

Milieux non homogènes - Simulateur de conduite

Solution proposée par JR Seigne MP,
avec la collaboration de M Libourel Sciences Industrielles pour l'Ingénieur MP*,
Clemenceau Nantes

1 Propagation dans les milieux non homogènes

1.1 Fibre optique à profil parabolique d'indice et oscillateur quantique

1. L'équation de propagation est $\Delta \vec{E} + k_0^2 n_0^2 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) \vec{E} = \vec{0}$ puisque l'on néglige le terme de dispersion spatiale. Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_y(x, y, z, t) \vec{e}_y$. En coordonnées cartésiennes, le laplacien vecteur correspond au laplacien scalaire sur chacune des composantes. On a donc en scalaire : $\Delta E_y + q_0^2 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) E_y = 0$. On peut exprimer le laplacien et, puisque $\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -\kappa^2 E_y$, on arrive à $\Delta E_y = \left[\frac{\partial^2 E(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E(x, y)}{\partial y^2} - \kappa^2 E(x, y) \right] \exp j(\kappa z - \omega t)$. L'équation différentielle à laquelle obéit l'amplitude du champ électrique est $\frac{\partial^2 E(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E(x, y)}{\partial y^2} + \left[q_0^2 - \kappa^2 - \frac{q_0^2}{a^2} (x^2 + y^2) \right] E(x, y) = 0$. Afin de raisonner sur des quantités adimensionnées, on effectue le changement de variables proposé : $\frac{\partial E(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial E(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial E(\xi, \eta)}{\partial \xi} \sqrt{\frac{q_0}{a}}$. Pour la dérivée seconde, le processus de calcul est le même : $\frac{\partial^2 E(x, y)}{\partial x^2} = \sqrt{\frac{q_0}{a}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right)$. On a $\frac{\partial^2 E(x, y)}{\partial x^2} = \sqrt{\frac{q_0}{a}} \left(\frac{\partial^2 E(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$. Cela permet d'écrire que $\frac{\partial^2 E(x, y)}{\partial x^2} = \frac{q_0}{a} \frac{\partial^2 E(\xi, \eta)}{\partial \xi^2}$. Le changement de variable $y \rightarrow \eta$ est identique, on arrive à : $\frac{q_0}{a} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} \right) + \left(q_0^2 - \kappa^2 - \frac{q_0}{a} (\xi^2 + \eta^2) \right) E = 0$. On divise par le rapport q_0/a et on arrive à la forme recherchée : $\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} + (\mu - (\xi^2 + \eta^2)) E = 0}$.

2. $\hbar$ est en $J \cdot s$. Or, J correspond à une énergie comme par exemple une énergie cinétique : $J \equiv \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. On peut donc écrire que $\hbar$ s'exprime en $J \cdot s \equiv \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Comme $m\omega$ s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$, on en déduit que $\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ s'exprime en m^{-1} . C'est l'inverse d'une distance. Cette unité est logique car la condition de normalisation de la probabilité est $1 = \iint |\psi|^2 dx dy$. Comme $dx dy$ est en m^2 , le carré du module de la fonction d'onde doit être en m^{-2} ce qui fait bien une amplitude à l'inverse d'une distance. Le changement de variable est le même que celui qui précède, on peut écrire que $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{m\omega}{\hbar} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}$ et comme $x^2 + y^2 = \frac{\hbar}{m\omega} (u^2 + v^2)$, l'équation de SCHRÖDINGER devient $-\frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + \frac{1}{2} \hbar\omega (u^2 + v^2) \psi = (N + 1) \hbar\omega \psi$. Après simplification, on arrive à : $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + [2(N + 1) - (u^2 + v^2)] \psi = 0$. Cette équation est de forme totalement analogue à celle de la propagation du champ électrique dans la question précédente.

3. On sait qu'un champ électrique est en $V \cdot \text{m}^{-1}$, donc son carré est en $V^2 \cdot \text{m}^{-2}$ et par conséquent $E^2 dx dy$ est en V^2 . Le terme proposé en V^2 représente le carré d'un potentiel ou d'une tension : V est en volt. E^2 représente l'image de l'énergie associée au champ électromagnétique qui se propage. On affirme donc par cette condition le fait que l'énergie distribuée dans un plan (xy) perpendiculaire à la direction de propagation est bornée. On peut faire observer que dans le cadre d'un modèle onde plane, cela ne serait pas le cas, ceci montrant le caractère non physique du modèle onde plane que l'on utilise pourtant en permanence. Ceci se justifie en indiquant que seul le paquet d'ondes correspondant à la superposition d'ondes planes a du sens physique.

4. La situation des deux équations étant parfaitement similaire, on peut proposer une solution pour le champ électrique de la forme $E(x, y) = \sqrt{\frac{q_0}{\pi a}} \exp -\frac{q_0}{2a}(x^2 + y^2)$. On doit donc avoir $\mu = 2(N + 1)$. La plus petite valeur de N pour l'oscillateur quantique 2D est $N = 0$ et par conséquent : $\mu_{min} = 2$.

