \times \frac{778 \times 10^9}{3 \times 10^8 \times 4335 \times 86400} \\ &\approx 2\pi \times \frac{1,9 \times 7,78}{1,99 \times 3 \times 4,335 \times 8,64} \times 10^{27+2-30+9-8-3-4} \\ &\approx 0,41 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

Il faut donc une mesure extrêmement précise !

II Détection d'un signal faible

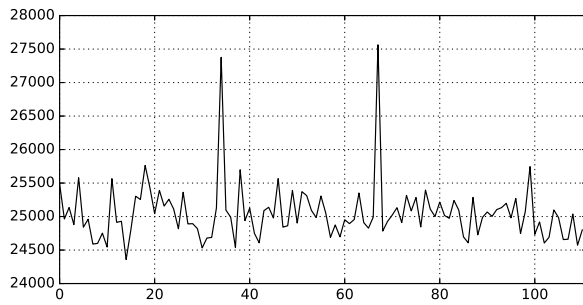
II.1 Extraction d'un signal faible du bruit par effet de moyenne

13) Après 2500 acquisitions, la valeur moyenne du signal serait d'environ $2500 \times 10 \approx 25000$, tandis que la dispersion serait d'environ $5 \times \sqrt{2500} \approx 250$: les fluctuations seraient bien moins sensibles (signal entre 24500 et 25500, en gros ...)



14) Un signal d'amplitude unité dans un bruit gaussien de dispersion cinq fois plus grande est évidemment indétectable !

Si on fait 2500 acquisitions, on va avoir des pics d'amplitude 2500 au dessus d'un bruit centré vers 25000, dont on a vu que la dispersion est de l'ordre de 250 : le signal est maintenant parfaitement détectable.



15) Pour faire surgir le signal d'amplitude s_p d'un bruit d'amplitude b et de dispersion σ , il faut effectuer au moins n mesures de façon à avoir :

$$n(b + s_p) \gg nb + \sqrt{n}\sigma \Rightarrow \sqrt{n}s_p \gg \sigma \Rightarrow n \gg \left(\frac{\sigma}{s_p}\right)^2$$

Dans le cas de l'étude précédente, on avait $s_p=1$, $\sigma \approx 5$: il est donc nécessaire de faire un nombre de mesures largement supérieur à 25.

Voilà le code Python utilisé pour générer les figures précédentes :

```
>> import random
import matplotlib.pyplot as plt

N=111 ; l = [0] * N
moy = 10 ; sigma = 5
n=2500

for i in range(n):
    for j in range(N):
        l[j] += random.gauss(moy, sigma)

l[34]+=n ; l[67]+=n # à commenter pour q.13

plt.grid() ; plt.plot(l) ; plt.show()
```