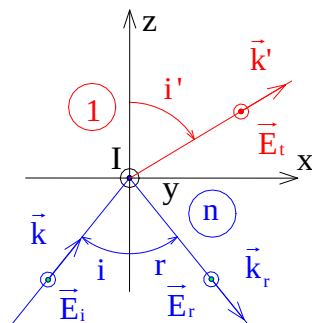


I – Onde évanescente

1) Réflexion totale si $i > i_l$ (angle i non orienté) avec $\sin i_l = \frac{1}{n}$ (question de cours de PCSI).



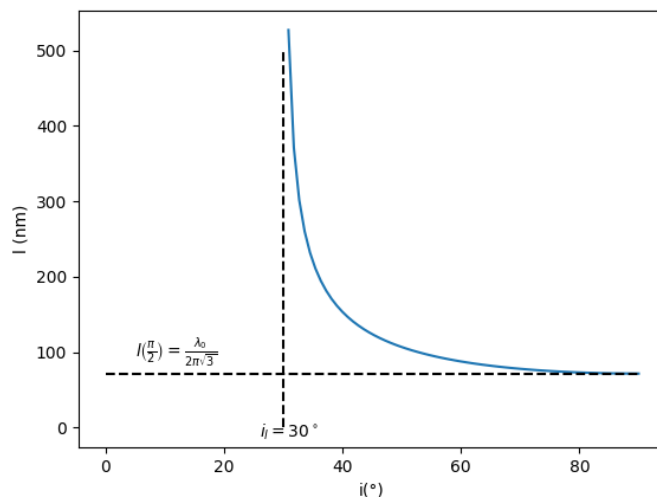
Si $n = 2$, on aboutit à $i > \frac{\pi}{6}$ rad.

2) L'énoncé dit que le champ électromagnétique est continu à l'interface (l. 30–31); nous allons l'admettre mais c'est aller un peu vite en besogne : si c'est, dans le cadre du dispositif de la figure 1, correct pour le champ magnétique $\vec{B}$, c'est moins évident en ce qui concerne le champ électrique $\vec{E}$: ce n'est valable que pour les composantes tangentielles de ce champ, et donc la continuité –ou non– du champ électrique dépendra de la polarisation de l'onde incidente. En tout état de cause, ces considérations sont clairement hors-programme.

Posons $\vec{k} \begin{vmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{vmatrix}$ (vecteur d'onde incident), $\vec{k}' \begin{vmatrix} k'_x \\ 0 \\ k'_z \end{vmatrix}$ (vecteur d'onde transmis); on posera également $\vec{k}_r \begin{vmatrix} k_x \\ 0 \\ -k_z \end{vmatrix}$ (vecteur d'onde réfléchi, en accord avec la loi de Descartes de la réflexion).

La continuité d'une composante (tangentielle) de $\vec{E}$ à l'interface s'écrira alors par une relation de la forme $a_i e^{-ik_x x} + a_r e^{-ik_x x} = a_t e^{-ik'_x x} \quad \forall x$. La solution $a_i + a_r = a_t = 0$ pouvant en fait être exclue si l'on considère par ailleurs la continuité d'une composante du champ magnétique $\vec{B}$, la seule possibilité pour que cette équation soit vérifiée pour tout x est bien que $k_x = k'_x$ (et, accessoirement, on a $a_i + a_r = a_t$).

3) La longueur d'onde $\lambda = 780$ nm est vraisemblablement la longueur d'onde *dans le vide*. On notera par la suite $\lambda_0 = 780$ nm et $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$. En notant k et k' les modules respectifs de $\vec{k}$ et $\vec{k}'$, on a $k^2 = n^2 k'^2$ (et $k' = \frac{2\pi}{\lambda_0}$). Soit $k^2 = n^2 (k'_x{}^2 + k'_z{}^2)$. Or $k_x = k'_x = k \sin i$. D'où $k'_z{}^2 = k^2 \left(\frac{1}{n^2} - \sin^2 i \right)$.



4) Il y aura réflexion totale si $k_z'^2 < 0$: l'onde transmise sera alors évanescence. On retrouve bien la condition de réflexion totale $\sin i > \frac{1}{n}$. Lorsqu'elle est vérifiée, la distance caractéristique de décroissance de l'onde évanescence est $l = \frac{1}{|k_z'|} = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2 i - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 i_l}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 i_l}} = \frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{(n \sin i)^2 - 1}}$, où l'on a noté λ_0 la longueur d'onde dans le vide du laser.