5. On fixe une valeur de μ , on a alors $\kappa^2 = q_0^2 - q_0 \frac{\mu}{a} = q_0(q_0 - \frac{\mu}{a})$. Pour assurer une propagation de l'onde, il faut que κ soit un réel car un complexe ou un imaginaire pur provoquerait dans la solution une exponentielle réelle qui amortirait l'onde. Si κ est réel, alors $\kappa^2 > 0$. Il faut donc que $q_0 = n_0 \frac{\omega}{c} > \frac{\mu}{a}$. On a donc une condition $\omega > \omega_c$ avec comme pulsation limite : $\omega_c = \frac{\mu c}{n_0 a}$. On a $\frac{\omega_c}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_c}$, on en déduit que $\mu = \frac{2\pi}{\lambda_c} a n_0 = 157,1$. On doit donc avoir $2 \leq \mu < 17,45$. Comme $\mu = 2N + 2$, μ prend les valeurs entières suivantes : $\mu \in \{2; 4; 6; 8; \dots; 154; 156\}$.

6. On peut réécrire la relation de dispersion selon : $\kappa^2 = \frac{n_0^2 \omega^2}{c^2} - \frac{n_0 \omega \mu}{ac}$. Il est plus pratique de modifier un peu cette forme : $\kappa^2 = \frac{n_0^2 \omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\mu c}{a n_0 \omega}\right)$. On peut prendre la racine puisque l'on suppose implicitement que $\omega > \omega_c$. Pour une propagation dans le sens z croissant, on a : $\kappa = \frac{n_0}{c} \omega \sqrt{1 - \frac{\mu c}{a n_0 \omega}}$. On peut donc en déduire l'expression de la vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{c}{n_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu c}{a n_0 \omega}}}$. On constate bien que l'on a : $v_\varphi > \frac{c}{n_0}$. On a $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, cela nous permet d'évaluer le terme $\frac{\mu c}{a n_0 \omega} = \frac{\mu \lambda}{2\pi n_0 a}$. On a $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m et $2\pi n_0 a = 9,4 \times 10^{-5}$. Comme μ est de l'ordre de quelques unités, le rapport $\frac{\mu c}{a n_0 \omega}$ est rapidement de l'ordre de $1/100$. On peut donc effectuer un développement limité de la vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{c}{n_0} \left(1 + \frac{\mu c}{2 n_0 a \omega}\right)$. La vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière dans le milieu mais cela est sans conséquence puisqu'aucune onde réelle ne correspond à une seule onde plane monochromatique. Pour le calcul de la vitesse de groupe, il est sans doute préférable de différentier au niveau de la relation de dispersion que l'on écrit sous la forme : $\frac{\mu}{a} = \frac{n_0}{c} \omega - \frac{c}{n_0} \kappa^2$. Le rapport μ/a est fixé, donc en différentiant, on obtient : $0 = \frac{n_0}{c} d\omega - \frac{c}{n_0} \left[\frac{2\kappa d\kappa \omega - \kappa^2 d\omega}{\omega^2} \right]$. En rassemblant les termes facteurs de $d\omega$ et de $d\kappa$, on arrive à l'expression $\left(\frac{n_0^2}{c^2} + \frac{\kappa^2}{\omega^2}\right) d\omega = \frac{2\kappa}{\omega} d\kappa$. On peut calculer la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{2\kappa}{\omega} \frac{1}{\frac{n_0^2}{c^2} + \frac{\kappa^2}{\omega^2}}$. On peut, en utilisant l'expression de la vitesse de phase, arriver à l'expression : $v_g = \frac{c}{n_0} \frac{2\sqrt{1 - \frac{\mu c}{a n_0 \omega}}}{1 + \frac{\kappa^2 c^2}{n_0^2 \omega^2}}$. On réinjecte l'expression due à la relation de dispersion et on

arrive à l'expression de la vitesse de groupe : $v_g = \frac{c}{n_0} \frac{\sqrt{1 - \frac{\mu c}{a n_0 \omega}}}{1 - \frac{\mu c}{2 n_0 a \omega}}$. On constate que cette expression ne permet pas de conclure que la vitesse de groupe est indépendante de μ , c'est-à-dire du mode de propagation. Toutefois, si l'on effectue un développement limité à l'ordre 1 comme pour la vitesse de phase, on obtient $\sqrt{1 - \frac{\mu c}{a n_0 \omega}} = 1 - \frac{\mu c}{2 n_0 a \omega}$. Ce terme permet de simplifier alors le numérateur et d'écrire que $v_g = \frac{c}{n_0}$. Cela est intéressant car au même niveau d'approximation, on conserve une vitesse de phase qui dépend du mode de propagation et de la fréquence alors que pour la vitesse de groupe, on a une propagation du paquet d'ondes à une vitesse identique quels que soient la fréquence et le mode de propagation. On constate d'une façon générale, ici, que $v_g \leq \frac{c}{n_0}$, c'est-à-dire que la vitesse du paquet d'ondes - qui correspond à la propagation de l'énergie et de l'information - est bien inférieure à la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu.

