

Physique B - XEULC - Filière PC

Histoire d'eau ou quelques aspects de la physique des gouttes

I Impact mécanique de la pluie.

I.A - Chute d'une goutte d'eau.

1. **a.** Rayon d'une goutte de pluie : $r \sim 1 \text{ mm}$, vitesse de chute de la pluie : $v \sim 10 \text{ m.s}^{-1}$.
b. Pour la chute d'une sphère de diamètre d dans un fluide, le nombre de Reynolds est défini par :

$$\text{Re} = \frac{\rho_a v d}{\eta_a} \simeq \frac{1,2 \times 10 \times 2 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-5}} \simeq 1 \times 10^3,$$

à un chiffre significatif comme le demande l'énoncé.

La valeur est un peu faible pour considérer que le régime est turbulent et pour utiliser l'expression de la traînée en v^2 , mais c'est quand même ce que l'on fera.

c. Les forces qui agissent sur la goutte lors de sa chute sont :

- son poids : $m \vec{g} = m g \vec{e}_x = \rho_e \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{e}_x$;
- la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\rho_a \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{e}_x$;
- la traînée : $\vec{F} = -0,5 C_x \rho_a \pi r^2 v^2 \vec{e}_x$.

d. On applique la loi de la quantité de mouvement à la goutte dans le référentiel terrestre :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} + \vec{\Pi} + \vec{F}.$$

Comme $\rho_a \ll \rho_e$, on néglige la poussée d'Archimède devant le poids.

En projection sur $\vec{e}_x$, on obtient :

$$\rho_e \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{dv}{dt} = \rho_e \frac{4}{3} \pi r^3 g - 0,5 C_x \rho_a \pi r^2 v^2.$$

On simplifie pour mettre cette équation sous la forme demandée :

$$\frac{\dot{v}}{g} = 1 - \frac{3 C_x \rho_a}{8 \rho_e g r} v^2 = 1 - \left(\frac{v}{u} \right)^2 \quad \text{avec} \quad u = \sqrt{\frac{8 \rho_e g r}{3 C_x \rho_a}}.$$

La vitesse u est la vitesse limite de chute de la goutte (le poids et la traînée s'équilibrent alors).

2. a. On sépare les variables :

$$\frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{u} \right)^2} = g dt.$$

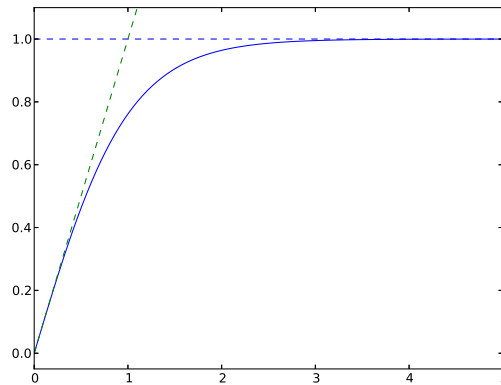
On pose $w = v/u$. Il vient :

$$\frac{dw}{1 - w^2} = \frac{g}{u} dt.$$

Après : ou bien on décompose la fraction en éléments simples, ou bien on connaît une primitive de $\frac{1}{1-x^2}$. On obtient, avec $v(0) = 0$:

$$v(t) = u \text{th} \left(\frac{t}{t^*} \right) \quad \text{où} \quad t^* = \frac{u}{g}.$$

b. La courbe demandée est (avec en plus la tangente à l'origine et la limite en l'infini) :



La vitesse limite est atteinte au bout de quelques t^* .

c. Pour $t \simeq 3t^*$, la vitesse est quasiment égale à la vitesse limite. On pourra prendre $H^* = ut^* = \frac{u^2}{g}$.

d. $u^2 = \frac{8 \times 10^3 \times 10 \times 1 \times 10^{-3}}{3 \times 0,4 \times 1,2} \simeq 50$, soit : $u \simeq 7 \text{ m.s}^{-1}$. Pour ce calcul, sans calculatrice, on a un peu surestimé le dénominateur en remplaçant 1,44 par 1,6. Donc la valeur de u est légèrement sous-estimée.

$$H^* \simeq 5 \text{ m.}$$

La valeur de u obtenue confirme la valeur choisie à la première question (ouf!). La goutte d'eau atteint sa vitesse limite très près du nuage. Dans la suite, on prendra donc la vitesse limite u comme vitesse de la goutte.