5) Pour des incidences "pas trop proches de l'angle limite", on peut considérer que $l \gtrsim \frac{\lambda}{2\pi \sin i}$, qui est bien de l'ordre de $\frac{\lambda}{2\pi}$ (l'angle i n'est pas proche de 0).

II – Rebond des atomes

6) On étudie bien sûr le régime sinusoïdal forcé. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à un électron de l'atome (s'agit-il d'un atome d'hydrogène?), s'écrit, avec la modélisation donnée par l'énoncé : $m\vec{a} = -m\omega_0^2\vec{r} - e\vec{E}_0 \cos(\omega t)$ (en fait, on peut montrer que, lorsque les conditions sont remplies pour que "le champ électrique $\vec{E}$ soit uniforme à l'échelle de l'atome", alors l'action exercée par le champ magnétique $\vec{B}$ inévitablement présent est négligeable par rapport à l'action exercée par le champ électrique $\vec{E}$; mais cela est-il demandé? On a par ailleurs bien sûr négligé le poids, mais aussi toute force dissipative qui pourrait modéliser l'émission de rayonnement par l'atome.)

Il vient alors immédiatement $\vec{r}(t) = -\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\vec{E}_0 \cos(\omega t)$ (comme aucune force dissipative n'est prise en compte, il n'est même pas nécessaire de passer en complexes).

D'où $\vec{p} = -e\vec{r} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\vec{E}_0 \cos(\omega t)$ et finalement $\alpha(\omega) = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$.

Au passage, on peut remarquer que notre résultat est en bon accord avec l'article (l. 236–240) : au voisinage de la résonance atomique (ω proche de ω_0), la polarisabilité α peut en effet atteindre des valeurs importantes, et elle devient bien négative pour $\omega > \omega_0$.

Unité de α : le m^3 (peut s'obtenir par exemple à partir de la relation de définition de la polarisabilité $\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$, en notant que $1\text{C} = 1\text{F}\cdot 1\text{V}$).

7) La résultante des forces subies par le dipôle induit vaut $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{E}$. Le programme indique que cette expression, ou celle de l'énergie potentielle, devrait être fournie.

Et donc $\vec{F} = \varepsilon_0\alpha \left(\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{E} = \varepsilon_0\alpha \left(\overrightarrow{\text{grad}} \frac{E^2}{2} + \text{rot} \vec{E} \wedge \vec{E} \right)$.

Le terme en $\vec{\nabla} \vec{E} \wedge \vec{E}$ est vraisemblablement nul en valeur moyenne temporelle et donc la force vaut, en moyenne temporelle, $\langle \vec{F} \rangle = \varepsilon_0 \alpha \overrightarrow{\text{grad}} \langle \frac{E^2}{2} \rangle$: elle dérive de l'énergie potentielle moyenne $-\frac{1}{2} \alpha \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$.

Que représente exactement $|E_0|^2$? Pourquoi un module? (aucun intérêt avec le $\vec{E}_0$ de la ligne 228) $\vec{E}_0$ est-il un vecteur réel? complexe? quelle est la polarisation de l'onde?

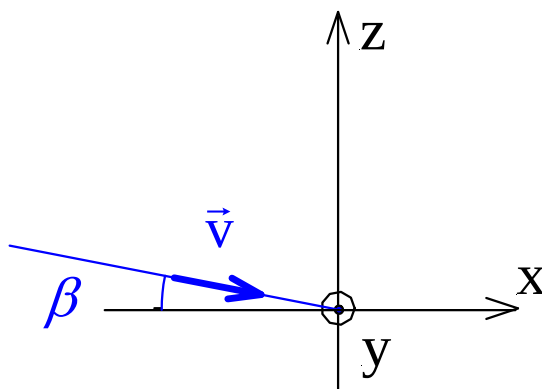
8) L'atome est alors soumis à une force moyenne $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} U = +\frac{1}{2} \alpha \varepsilon_0 \overrightarrow{\text{grad}} |E_0|^2$. Comme la fréquence du laser est supérieure à la fréquence de résonance de la transition atomique ($\omega > \omega_0$), alors la polarisabilité α est négative et donc la force moyenne subie est dirigée vers les zones où le champ $\vec{E}$ est le moins intense : l'atome est donc "réfléchi" par la surface du prisme.