7. Nous allons discuter de l'approximation qui a consisté à négliger le terme de dispersion spatiale. Il n'est pas indispensable de passer en coordonnées polaires et d'effectuer les calculs avec l'opérateur gradient. En effet, la longueur caractéristique d'évolution spatiale de l'indice $n(x, y)$ est a . Dans ces conditions, $\vec{grad} \ln(n^2)$ est en $\frac{1}{a}$. Ensuite, on est concerné par le gradient de $\frac{E}{a}$, ce qui ramène encore une fois le facteur $\frac{1}{a}$. On peut donc dire que le terme $\vec{grad} \left[\vec{E} \cdot \vec{grad} \ln(n^2) \right]$ s'identifie à $\frac{\vec{E}}{a^2}$. Le terme $n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \simeq n_0^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \vec{E}$. Comparer les deux termes revient à comparer $\frac{1}{a^2}$ et $n_0^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$. Cette comparaison conduit à établir une relation d'ordre forte entre λ et $2\pi n_0 a$. D'après les hypothèses de l'énoncé, on a $\lambda \ll 2\pi n_0 a$. Il était donc légitime de négliger le terme de dispersion spatiale. Les valeurs numériques conduisent à $\frac{2\pi n_0 a}{\lambda} = 157$, ce qui montre que l'on pouvait effectivement négliger le terme de dispersion spatiale. Si l'on veut ef-

fectuer un calcul précis, c'est plus laborieux. On passe en coordonnées polaires : $n(r)^2 = n_0^2(1 - \frac{r^2}{a^2})$ et $\vec{E} = \vec{e}_y \sqrt{\frac{q_0}{\pi a}} \exp -\frac{n_0 k_0}{2a} r^2$. On a $\ln n^2 = \ln n_0^2 + \ln(1 - \frac{r^2}{a^2})$. Par conséquent : $\vec{r} \text{grad} \ln n^2 = -\frac{2r}{a^2 - r^2} \vec{e}_r$. On peut donc calculer $E_y \vec{e}_y \cdot \vec{r} \text{grad} \ln n^2 = -\frac{2r E_y}{a^2 - r^2} \sin \theta = F(r, \theta)$ avec l'expression de E_y en fonction de r établie avant. On en déduit que $\vec{r} \text{grad} [\vec{E} \cdot \vec{r} \text{grad} (n^2)] = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$. Les calculs donnent $\vec{r} \text{grad} [\vec{E} \cdot \vec{r} \text{grad} (n^2)] = -\frac{2E}{a^2 - r^2} \left[\left(\frac{a^2 + r^2}{a^2 - r^2} - \frac{2\pi n_0 r^2}{a\lambda} \right) \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta \right]$. L'autre terme est $n_0^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} E [\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta]$. Dans cette étude, on a $r \ll a$. On peut donc aisément dire que $\frac{a^2 + r^2}{a^2 - r^2} - \frac{2\pi n_0 r^2}{a\lambda} \simeq 1$. De la même façon, on peut proposer $\frac{2E}{a^2 - r^2} \simeq \frac{2E}{a^2}$. Comparer les deux termes revient à comparer $\frac{\sqrt{2}}{a} \ll \frac{2\pi n_0}{\lambda}$. C'est quasiment la même comparaison que la précédente à un facteur $\sqrt{2}$ près.

1.2 Mode TE dans un milieu stratifié

8. L'équation de MAXWELL-FARADAY est $\vec{r} \text{ot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}$. Comme le champ électrique dépend de x et de z , le rotationnel s'écrit $\vec{r} \text{ot} \vec{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{e}_z$. Ceci suffit à prouver que le champ magnétique est contenu dans le plan (xz) .

9. On commence par calculer la dérivée première $\frac{dE}{dz} = \frac{dA}{dz} \exp ik_0 S + ik_0 A \frac{dS}{dz} \exp ik_0 S$. On passe à la dérivée seconde : $\frac{d^2 E}{dz^2} = \exp ik_0 S \left[\frac{d^2 A}{dz^2} + 2ik_0 \frac{dA}{dz} \frac{dS}{dz} + ik_0 A \frac{d^2 S}{dz^2} - k_0^2 A \left(\frac{dS}{dz} \right)^2 \right]$. On écrit donc que $\frac{d^2 E}{dz^2} + (n^2 k_0^2 - \kappa^2) E =$

0. Cela génère l'équation : $k_0^2 \left[\left(n^2(z) - \left(\frac{dS}{dz} \right)^2 \right) A(z) \right] + ik_0 \left[2 \frac{dA}{dz} \frac{dS}{dz} + \frac{d^2 S}{dz^2} A(z) \right] + \left[\frac{d^2 A}{dz^2} - \kappa^2 A(z) \right] = 0$.