I.B - Effort mécanique.

3. a. Les gouttes de pluie qui arrivent pendant dt sur une surface S au sol ont parcouru la distance udt . Elles sont donc contenues dans le volume $Sudt$, ce qui représente un volume d'eau égal à $N_0 \frac{4}{3}\pi r_0^3 Sudt$. Or, par définition de I , ce volume est égal aussi $ISdt$. On en déduit :

$$N_0 = \frac{3I}{4\pi r_0^3 u}.$$

b. L'application numérique donne (il faut bien sûr exprimer I en mètres par secondes) :

$$N_0 = \frac{3}{4\pi} \times \frac{300 \times 10^{-3}}{3600} \times \frac{1}{(5 \times 10^{-4})^3} \times \frac{1}{5} \simeq \frac{9 \times 10^9}{4 \times 100 \times 25^2} \simeq \frac{10^6}{25} = 4 \times 10^4 \text{ gouttes.m}^{-3};$$

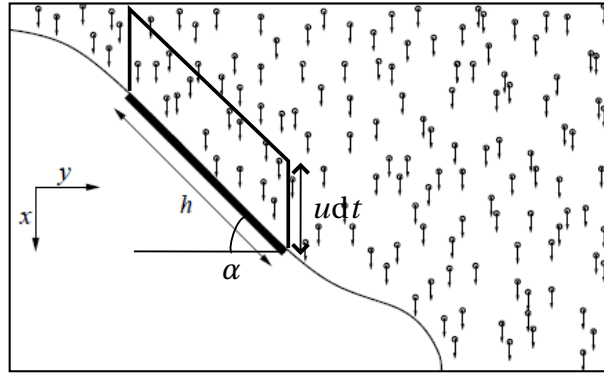
On a pris $36\pi \simeq 100$ au dénominateur. Le rayon r_0 est de 0,5 mm et non de 1 mm comme on avait pris dans la partie I.A. La vitesse est alors plutôt $u = 5 \text{ m.s}^{-1}$, valeur adoptée dans la suite.

c. La distance moyenne entre les gouttes est : $d_0 = \left(\frac{1}{N_0}\right)^{1/3} = (4 \times 10^4)^{-1/3} \simeq 3 \text{ cm.}$

4. a. Le volume concerné est donc : $Su \cos \alpha dt$ (voir figure page suivante).

b. Chaque goutte voit sa quantité de mouvement varier de $d\vec{p}_{\text{goutte}} = -m_{\text{goutte}} u \vec{e}_x$. Le nombre de gouttes frappant la surface du pare-brise de l'avion entre t et $t + dt$ est : $dN = N_0 Su \cos \alpha dt$. La variation de quantité de mouvement du pare-brise entre t et $t + dt$ est donc :

$$d\vec{p}_{\text{p.b.}} = m_{\text{goutte}} u N_0 Su \cos \alpha dt \vec{e}_x.$$



La loi de la quantité de mouvement appliquée au pare-brise, nous permet de déterminer la force $\vec{F}_0$ cherchée :

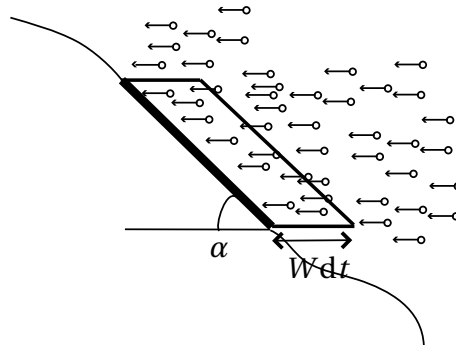
$$\vec{F}_0 = \rho_e \frac{4}{3} \pi r_0^3 N_0 S u^2 \cos \alpha \vec{e}_x.$$

C'est bien de la forme $F_0 = (k \cos \alpha) S \rho_e u^2$ avec $k = \frac{4}{3} \pi r_0^3 N_0$. k est sans dimension.

c. $F_0 = 4 \times 10^4 \times \frac{4}{3} \pi (5 \times 10^{-4})^3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0,5 \times 1 \times 10^3 \times 5^2 \simeq 2 \times 10^{-1} \text{ N}.$

5. a. Un avion volant à Mach 1 a une vitesse de l'ordre de $340 \text{ m.s}^{-1} \simeq 1200 \text{ km.h}^{-1}$. On peut donc donner comme ordre de grandeur de la vitesse d'un avion de ligne $W \simeq 10^3 \text{ km.h}^{-1}$, soit $3 \times 10^2 \text{ m.s}^{-1}$.

