

[1]

eq (2) : cv de la masse

eq (4) : loi des gaz parfaits

$$\underline{Rg} \quad \underbrace{v_s}_{\text{"célérité isotherme"}} = \sqrt{\frac{p R T}{\mu \times p}} = \sqrt{\frac{R T}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} v_{\text{adiab}} \quad (1)$$

[2]

Masse de l'étoile

$$\underbrace{M}_{n_{\odot} \times \mu_{\odot}} = n_H \times \mu_H + n_{He} \times \mu_{He} = M_H + M_{He} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \mu_{\odot} = \frac{n_H}{n_{\odot}} \mu_H + \frac{n_{He}}{n_{\odot}} \mu_{He} \quad (3)$$

$$Or, \quad \begin{cases} \frac{n_H \mu_H}{M} = X = 0,73 \\ \frac{n_{He} \mu_{He}}{M} = Y = 0,27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{n_H}{n_{He}} \underbrace{\frac{\mu_H}{\mu_{He}}}_{\frac{1}{4}} = \frac{0,73}{0,27} = \frac{X}{Y} = \frac{M_H}{M_{He}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_H}{n_{He}} = 4 \cdot \frac{X}{Y} = 4 \times \frac{0,73}{0,27} \approx 12} \quad (4)$$

Ainsi $n = n_H + n_{He}$, que l'on injecte dans (3)

$$\boxed{\mu_{\odot} = \underbrace{\frac{n_H}{n_H + n_{He}}}_{\frac{12}{13}} \mu_H + \underbrace{\frac{n_{He}}{n_H + n_{He}}}_{\frac{1}{13}} \mu_{He}} \quad (5)$$

AN

$$\mu = \frac{12}{13} \times 1 + \frac{1}{13} \times 4$$

$$= \frac{16}{13} = 1 + \frac{3}{13} \approx 1,25 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\boxed{\mu = 1,25 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} \quad (6) \quad \underline{\text{pour l'étoile}}$$

Même raisonnement avec le nuage galactique
(On remplace H par H_2 dans (3)).

$$\underbrace{\mu}_{\mu} = \frac{n_{\text{H}_2}}{n} \times \underbrace{\mu_{\text{H}_2}}_{2 \times \mu_{\text{H}}} + \frac{n_{\text{He}}}{n} \mu_{\text{He}}. \quad (7)$$

$$\text{Or } \begin{cases} \frac{n_{\text{H}_2} \mu_{\text{H}_2}}{n} = x = 0,73 \\ \frac{n_{\text{He}} \mu_{\text{He}}}{n} = y = 0,27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{n_{\text{H}_2}}{n_{\text{He}}} \times \underbrace{\frac{\mu_{\text{H}_2}}{\mu_{\text{He}}}}_{\frac{1}{2}} = \frac{x}{y} = \frac{0,73}{0,27} \approx 3.$$

c'est là que
ça change.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_{\text{H}_2}}{n_{\text{He}}} = 6} \quad (8)$$

(7) s'écrit

3

$$\mu = \underbrace{\frac{n_{H_2}}{n_{H_2} + n_{He}}}_{\frac{6}{7}} \underbrace{\mu_{H_2}}_{\substack{2 \times \mu_H \\ = 2 \times 1}} + \underbrace{\frac{n_{He}}{n_{H_2} + n_{He}}}_{\frac{1}{7}} \underbrace{\mu_{He}}_4$$

$$= \frac{12}{7} + \frac{4}{7} = \frac{16}{7} = \underbrace{\frac{14}{7}}_2 + \underbrace{\frac{2}{7}}_{0.3}$$

$$\mu = 2,3 \text{ g. mol}^{-1} \quad \text{pour usage galactique} \quad (9)$$

3 * Eq. d'Euler : on introduit T et λ .

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\frac{v_1}{T}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}}_{\frac{v_1^2}{\lambda}} = -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} P - \vec{\text{grad}} \phi$$

negl. si

$$\frac{v_1^2}{\lambda} \ll \frac{v_1}{T}$$

$$\boxed{v_1 \ll \frac{\lambda}{T} = c} \leftarrow \text{célérité onde.}$$

Il reste

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\text{grad}} P_1 - \vec{\text{grad}} \phi_1} \quad (10)$$

* CV manne: comme dans le cours

$$\boxed{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}_1) = 0} \quad (11)$$

* Eq. du potentiel gravitationnel

$$\begin{array}{l} \Delta \phi = 4\pi G \rho \quad \text{en gel} \\ - \Delta \phi_0 = 4\pi G \rho_0 \quad \text{à l'équie} \end{array}$$

$$\boxed{\Delta \phi_1 = 4\pi G \rho_1} \quad (12)$$

* Loi des GP:

$$\begin{array}{l} P = \frac{\rho RT}{\mu} \quad \text{en gel} \\ - P_0 = \frac{\rho_0 RT}{\mu} \quad \text{à l'eq.} \end{array}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{\rho_1 RT}{\mu} = v_s^2 \rho_1} \quad (13)$$

4

$$\vec{v} = v_1 \exp[j(\omega t - kx)] \vec{u}_x$$

- vibration longitudinale : c'est une onde de compression (type sonore)
- onde plane (pseudo) progressive harmonique.