10. Le domaine optique est celui du visible pour des longueurs d'onde $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m et par conséquent $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \simeq 10^7 \text{ m}^{-1}$. Si k_0 est grand alors $\frac{1}{k_0}$, qui est une longueur, est petite. La longueur d'onde est donc petite devant une longueur caractéristique du système. Comme il s'agit de l'évolution spatiale de l'indice de réfraction, on peut noter ℓ_c cette longueur caractéristique définie par $\frac{dn}{dz} \simeq \frac{n}{\ell_c}$. On peut donc écrire que $\lambda \ll \ell_c$, ce qui revient à écrire que $k_0 \ell_c \gg 1$. Si on annule le terme de plus haut degré du polynôme précédent en k_0 , on obtient $n(z) = \frac{dS}{dz}$ puisque $n(z) > 0$ dans le cas où $S(z)$ est une fonction croissante de z . Dans l'hypothèse où $S(z)$ est une fonction décroissante de z alors $n(z) = -\frac{dS}{dz}$.

11. Si on a $n(z) = n_0$ alors $\frac{dS}{dz} = n_0$ et, par conséquent, $S(z) = n_0 z$ si l'on choisit correctement les conditions aux limites pour annuler la constante d'intégration. On déduit de cette relation le fait que $\frac{d^2 S}{dz^2} = 0$. Or, d'après l'annulation du terme en ik_0 dans le polynôme, on obtient $2 \frac{dA}{dz} \frac{dS}{dz} = 2n_0 \frac{dA}{dz} = 0$. $A(z)$ est donc une constante que l'on va noter A_0 . La solution pour le champ électrique est donc : $E(z) = A_0 \exp in_0 k_0 z$. On peut écrire l'expression complète du champ électrique : $\vec{E} = \vec{e}_y A_0 \exp i(\kappa x + n_0 k_0 z - \omega t)$. On retrouve bien la solution du modèle onde plane progressive sinusoïdale.

12. Dans cette approximation, on suppose que l'influence de z est beaucoup plus importante sur la phase que sur l'amplitude surtout sur un domaine rapporté à quelques longueurs d'onde. On écrit donc que $E_y = A_0 \exp i(\kappa(x_p + \chi) + n_p k_0(z_p + \xi) - \omega t) = [A_0 \exp i(\kappa x_p + n_p k_0 z_p)] \exp i(\kappa \chi + n_p k_0 \xi - \omega t)$. La fonction proposée par l'énoncé est : $X_0(x_p, z_p) = A_0 \exp i(\kappa x_p + n_p k_0 z_p)$.

13. Comme le modèle - même s'il n'est valable que localement - est de type onde plane, on peut utiliser la relation de structure qui découle de $\vec{r} \text{ot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}$ pour obtenir : $\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{K} \wedge \vec{E})$ où $\vec{K}$ est le vecteur d'onde de la propagation avec $\vec{K} = \kappa \vec{e}_x + n_p k_0 \vec{e}_z$.

1.3 L'approximation semi classique en mécanique quantique ; une analogie

14. À partir de l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps, on peut écrire que la fonction d'onde obéit à l'équation différentielle du second ordre suivante $\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{p(x)^2}{\hbar^2} \psi = 0$. On teste une forme de solution $\psi(x) = \exp \frac{i}{\hbar} \sigma_0(x)$. La situation est très voisine de ce que l'on vient de faire avant : $\frac{d\psi}{dx} = \frac{i}{\hbar} \frac{d\sigma_0}{dx} \exp \frac{i}{\hbar} \sigma_0(x)$.

On passe maintenant à la dérivée seconde : $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left[-\frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{d\sigma_0}{dx} \right)^2 + \frac{i}{\hbar} \frac{d^2\sigma_0}{dx^2} \right] \exp \frac{i}{\hbar} \sigma_0(x)$. En utilisant ce calcul dans l'équation de SCHRÖDINGER, on aboutit à l'équation suivante : $\left(p(x)^2 - \left(\frac{d\sigma_0}{dx} \right)^2 \right) \frac{1}{\hbar^2} + \frac{i}{\hbar} \frac{d^2\sigma_0(x)}{dx^2} = 0$. Ce complexe est nul si ses parties réelle et imaginaire sont nulles. On peut donc écrire que $\frac{d^2\sigma_0(x)}{dx^2} = 0$ et $p(x)^2 = \left(\frac{d\sigma_0}{dx} \right)^2$. On constate que $\frac{d\sigma_0}{dx} = \text{Cte}$. La quantité de mouvement est donc constante : $p(x) = p_0$ pour la solution d'ordre 0. On en déduit par intégration que $\sigma_0(x) = \pm p_0 x$. La fonction d'onde est donc bien de la forme : $\psi(x) \propto \exp \pm i \frac{p_0}{\hbar} x$. On retrouve le modèle onde plane.