b. $W \gg u$. La loi de composition des vitesse pour la pluie s'écrit : $\vec{v}_{\text{pluie/avion}} = \vec{u} - \vec{W} \simeq -\vec{W}$. Dans le référentiel de l'avion, les gouttes ont une vitesse quasi horizontale. Le schéma précédent devient donc :



c. Dans l'expression de F_0 il suffit donc de remplacer $\cos \alpha$ par $\sin \alpha$ et u par W , la force $\vec{F}$ étant dirigée selon $-\vec{e}_y$:

$$\vec{F} = -\rho_e \frac{4}{3} \pi r_0^3 N_0 S W^2 \sin \alpha \vec{e}_y.$$

d. $F = \left(\frac{300}{5}\right)^2 F_0 \simeq 7 \times 10^2 \text{ N}.$

I.C - Distribution du rayon des gouttes.

6. a. Le nombre total de goutte par unité de volume vérifie : $N_0 = \int_0^{+\infty} n(r) dr = n_0 \lambda.$

b. $\mathcal{P}(r \leq \lambda) = \frac{1}{N_0} \int_0^\lambda n(r) dr = 1 - \frac{1}{e}$, d'où $\mathcal{P}(r > \lambda) = \frac{1}{e}$. Or $e \simeq 2,7$, soit $\frac{1}{e} \simeq \frac{1}{3}$ et $1 - \frac{1}{e} \simeq \frac{2}{3}$. La probabilité que les gouttes aient un rayon inférieur à λ est environ deux fois supérieure à la probabilité pour qu'elles aient un rayon supérieur à λ : il y a environ deux fois plus de gouttes qui ont un rayon inférieur à λ que de gouttes qui ont un rayon supérieur à λ .

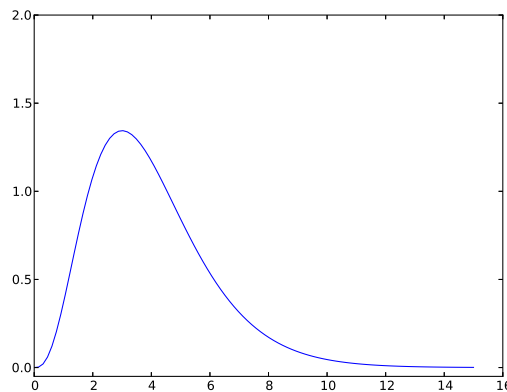
c. $\langle r \rangle = \int_0^{+\infty} r dP(r) = \int_0^{+\infty} \frac{r}{\lambda} \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) dr = \lambda.$

Les gouttes ne sont pas réparties moitié-moitié entre les gouttes qui ont rayon $< \lambda$ et les gouttes qui ont un rayon $> \lambda$, il y en a plus qui ont un rayon inférieur à la moyenne. La médiane n'est pas égale à la moyenne.

7. a. $dM(r)$ représente la masse des gouttes de rayon compris entre r et $r + dr$.

b. $\mu(r)$ est proportionnelle à $r^3 \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) = f(r)$. En $r = 0$, $\mu(r) = 0$, quand r tend vers l'infini, $\mu(r)$ tend vers 0. La dérivée de $f(r)$ est : $f'(r) = \left(3r^2 - \frac{r^3}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$. Elle s'annule en 0 et en $r_0 = 3\lambda$.

On trace $\frac{\mu(r)}{\rho_e \frac{4\pi}{3} \lambda^3 n_0}$ en fonction de $x = \frac{r}{\lambda}$:



c. Le maximum de $\mu(r)$ est obtenu pour $r = 3\lambda$, c'est le rayon des gouttes dont la contribution à la masse totale par unité de volume est la plus importante.

d. La masse totale des gouttes est : $M_{\text{tot}} = \int_0^{+\infty} dM(r) = \rho_e 8\pi n_0 \lambda^4$. La masse moyenne des gouttes est donc :

$$\langle m \rangle = \frac{M_{\text{tot}}}{N_0} = \rho_e 8\pi n_0 \lambda^3.$$

e. $m_{\langle r \rangle} = \rho_e \frac{4\pi}{3} \lambda^3$. Or $8 > 4/3$ donc $\langle m \rangle > m_{\langle r \rangle}$. La masse variant comme le rayon au cube, la contribution des gouttes de plus fort rayon à la masse totale est plus importante. La masse ne varie pas linéairement avec le rayon !