9) U est en $|E_0|^2$, donc en $\exp(-2\frac{z}{l})$, donc effectivement "la barrière de potentiel croît exponentiellement lorsque l'atome s'approche de la surface du prisme".

10) Dans une vision "classique" de la question, l'atome a une énergie mécanique constante, que nous noterons $\mathcal{E}_0$, au cours de son mouvement. "Loin" de la surface du prisme, cette énergie est entièrement sous forme cinétique : $E_c = \mathcal{E}_0$. Lorsque l'atome se rapproche de la surface, l'énergie cinétique E_c diminue pendant que l'énergie potentielle U augmente. Toutefois, si $\mathcal{E}_0 < U_0$, l'énergie cinétique E_c va s'annuler avant que l'atome n'atteigne la surface en $z = 0$: l'atome fait alors demi-tour (et il retrouve, loin de la surface, l'énergie cinétique $\mathcal{E}_0$ qu'il avait initialement).

11) U_0 est de l'ordre de 10^{-25} J (l. 53). Calculons la vitesse d'atomes de rubidium qui auraient cette énergie de 10^{-25} J, sous forme cinétique : $v = \sqrt{\frac{2U_0}{m}} = \sqrt{\frac{2U_0 N_A}{M}} \simeq 1 \text{ m.s}^{-1}$ (on ne garde qu'un chiffre significatif), ce qui est en accord avec le texte l. 55.

12) La vitesse quadratique moyenne u vérifie $\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$, soit $u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3k_B T N_A}{M}} \simeq 3.10^2 \text{ m.s}^{-1}$ en prenant $T \simeq 3.10^2 \text{ K}$; on retrouve bien les valeurs mentionnées l. 55-57.



13) Apparemment, seule compte la composante de la vitesse qui est normale à la surface du prisme ; on a vu que cette composante doit être inférieure à une valeur limite, de l'ordre du mètre par seconde. Un atome ayant une vitesse thermique ordinaire a une vitesse de l'ordre de 300 m.s^{-1} . Il y a alors deux "solutions" : soit on diminue beaucoup cette vitesse thermique, en refroidissant les atomes, c'est la méthode utilisée dans la suite du texte. Soit on aurait pu envoyer les atomes sur la surface avec une incidence très rasante, pour que la composante normale ne dépasse pas l'ordre de grandeur requis.

On a $v_{\text{normale}} = u \sin \beta \simeq u \beta$ (en supposant $\beta \ll 1$, ce qui sera vérifié sans peine). Il faut donc $\beta < \frac{v_{\text{normale}}}{u} \simeq \frac{1}{300} \text{ rad}$: l'incidence est effectivement très rasante.

14) On se réfère aux l. 67-68 : "100 millions d'atomes dans une sphère d'un millimètre de diamètre", soit une densité volumique d'atomes $N \simeq \frac{10^8}{\frac{4}{3} \pi (\frac{10^{-3}}{2})^3} \simeq 2.10^{17} \text{ m}^{-3}$.

Dans l'air ambiant, et en l'assimilant à un gaz parfait, cette densité volumique peut être obtenue par $\frac{P}{k_B T} \simeq \frac{10^5}{10^{-23} \cdot 300} \simeq 3.10^{25} \text{ m}^{-3}$: elle est environ cent millions de fois plus grande ; la densité volumique