15. On procède par la méthode de la variation de la constante à partir de la forme de solution exponentielle de la primitive de $\pm i \frac{p(x)}{\hbar}$. Ceci est la conséquence du fait que si l'on considère la fonction $\exp v(x)$, sa dérivée est $\frac{dv}{dx} \exp v(x)$. On va travailler pour la solution en $\frac{p(x)}{\hbar}$ qui correspond à l'amplitude C_+ comme noté dans l'énoncé. On pose donc $\psi(x) = A(x) \exp \frac{i}{\hbar} \int^x p(u) du$. On procède au calcul de la dérivée première : $\frac{d\psi}{dx} = \left[\frac{dA}{dx} + \frac{i}{\hbar} p(x) A(x) \right] \exp \frac{i}{\hbar} \int^x p(u) du$. On passe avec attention au calcul de la dérivée seconde : $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left[\left(\frac{d^2A}{dx^2} - \frac{p(x)^2}{\hbar^2} A(x) \right) + \frac{i}{\hbar} \left(2p(x) \frac{dA}{dx} + A(x) \frac{dp}{dx} \right) \right] \exp \frac{i}{\hbar} \int^x p(u) du$. Or, d'après l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps, on a $\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{p(x)^2}{\hbar^2} \psi(x)$. On en déduit l'équation complexe suivante : $\frac{d^2A}{dx^2} + \frac{i}{\hbar} \left(2p(x) \frac{dA}{dx} + A(x) \frac{dp}{dx} \right) = 0$. On s'intéresse à la solution d'ordre 1. On va négliger le terme d'ordre 2 à savoir $\frac{d^2A}{dx^2}$. On obtient alors l'équation différentielle suivante : $2p(x) \frac{dA}{dx} + A(x) \frac{dp}{dx} = 0$. On peut diviser par $A(x)p(x)$. Cela donne : $2 \frac{dA}{A} + \frac{dp}{p} = 0$. En intégrant - en passant par les logarithmes -, on arrive à $A^2(x)p(x) = C_+^2$. On en déduit que $A(x) = \frac{C_+}{\sqrt{|p(x)|}}$. Le calcul de la solution d'ordre 1 correspond bien à la forme proposée à savoir $\psi(x) = \frac{C_+}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \frac{i}{\hbar} \int^x p(u) du + \frac{C_-}{\sqrt{|p(x)|}} \exp -\frac{i}{\hbar} \int^x p(u) du$ puisque la démarche de calcul pour l'autre racine $-\frac{ip(x)}{\hbar}$ est similaire.

16. Un oscillateur harmonique obéit à une équation du type $\ddot{x}(t) = -L \exp i\omega_0 t$. Il explore un domaine de longueur $2L$ entre $-L$ et L dans le domaine réel. Sa quantité de mouvement est $p = im\omega_0 L \exp i\omega_0 t$. On voit bien que sa quantité de mouvement est proportionnelle à L , son module est $|p| = m\omega_0 L$. La densité linéique de probabilité est $\frac{dp}{dx} = |\psi|^2$, elle sera en $\frac{1}{|p(x)|}$. C'est bien $\boxed{\text{proportionnel à } 1/L}$. On a donc aussi cette situation pour l'oscillateur harmonique 1D puisque l'extension du domaine qui est proportionnelle à L va faire que la densité de probabilité sera bien en $1/L$ et donc aussi en $1/|p(x)|$.

2 Simulateur de conduite de véhicule à deux roues

2.1 Modèle géométrique et cinématique inverses de la plateforme du simulateur

17. Pour le roulis, on a $\rho_3 = 0$ et une rotation de φ . On a une course de $\boxed{2\ell \sin \varphi_{\max} = 0,4 \sin 72^\circ = 0,38 \text{ m}}$. Pour le lacet, il faut jouer sur ψ , la course est alors $\boxed{2\ell_3 \sin \psi_{\max} = 0,38 \text{ m}}$. Pour le tangage, on a encore une course $2\ell_3 \sin \theta = 0,38 \text{ m}$, ceci est bien compatible avec ce qui a été trouvé avant pour la course possible sur les véris.

18. Par la relation de CHASLES, on obtient $\overrightarrow{B_i P_i} = \overrightarrow{B_i O} + \overrightarrow{OO_m} + \overrightarrow{O_m P_i}$. Cette relation vectorielle suffit à elle-même pour mettre en relation les vecteurs positions mais elle n'est réellement utilisable que si tous les vecteurs sont exprimés dans la même base comme $\mathcal{R}$ par exemple. Il faut donc faire un changement de base pour le vecteur $\overrightarrow{O_m P_i}$. Pour matérialiser dans l'écriture le changement de base, on écrit le vecteur selon : $\tilde{\mathcal{R}} \overrightarrow{O_m P_i} \Big|_{\mathcal{R}_m}$. La relation vectorielle est donc : $\overrightarrow{B_i P_i} = \overrightarrow{B_i O} + \overrightarrow{OO_m} + \tilde{\mathcal{R}} \overrightarrow{O_m P_i} \Big|_{\mathcal{R}_m}$. On a $\overrightarrow{O_m P_i} \Big|_{\mathcal{R}_m} = \pm \ell \vec{j}_m$. Le changement de base passe par le calcul : $\tilde{\mathcal{R}} \overrightarrow{O_m P_i} \Big|_{\mathcal{R}_m} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \ell \\ 0 \end{pmatrix} = \pm r_{12} \ell \vec{i} \pm r_{22} \ell \vec{j} \pm r_{32} \ell \vec{k}$.