8. a. La contribution des gouttes de rayon compris entre r et $r + dr$ à la force exercée par la pluie sur le pare-brise est :

$$d\vec{F} = -Qr^3 dN(r) \vec{e}_y,$$

d'où :

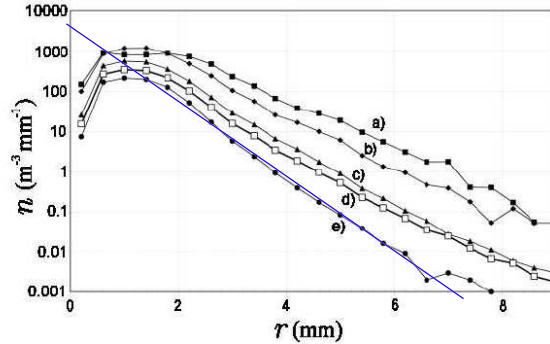
$$\vec{F}_D = \int_0^{+\infty} d\vec{F} = -6QN_0\lambda^3 \vec{e}_y.$$

b. Comme $\langle r \rangle = \lambda$, le rapport φ demandé est égal à 6.

c. La prise en compte de la distribution du rayon des gouttes augmente la force exercée sur le pare-brise d'un facteur 6, ce qui donne finalement $F_D = 4,3 \times 10^3$ N, ce qui représente une pression (la surface du pare-brise est de $0,5 \text{ m}^2$) d'environ $8,6 \times 10^3$ Pa. L'effet mécanique de la pluie est environ 10 fois plus faible que celui correspondant au maintien en pression de l'habitable.

9. a. Selon la loi de Marshall-Palmer, les relevés devraient être des droites décroissantes. Ce n'est pas le cas pour les faibles rayons (inférieurs à 1,5 mm environ). (Ca ne marche pas trop non plus pour les forts rayons) .

b. Le plus faible régime de précipitation correspond aux plus faibles valeurs de n , c'est donc la courbe (e).



On trace la droite correspondant à la loi de Marshall-Palmer.

On lit la valeur de n_0 quand $r = 0$: $n_0 \simeq 4 \times 10^3 \text{ m}^{-3} \cdot \text{mm}^{-1}$. λ correspond à la valeur absolue de la pente de la droite. On lit $\lambda \simeq 1 \text{ mm}$.

c. $\langle r \rangle = \lambda \simeq 1 \text{ mm}$ et $N_0 = n_0 \lambda = 4 \times 10^3 \text{ m}^{-3}$, soit environ 10 fois moins que la valeur du début.

d. Le principal problème de la loi de Marshall-Palmer concerne les gouttes de faible rayon. La force est en r^3 , donc même si on surestime la contribution des petites gouttes, on fait une erreur moins grande que pour le rayon moyen et pour N_0 (qui représente l'aire sous la courbe en échelle linéaire, donc qui est assez sensible à ce qui se passe au voisinage de zéro il me semble).

II Formation des gouttes - Instabilité de Rayleigh-Plateau.

II.A - Approche statique.

10. a. L'aire du cylindre est $2\pi R_0 L + 2\pi R_0^2$ donc $E_0 = \gamma(2\pi R_0 L + 2\pi R_0^2) \simeq \gamma 2\pi R_0 L$ compte tenu du fait que $R_0 \ll L$.

b. $E_N = \gamma N 4\pi r^2$.

c. La situation en chapelet est énergétiquement plus favorable si $E_N < E_0$. Mais N et r sont liés : on va exprimer N en fonction de r en exprimant la conservation du volume entre les deux situations.

On obtient : $N \times \frac{4\pi}{3} r^3 = \pi R_0^2 L$, d'où $N = \frac{3R_0^2 L}{4r^3}$, puis $E_N = \gamma \pi \frac{3R_0^2 L}{r}$. Donc $E_N < E_0$ pour $r > 3R_0/2$. Plus il y a de gouttes, plus la surface est grande : la minimisation de l'aire conduit aux gouttes les plus grosses possibles.