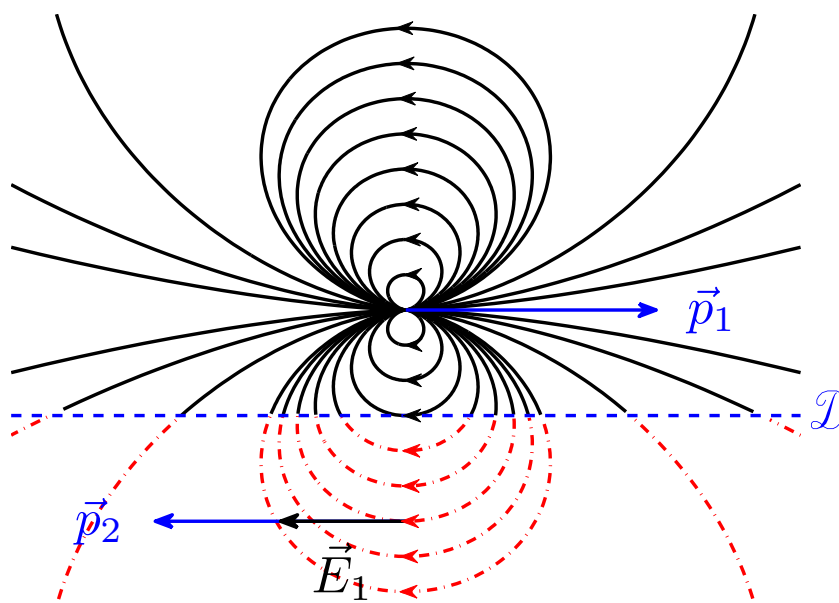
d'atomes dans le piège est donc très faible.

15) On suppose donc que les atomes froids se comportent comme un gaz parfait. Alors $P = Nk_B T$, où N est la densité volumique d'atomes évaluée précédemment. D'où, la température étant $T \simeq 10^{-5}$ K, on obtient $P \simeq 2.10^{-11}$ Pa : soit une pression très très faible par rapport à la pression atmosphérique ordinaire. D'où, vraisemblablement, la nécessité de manipuler dans un "vide" extrêmement poussé.

16) Au bout de $h = 1$ cm de chute libre, et sans vitesse initiale, les atomes atteignent la vitesse $v = \sqrt{2gh} \simeq \sqrt{0,2}$, soit entre 0,4 et 0,5 m.s⁻¹ : en accord avec ce qui est indiqué l. 72.

III – Interaction d'un atome avec une surface diélectrique.

17)



18) On considère ici un dipôle *permanent* $\vec{p}_1$, placé parallèlement au plan d'une paroi diélectrique. On a représenté également le dipôle image $\vec{p}_2$ (l. 95–97) ; on considère également que ce dipôle est permanent. L'énergie potentielle d'interaction des deux dipôles est alors $U = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1$, où l'on a noté $\vec{E}_1$ le champ électrique créé par le dipôle $\vec{p}_1$ au niveau du dipôle $\vec{p}_2$. Cette énergie potentielle est négative (voir figure : $\vec{p}_2$ et $\vec{E}_1$ sont colinéaires et de même sens), et est d'autant plus grande en valeur absolue que les dipôles sont proches de la paroi : la force entre ces deux dipôles est donc attractive.

Le champ $\vec{E}_1$ créé par le dipôle 1 au niveau du dipôle 2 est bien en $\frac{1}{z^3}$, donc U également (les dipôles étant supposés permanents, donc en particulier indépendants de z).

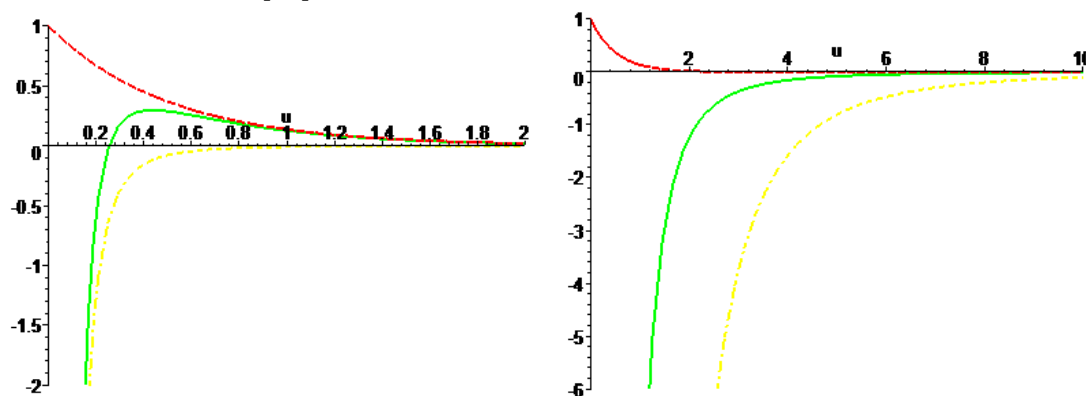
19) L'approximation évoquée dans les l. 103–108 peut être assimilée à l'ARQS : pendant le temps caractéristique $\tau = \frac{1}{\nu}$ de variation du dipôle fluctuant, les ondes électromagnétiques se propagent sur une distance $c\tau$, justement de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde optiques (puisque la fréquence caractéristique ν de fluctuation du dipôle est de l'ordre des fréquences optiques). Si la distance atome–paroi est petite devant ces longueurs d'onde, alors le dipôle n'a effectivement pas le temps de varier de manière sensible dans la durée que mettent les ondes pour se propager sur cette distance, et on peut considérer que son image a bien à tout instant la même valeur que lui (le dipôle image ne peut s'établir qu'avec un "retard" égal au double de la durée de propagation des ondes de l'atome jusqu'à la paroi).