On peut donc développer l'expression du vecteur dans la base de $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{B_i P_i} = (x_m \pm r_{12}\ell)\vec{i} + (\mp d \pm r_{22}\ell)\vec{j} + (z_m \pm r_{32}\ell)\vec{k}$. Comme le vecteur n'a pas de composante sur $\vec{j}$, on en déduit bien la relation demandée par l'énoncé : $d = r_{22}\ell$. On a $\overrightarrow{B_i P_i} = \frac{d\overrightarrow{B_i P_i}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\rho_i}{dt}\vec{u}_i + \rho_i \frac{d\vec{u}_i}{dt}$. En effectuant le produit scalaire par le vecteur unitaire $\vec{u}_i$, on arrive à $\overrightarrow{B_i P_i} \cdot \vec{u}_i = \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \vec{u}_i \cdot \frac{d\vec{u}_i}{dt}$. Les opérations de dérivation précédentes sont envisagées dans $\mathcal{R}$. De plus $\vec{u}_i \cdot \frac{d\vec{u}_i}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{u}_i^2}{dt} = 0$ car le vecteur est unitaire ce qui signifie que $\vec{u}_i^2 = 1$. On a donc bien la relation : $\dot{\rho}_i = \overrightarrow{B_i P_i} \cdot \vec{u}_i$.

19. Il y a une erreur d'orientation de l'angle θ sur le schéma proposé par l'énoncé. On conservera l'expression de la vitesse de rotation $\vec{\Omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{j}_1 + \dot{\phi}\vec{i}_2$. Pour comprendre l'expression utilisant la matrice de changement de base, il faut exprimer les vecteurs unitaire dans la base de $\mathcal{R}$. On a $\vec{j}_1 = \cos\psi\vec{j} - \sin\psi\vec{i}$. Pour le vecteur unitaire $\vec{i}_2$, il faut procéder en deux temps. Tout d'abord, on a $\vec{i}_2 = \cos\theta\vec{i}_1 - \sin\theta\vec{k}$, c'est dans cette expression que l'on a défini θ avec une orientation dans le sens contraire de celui du schéma proposé par l'énoncé, cela provoque le $-\sin\theta$ dans la projection sur $\vec{k}$. Ensuite, on écrit $\vec{i}_1 = \cos\psi\vec{i} + \sin\psi\vec{j}$. Avec ces projections, on a $\vec{\Omega} = (\dot{\phi}\cos\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\vec{i} + (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\cos\theta\sin\psi)\vec{j} + (\dot{\psi} - \dot{\phi}\sin\theta)\vec{k}$. On

peut donc écrire ce résultat sous forme matricielle : $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\psi & \cos\theta\cos\psi \\ 0 & \cos\psi & \cos\theta\sin\psi \\ 1 & 0 & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$.

20. On repart de la relation vectorielle $\overrightarrow{B_i P_i} = \overrightarrow{B_i O} + \overrightarrow{OO_m} + \overrightarrow{O_m P_i}$. On dérive dans $\mathcal{R}$. La dérivation par rapport au temps ne pose pas de problème sauf pour le vecteur $\overrightarrow{O_m P_i}$ puisqu'il est exprimé dans la base du repère mobile $\mathcal{R}_m$. Pour ce vecteur, on utilise la règle de dérivation : $\frac{d\overrightarrow{O_m P_i}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\overrightarrow{O_m P_i}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_m} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_m P_i}$. La construction du repère $\mathcal{R}_m$ est telle que le vecteur $\overrightarrow{O_m P_i}$ est invariable dans ce repère, on a donc $\frac{d\overrightarrow{O_m P_i}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_m} =$

$\vec{0}$. La relation demandée est donc : $\overrightarrow{B_i P_i} = \overrightarrow{B_i O} + \overrightarrow{OO_m} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\mathcal{R}} \overrightarrow{O_m P_i}\Big|_{\mathcal{R}_m}$ si on veut continuer de projeter tous les vecteurs dans la base de $\mathcal{R}$.

21. On effectue le produit scalaire de la relation précédente avec $\vec{j}$ tout en travaillant pour les points B_3 et P_3 . On a donc $\dot{\rho}_3 = \overrightarrow{B_3 P_3} \cdot \vec{j} = \overrightarrow{B_3 O} \cdot \vec{j} + \overrightarrow{OO_m} \cdot \vec{j} + \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{\mathcal{R}} \overrightarrow{O_m P_3}\Big|_{\mathcal{R}_m} \right) \cdot \vec{j}$. On a $\overrightarrow{B_3 O} \cdot \vec{j} = 0$ car les vecteurs sont perpendiculaires, c'est la même chose pour $\overrightarrow{OO_m} \cdot \vec{j} = 0$. Enfin, pour le troisième terme, on peut utiliser le fait que c'est un produit mixte qui autorise toute permutation circulaire des vecteurs. On a donc $\vec{j} \cdot \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{\mathcal{R}} \overrightarrow{O_m P_3}\Big|_{\mathcal{R}_m} \right) = \vec{\Omega} \cdot \left(\vec{\mathcal{R}} \overrightarrow{O_m P_3}\Big|_{\mathcal{R}_m} \wedge \vec{j} \right)$. Avec la commutativité du produit scalaire que nous avons déjà utilisée, on arrive à l'expression demandée : $\dot{\rho}_3 = \left(\vec{\mathcal{R}} \overrightarrow{O_m P_3}\Big|_{\mathcal{R}_m} \wedge \vec{j} \right) \cdot \vec{\Omega}$.