11. a. On utilise ici aussi la conservation du volume entre les deux situations. La tranche comprise entre x et $x + dx$ a un volume : $dV = \pi R(x)^2 dx$ donc :

$$V = \int_0^L \pi R(x)^2 dx = \pi R_0^2 L.$$

Or $R(x)^2 = \langle R \rangle^2 + 2a \sin(kx) \langle R \rangle + a^2 \sin^2(kx)$. Tous calculs faits, on obtient :

$$R_0^2 = \langle R \rangle^2 + \frac{2a \langle R \rangle}{kL} (1 - \cos(kL)) + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4kL} \sin(2kL).$$

kL étant très grand devant 1, on néglige les termes où figurent kL au dénominateur (on suppose que $1/kL$ est d'un ordre supérieur à a/R_0).

Il reste : $\langle R \rangle^2 \simeq R_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{2R_0^2}\right)$, soit : $\langle R \rangle \simeq R_0 \left(1 - \frac{a^2}{4R_0^2}\right)$.

b. L'aire de la tranche x et $x + dx$ est : $dS = 2\pi R(x)ds = 2\pi R(x)\sqrt{1 + R'(x)^2}dx$.

Or $\sqrt{1 + R'(x)^2} = \sqrt{1 + a^2 k^2 \cos^2(kx)} \simeq 1 + \frac{a^2 k^2}{2} \cos^2(kx)$ puisque $ka \ll 1$.

L'aire totale de la portion de longueur λ est donc :

$$S_\lambda(a) = \int_0^\lambda 2\pi R(x)\sqrt{1 + R'(x)^2}dx = 2\pi \int_0^\lambda (\langle R \rangle + a \sin(kx)) \left(1 + \frac{a^2 k^2}{2} \cos^2(kx)\right) dx.$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$S_\lambda(a) = 2\pi\lambda \langle R \rangle \left(1 + \frac{a^2 k^2}{4}\right) = S_\lambda(0) \left(1 - \frac{a^2}{4R_0^2}\right) \left(1 + \frac{a^2 k^2}{4}\right).$$

En négligeant le terme en $a^4 k^2 / R_0^2$, on obtient bien la relation demandée :

$$S_\lambda(a) = S_\lambda(0) \left(1 + \frac{a^2}{4R_0^2} (k^2 R_0^2 - 1)\right).$$

c. $S_\lambda(a) < S_\lambda(0)$ pour $R_0 < \lambda$.

II.B - Approche dynamique.

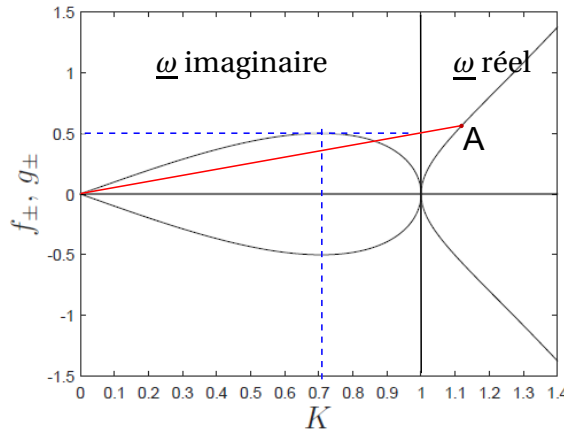
12. a. ω^2 est réelle donc $\underline{\omega}$ est réelle quand $\underline{\omega}^2$ est positif et imaginaire pur quand $\underline{\omega}^2$ est négatif.

Donc : $\underline{\omega}$ réelle pour $kR_0 > 1$ et imaginaire pur pour $kR_0 < 1$.

b. Si $\underline{\omega}$ est réelle, la perturbation se propage, elle est stable. Si $\underline{\omega}$ est imaginaire pur, la perturbation ne se propage pas mais son amplitude peut croître dans le temps, d'où la naissance de l'instabilité. Ce résultat est cohérent avec celui de la question 11.

13. a. On pose $K = kR_0$ donc $\underline{\omega}^2 > 0$ quand $K > 1$.