20) Les atomes semblent s'approcher de la paroi jusqu'à une distance de l'ordre de la centaine de nanomètres (l. 86). Cette distance ne vérifie qu'imparfaitement la condition précédente : elle est

effectivement inférieure aux longueurs d'onde optiques, mais pas tant que cela (facteur de 5 à 10 environ).

21) L'interaction de van der Waals est attractive donc $A > 0$. Pour $z \rightarrow 0$, c'est le potentiel de van der Waals qui l'emporte et $U \sim -\frac{A}{z^3}$. Pour $z \rightarrow \infty$, c'est aussi le potentiel de van der Waals qui l'emporte et $U \sim -\frac{A}{z^3}$.

22) $\left[\frac{A}{z^3}\right] = [U_0]$, donc $\left[\frac{A}{U_0}\right] = L^3$. D'où la quantité sans dimension demandée $\delta = \frac{A}{U_0 l^3}$.



23) On peut mettre le potentiel total sous la forme $U = U_0 \left(\exp\left(-\frac{2z}{l}\right) - \delta \left(\frac{l}{z}\right)^3 \right)$.

Sur les figures ci-dessus, on a tracé $\frac{U}{U_0}$ en fonction de $u = \frac{z}{l}$; la figure de gauche correspond à $\delta = 0,01$ et celle de droite à $\delta = 10$. La contribution dipolaire est en rouge, celle de van der Waals en jaune, et la somme est en vert.

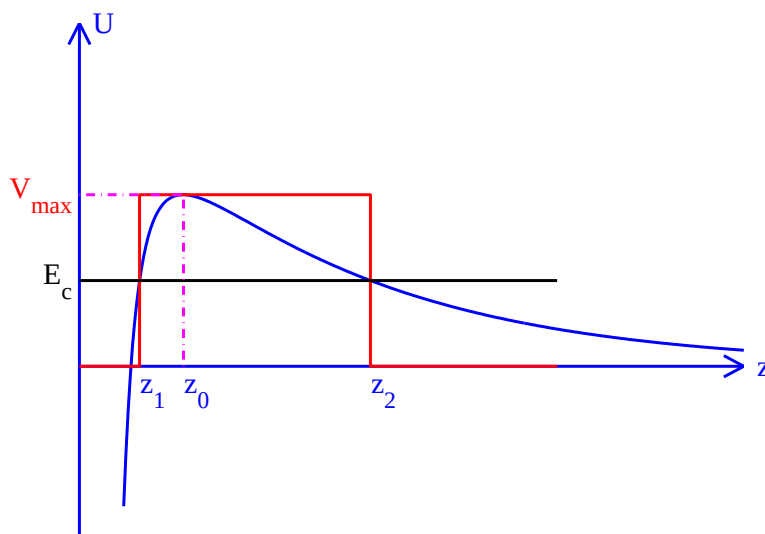
On peut remarquer que, en $z = l$ (soit à l'abscisse $u = 1$ sur les figures ci-dessus), le rapport du potentiel de van der Waals au potentiel dipolaire vaut $\delta \cdot e^2$ en valeur absolue.

La figure 2 de l'énoncé à droite correspond au cas $\delta \ll 1$ (se rapproche de la figure de gauche ci-dessus).