22. L'expression demandée n'est qu'un jeu d'écriture afin de constituer une matrice ligne pour définir les trois vitesses $\dot{\rho}_i$. La transposition consiste à faire passer d'un vecteur colonne à un vecteur ligne par exemple. Le produit scalaire par le torseur cinématique est évident pour obtenir les relations cinématiques

établies dans les questions précédentes. On a donc bien : $[\dot{\rho}_1, \dot{\rho}_2, \dot{\rho}_3] = \begin{pmatrix} [\vec{A}_1]^T & \vec{u}_1^T \\ [\vec{A}_2]^T & \vec{u}_2^T \\ [\vec{A}_3]^T & \vec{j}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\Omega} \\ \overrightarrow{OO_m} \end{pmatrix}$.

2.2 Introduction à la perception

2.2.1 Modélisation des capteurs ; algorithme du pire cas

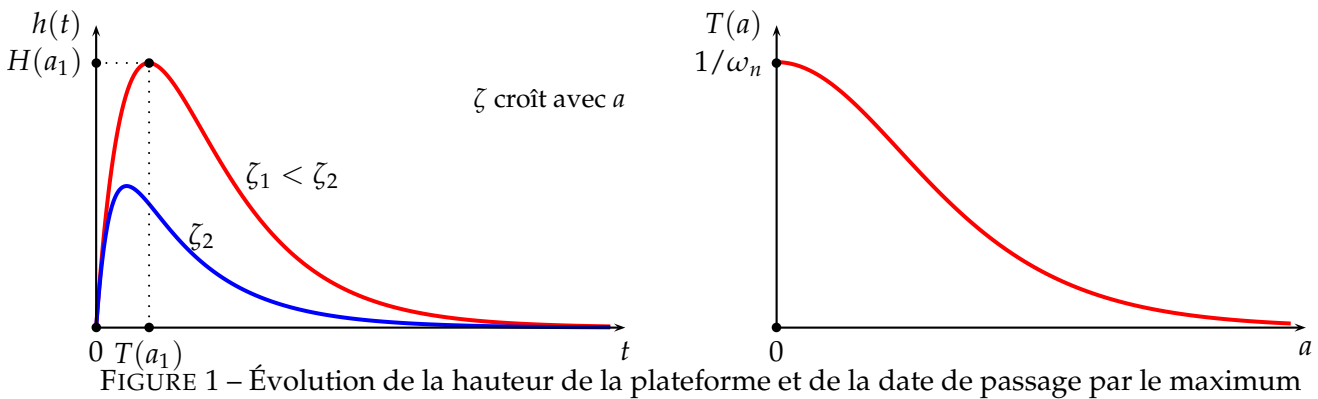
23. À partir de la vitesse angulaire, on effectue un filtrage, une sommation puis il faut intégrer pour obtenir l'angle dont il faut tourner et donc la position angulaire désirée. À partir de l'accélération linéaire, on filtre et, ensuite, il faut une double intégration pour obtenir la position linéaire désirée afin de déplacer le centre d'inertie de la plateforme correctement.

24. Le filtre passe-haut utilisé est de la forme $FTP_{H1} = \frac{Kp^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$ pour pouvoir obtenir la fonction de transfert proposée puisque, derrière le filtre, on trouve une double intégration qui impose $\frac{1}{p^2}$. Pour obtenir la réponse recherchée de $\frac{K}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$, il faut être en régime permanent, ce qui correspond à $p = 0$ si on aborde les choses avec $p = j\omega$ comme fréquemment en physique. Si on voit les choses par l'approche des sciences industrielles, on parlera plutôt du théorème de la valeur finale qui dit que $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{P}(p)$. Rappelons toutefois qu'un échelon correspond à $\frac{1}{p}$ dans le domaine de LAPLACE. Quoi qu'il en soit, on obtient aisément $P_\infty = \frac{KA_m}{\omega_n^2}$. On ne peut pas utiliser un tel filtre car à chaque échelon d'accélération, on ne revient pas à la position neutre. Si on envisage un filtre passe-haut du premier ordre pour cette réalisation, on aura $FTP_{H1}' = \frac{p}{p + \omega_n} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p(p + \omega_n)}$. On voit tout de suite qu'en régime permanent ($p = j\omega = 0$), on obtient une réponse qui va diverger pour la position désirée. En conclusion, on voit que les filtres passe-haut du premier et du second ordre ne conviennent pas. Comme on le voit par la suite, c'est un filtre du troisième ordre qui est retenu.

25. Si le déplacement linéaire maximal disponible est P_m , alors il faut que P_∞ soit inférieur à P_m . Il faut donc choisir ω_n de telle sorte que : $\omega_n \geq \sqrt{\frac{KA_m}{P_m}}$.