On a alors : pour $K > 1$, $\frac{\omega}{\Omega_0} = f_\pm(K)$ et pour $K < 1$, $\frac{\omega}{\Omega_0} = jg_\pm(K)$.



b. L'instabilité se développe le plus rapidement pour $|\underline{\omega}|$ le plus grand dans la zone où $K < 1$. On lit $K_c \simeq 0,7$ et $f_+(K_c) = 0,5$. Or $\underline{\omega}^2 = -\Omega_0^2 f_+^2(K_c)$, d'où $\underline{\omega} = j\Omega_0 f_+(K_c) = \frac{j}{\tau_c}$. Finalement :

$$\tau_c = 2\sqrt{\frac{2\rho_e R_0^3}{\gamma}}.$$

c. Le moteur de croissance de l'instabilité est la tension superficielle, le frein est l'inertie des particules (on forme des grosses gouttes donc les particules de fluide doivent parcourir une plus grande distance).

d. *Le texte ne définit pas λ_c .*

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} \text{ avec } k_c = \frac{K_c}{R_0}, \text{ d'où } \lambda_c = \frac{2\pi}{0,7} \text{ en mm, soit } \lambda_c \simeq 1 \text{ cm.}$$

$$\tau_c = 2\sqrt{\frac{2 \times 10^3 \times 10^{-9}}{7 \times 10^{-2}}} \simeq 2\sqrt{\frac{2}{7}} \times 10^{-2} \simeq \sqrt{\frac{8}{7}} \times 10^{-2} \text{ d'où } \tau_c \simeq 10^{-2} \text{ s.}$$

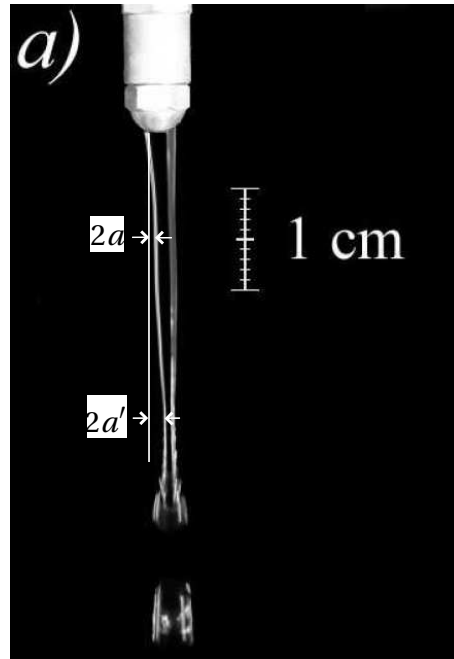
e. Dans le cas d'une onde progressive, la vitesse de phase est égale à ω/k . Il suffit donc au point A de la figure précédente (par exemple) de mesurer la pente de la droite tracée en rouge, puis de multiplier par $R_0\Omega_0$ pour revenir aux grandeurs dimensionnées.

Dans la limite où $K^2 \gg 1$, $\omega \simeq \Omega_0 k^2 R_0^2$ d'où $v_\phi \simeq \Omega_0 R_0^2 k$.

II.C - Instabilité d'un filet d'eau en chute libre.

14. a. Le débit massique Q est égal à $Q = \rho_e S u_0$, d'où $u_0 = \frac{Q}{\rho_e \pi R_0^2} = \frac{2 \times 10^{-3}}{\pi \times 10^3 \times 10^{-6}} = \frac{2}{\pi} \simeq 0,6 \text{ m.s}^{-1}$.

b. On peut visualiser a par exemple comme cela :



Difficile de lire sur les photos. En grossissant l'image, on voit deux zones marquées sur la figure qui peuvent faire l'affaire.

Première zone : $2a \simeq 0,4 \text{ mm}$ donc $a \simeq 0,2 \text{ mm} = R_0/5$.

Deuxième zone : $a' \simeq 0,5 \text{ mm}$.

Dans les deux cas, l'approximation $a \ll R_0$ n'est pas vérifiée, même si la première zone est plus satisfaisante. On va choisir la première ! Le rétrécissement du jet en bas est peut être dû à l'influence de la pesanteur.

15. a. Si on voit des ondulations, c'est que la perturbation est stable, on est donc dans le régime ω réelle.

b. Si l'onde paraît figée dans le référentiel du laboratoire, c'est que la vitesse de phase est égale à u_0 .

c. Sur la photo b), on compte 4 longueurs d'ondes pour 5 mm, d'où $\lambda = 5/4 \text{ mm}$, soit $kR_0 = \frac{8\pi}{5} \simeq 5$.

d. L'approximation $K^2 \ll 1$ est valable, d'où $v_\phi = kR_0^2\Omega_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$. C'est comparable à la valeur de u_0 calculée précédemment.

e. L'hypothèse $L \gg \lambda$ n'est sans doute plus satisfaite (on a raccourci le jet).

f. La viscosité du fluide et les frottements avec l'obstacle peuvent expliquer l'atténuation des ondes.