24) La valeur maximale (que l'énoncé note V_{max}) du potentiel total est égale à l'énergie cinétique des atomes incidents, qui vaut mgh (après une chute libre d'une hauteur h , sans vitesse initiale). On a donc $mgh = -\frac{A}{z_0^3} + U_0 \exp\left(-\frac{2z_0}{l}\right)$, où z_0 est la position du maximum de $U(z)$, et s'obtient donc comme solution de l'équation $\frac{dU}{dz}(z) = 0$.

25) Il s'agit probablement de la réflexion totale frustrée. Toutefois, il n'est nulle part question dans le texte de ce phénomène, qui est par ailleurs totalement hors-programme.

26)



On peut prendre pour largeur a de la barrière la distance entre les deux positions z_1 et z_2 où $U = E_c$, et comme hauteur V_{max} (voir figure ; on surestime ce faisant la barrière de potentiel et donc on obtiendra une valeur de T inférieure à la valeur réelle).

27) On effectue un développement limité à l'ordre 2 de $U(z)$ au voisinage de son maximum, situé en $z = z_0$: $U(z_0 + \varepsilon) \simeq V_{max} + \frac{\varepsilon^2}{2} U''(z_0)$.

Or $U(z_0 + \varepsilon_1) = U(z_0 + \varepsilon_2) = E_c$, avec $z_1 = z_0 + \varepsilon_1 < z_0$ et $z_2 = z_0 + \varepsilon_2 > z_0$. D'où $E_c = V_{max} + \frac{\varepsilon_1^2}{2} U''(z_0) = V_{max} + \frac{\varepsilon_2^2}{2} U''(z_0)$. On en déduit $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{2(V_{max} - E_c)}{-U''(z_0)}}$ (on signale que l'on a bien $U''(z_0) < 0$). Et donc on obtient la largeur a de la barrière lorsque l'énergie cinétique E_c est juste inférieure à V_{max} : $a = 2\varepsilon_2 \simeq 2\sqrt{\frac{2(V_{max} - E_c)}{-U''(z_0)}}$.

Si l'on prend une hauteur de barrière égale à V_{max} , on aboutit alors à une probabilité de transmission par effet tunnel $T \simeq \exp\left(-\frac{8}{\hbar} (V_{max} - E_c) \sqrt{\frac{m}{-U''(z_0)}}\right)$.

Remarque : l'article indique plutôt, contrairement à l'énoncé, que l'on n'observe pas l'effet tunnel. Déterminons donc la largeur (en énergie) de la zone de transition dans laquelle on devrait, en théorie, observer cet effet tunnel. Si nous nous fixons comme critère, forcément arbitraire, $T > \frac{1}{1000}$ comme frontières de cette zone, alors on résout $\exp\left(-\frac{8}{\hbar} (V_{max} - E_c) \sqrt{\frac{m}{-U''(z_0)}}\right) > \frac{1}{1000}$, qui mène à $V_{max} - E_c < \frac{3 \ln 10}{8} \hbar \sqrt{\frac{-U''(z_0)}{m}}$, soit une largeur caractéristique, en énergie, de l'ordre de $\hbar \sqrt{\frac{-U''(z_0)}{m}}$.

IV – Mesure des rugosités de surface.

28) Il s'agit ici de l'amplitude *complexe*. L'onde évanescence résultant du faisceau laser incident a une amplitude complexe en $e^{i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})}$, avec $\vec{k}' \begin{cases} k'_x = k_x \\ 0 \\ \pm i \end{cases}$, donc une amplitude complexe en $e^{-\frac{z}{l}} e^{i(\omega t - k_x x)}$; on peut choisir arbitrairement un préfacteur d'amplitude égal à 1.

L'amplitude complexe de l'onde évanescence résultant du faisceau laser réfléchi vaudra alors, à un éventuel facteur de phase près, $\sqrt{R} e^{-\frac{z}{l}} e^{i(\omega t + k_x x)}$.