26. D'après les graphiques proposés, on voit que plus ω_f est grande, plus le retour à la position neutre est rapide. Comme nous l'avons vu au départ, le déplacement du vérin est d'environ 0,19 m. Si l'on examine le cas $\omega_f = 0$ qui correspond à l'utilisation d'un filtre d'ordre 2 comme nous en avons discuté avant, on voit sur la courbe en pointillés que le déplacement est de $2 \times 0,12 = 0,24$ m. Cela n'est pas compatible avec la valeur réelle. Par contre, pour toutes les valeurs de $\omega_f \neq 0$ qui correspondent à un filtre du troisième ordre, on constate que le déplacement maximal est inférieur à 0,09 m ce qui est cette fois compatible avec les courses des vérins vues avant.

27. p est en s^{-1} et donc K qui s'exprime en $h(p_1 - p_2)$ est donc en $m \cdot s^{-1}$. K est donc une vitesse. On dérive l'expression de $h(t)$, on obtient : $\frac{dh}{dt} = \frac{K}{p_1 - p_2} [p_1 \exp p_1 t - p_2 \exp p_2 t]$. Cette dérivée s'annule lorsque $p_1 \exp p_1 T = p_2 \exp p_2 T$. On en déduit l'expression de la date de passage par le maximum : $T = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_2}{p_1}$. En posant $\zeta = \cosh a$, on se place automatiquement en régime apériodique surcritique ou à la limite en régime critique puisque $\cosh x \geq 1 \forall x$. Rappelons d'ailleurs à cette occasion que le régime critique est obtenu pour $\zeta = 1$ et que c'est ce régime qui assure le retour le plus rapide à la position neutre. L'équation caractéristique est $p^2 + 2\cosh a \omega_n p + \omega_n^2 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 4\omega_n^2(\cosh^2 a - 1) = 4\omega_n^2 \sinh^2 a$. Les racines ou zéros du polynôme sont donc : $p_1 = -\omega_n(\cosh a - \sinh a)$ et $p_2 = -\omega_n(\cosh a + \sinh a)$. À partir de ces calculs, on peut obtenir $p_1 - p_2 = 2\omega_n \sinh a$ et $\frac{p_2}{p_1} = \frac{\cosh a + \sinh a}{\cosh a - \sinh a} = \exp 2a$. On peut en déduire l'expression de la date de passage par le maximum en fonction de a qui est une variable adimensionnée représentative du coefficient d'amortissement : $T(a) = \frac{1}{\omega_n} \frac{a}{\sinh a}$. Les graphiques de la figure 1 présentent l'évolution de la hauteur $h(t)$ en fonction du temps et de la date $T(a)$ en fonction de a , c'est-à-dire de l'amortissement comme nous venons de le rappeler.



À la lecture des graphiques, on peut voir que la date de passage par le maximum diminue lorsque a augmente, donc lorsque l'amortissement augmente puisque $\zeta = \cosh a$ - on peut faire remarquer que, dans le

cas d'un ordre 2, $a = 0$ correspond à $\zeta = 1$, c'est-à-dire au régime critique. On constate aussi sur la figure 2 que la hauteur maximale obtenue diminue aussi lorsque l'amortissement augmente. Ceci est cohérent avec les deux cas de représentation de $h(t)$ lorsque l'amortissement augmente comme on le voit sur le graphique de la figure 1. Rappelons que les réponses envisagées ici sont celles à une impulsion d'accélération.

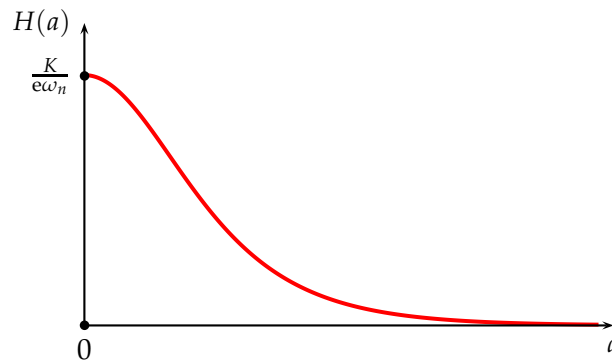


FIGURE 2 – Évolution de la hauteur maximale de la plateforme en fonction de l'amortissement

28. Sans la fonction canal tilt, on revient sur une position neutre. Il faut cet angle de décalage pour simuler l'accélération due au champ de pesanteur. On peut faire observer que le filtrage passe-bas sur l'accélération linéaire fait ressortir l'accélération constante due au champ de pesanteur qui, avec le tangage, est $g \sin \theta \simeq g\theta$ puisque l'angle maximal de tangage est de 10° . Si l'on traite le signal par une opération de division par g comme indiqué sur le schéma bloc, on retrouve donc θ en sortie. Ce n'est donc pas un limiteur de vitesse qu'il faut mettre mais plutôt un limiteur d'angle qui évitera que les vérins aillent en butée. Par conséquent, il faut placer le sommateur après l'intégrateur $1/p$ agissant après *FPH2* et non pas entre les deux. Ainsi, en sortie correspondant à la rotation désirée, on additionne deux angles dont l'angle correspondant à l'effet de la pesanteur. En conclusion, la fonction tilt est nécessaire mais pas à l'endroit proposé.