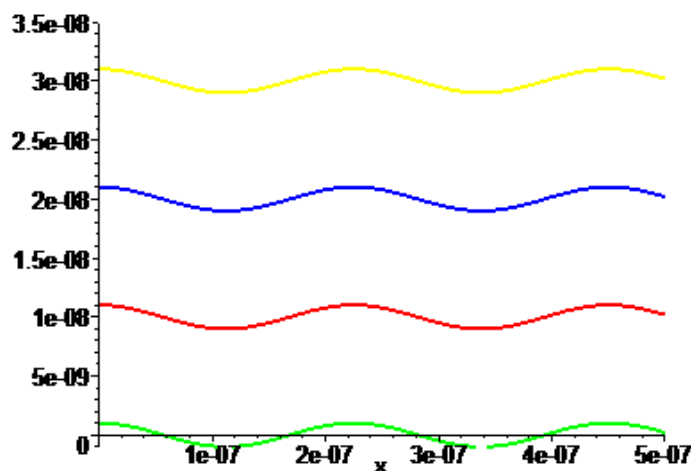
29) L'onde totale résultante a alors une amplitude complexe de la forme $e^{-\frac{z}{l}} \left[e^{-ik_x x} + \sqrt{R} e^{ik_x x} \right]$ (on

omet le $e^{i\omega t}$).

Et donc le potentiel répulsif, proportionnel au carré du module de l'amplitude complexe précédente, peut s'écrire $U = \text{cte} \cdot e^{-2\frac{z}{l}} \left(1 + R + \sqrt{R} (e^{2ik_x x} + e^{-2ik_x x}) \right)$, ou encore $U(x, z) = U_1 e^{-2\frac{z}{l}} [1 + \varepsilon \cos(2k_x x)]$, avec $\varepsilon = \frac{2\sqrt{R}}{1+R}$.

30) Une équipotentielle se définit par $U(x, z) = \text{cte}$, soit $e^{-2\frac{z}{l}} = \frac{\text{cte}}{1 + \varepsilon \cos(2k_x x)} \simeq \text{cte} (1 - \varepsilon \cos(2k_x x))$ si $\varepsilon \ll 1$. On aboutit alors à l'équation cartésienne approchée des équipotentielles : $z \simeq \text{cte} - \frac{l}{2} \ln(1 - \varepsilon \cos(2k_x x)) \simeq \text{cte} + \frac{\varepsilon l}{2} \cos(2k_x x)$.

La figure qui suit a été tracée avec $\varepsilon = 0,023$ et $i = 60^\circ$; la constante varie par pas de 10^{-8} ; on observe que la profondeur est faible devant la période des oscillations.



31) La profondeur (crête à crête) des équipotentielles vaut alors, dans cette approximation, $\varepsilon l = \frac{2\sqrt{R}}{1+R} l$.

32) $\lambda_{dB} = \frac{h}{mv} = \frac{2\pi\hbar}{mv}$. Pour les atomes de rubidium, dont la vitesse v vaut $0,5 \text{ m.s}^{-1}$, cette longueur d'onde vaut 1.10^{-8} m , en accord avec la l. 184.

33) La profondeur de modulation vaut ici $\varepsilon l = 0,023l$, avec l de l'ordre de $\frac{\lambda_0}{2\pi n} \simeq 6.10^{-8} \text{ m}$. D'où une profondeur de modulation de l'ordre de 1 nm , environ 10 fois plus petite que la longueur d'onde de de Broglie des atomes de rubidium. La légende de la figure 3 nous indique que "une onde de de Broglie subit une forte diffraction si λ_{dB} est de l'ordre de la profondeur de modulation" : on peut vraisemblablement considérer que cette condition est remplie.

34) Si $R \ll 1$, ce qui est le cas ici, alors $\varepsilon \simeq 2\sqrt{R}$, soit $R \simeq \frac{\varepsilon^2}{4}$. Ici, $\varepsilon = 0,023$, d'où $R \simeq \frac{0,023^2}{4} \simeq 1.10^{-4}$, en accord avec la l. 186.

35) On a $\sin \theta = \frac{p_x}{p}$, où θ est l'angle de diffraction recherché. Or $|p_x|$ vaut $2\hbar k_x$ ou $4\hbar k_x$, avec $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin i = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \sin i$, et $p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_{dB}}$, avec $\lambda_{dB} = 8 \text{ nm}$. D'où $\sin \theta = \pm \frac{2n \sin i}{\lambda_0} \lambda_{dB} = \pm \frac{8}{195} \sin i$, ou le double. Si on prend, par exemple, $i = 60^\circ$ (comme à la question 30), cela nous donne des angles de $\pm 2^\circ$ et $\pm 4^\circ$ (mais qui, d'après la légende de la figure 3, ne sont pas résolus).