5

5

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = 4\pi G \rho_1 \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{\rho_1 RT}{\mu} = v_s^2 \rho_1 \end{array} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (j\omega) v_1 = - \frac{1}{\rho_0} (-jk) p_1 - (-jk) \phi_1 \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (j\omega) \rho_1 + \rho_0 (-jk) v_1 = 0 \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (-jk)^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_1 \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = v_s^2 \rho_1 \end{array} \right.$$

$$(19) \Rightarrow v_1 = \frac{j\omega}{jk} \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (22)$$

$$(20) \Rightarrow \phi_1 = \frac{4\pi G \rho_1}{(-jk)^2} \quad (23)$$

(21) à (23) dans (18):

$$(j\omega) \times \frac{j\omega}{jk} \frac{\rho_1}{\rho_0} = -\frac{1}{\rho_0} (-jk) v_s^2 \rho_1 - (-jk) \frac{4\pi G}{(-jk)^2} \rho_1$$

on simplifie par $\rho_1 \neq 0$

$$\frac{(j\omega)^2}{(jk)} \frac{1}{\rho_0} = (jk) \frac{1}{\rho_0} v_s^2 + \frac{1}{(jk)} 4\pi G.$$

$$(j\omega)^2 = (jk)^2 v_s^2 + 4\pi G \rho_0$$

$$-\omega^2 = -k^2 v_s^2 + 4\pi G \rho_0.$$

$$k^2 v_s^2 = \omega^2 + 4\pi G \rho_0.$$

$$k^2 = (\omega^2 + 4\pi G \rho_0) \frac{1}{v_s^2}.$$

ou encore

7

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 - 4\pi\rho_0 G \quad (24)$$

si membre de droite > 0 , $\omega \in \mathbb{R}$
et tout va bien. C'est une OPM normale.

si membre de droite < 0 , ω est
imaginaire pure. On pose alors $\omega = \pm j\Omega$
et l'onde proposée s'écrit

$$\begin{aligned} v &= v_1 \exp [j(\pm j\Omega t - kx)] \\ &= v_1 \underbrace{\exp [\pm \Omega t]}_{\text{L'amplitude}} \exp(-jkx) \end{aligned}$$

peut diverger avec
le temps (instabilité)

La valeur critique correspond à l'annula-
tion de (24)

$$\underbrace{k^2}_{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2} v_s^2 \leq 4\pi\rho_0 G$$

$$\rightarrow 4\pi^2 v_s^2 \leq 4\pi\rho_0 G \lambda^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi v_s^2}{G\rho_0}} = \lambda_c} \quad (25)$$

Longueur
d'onde de
Jeans

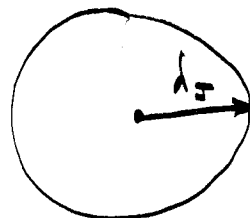
8

AN?

8

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0} \times \frac{RT}{\mu}}$$

$$\lambda_T^2 = \frac{4\pi^2 \lambda_T^3}{G \times 3 M_\odot} \times \frac{RT}{\mu}$$



$$\begin{aligned} M &= \rho_0 \times \frac{4}{3} \pi \lambda_T^3 \\ &\approx M_\odot \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_T = \frac{3 G M_\odot \mu}{4 \pi^2 R T}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_0 = \frac{3 M_\odot}{4 \pi \lambda_T^3}}$$

$$= \frac{3 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 2 \cdot 10^{30} \times 2,3 \cdot 10^{-3}}{4 \times 3^2 \times 8,31 \times 10}$$

$$= \frac{85 \times 10^{16}}{360 \cdot 10}$$

$$\boxed{\lambda_T \approx 2 \times 10^{14} \text{ m}} \quad (26)$$

et comparer à $\boxed{100 \text{ UA} \approx 1,5 \cdot 10^{13} \text{ m.}} \quad (27)$

Le nuage s'est contracté d'un facteur 10 en
initial

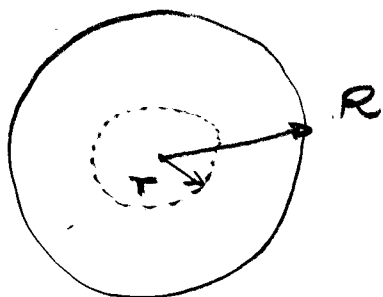
rayon (soit un facteur 10^3 en densité).

$$\boxed{\lambda_T = \frac{2 \cdot 10^{14}}{\pi \times 10^3 \times 3 \cdot 10^3} = \frac{2}{9} \frac{10^{14}}{10^{15}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ année lumière}} \quad (28)$$

9

9

les actions de pression internes compensant celles de gravité.



$$P(r) \times 4\pi r^2 \sim \frac{GM(r)}{r^2} \times \underbrace{[M - M(r)]}_{\text{masse au dessus de } r.}$$

On prend des valeurs moyennes: $r \sim \frac{R}{2}$ et $M(r) \approx M - M(r) = M/2$

$$\frac{P_c}{2} \times 4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \sim \frac{G(M/2)^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_c \sim \frac{2GM^2}{\pi R^4}} \quad \text{Estimation de } P_c \quad (29)$$

AN
$$P_c \sim \frac{2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times (2 \cdot 10^{30})^2}{3 \times (7 \cdot 10^8)^4}$$

$$\sim \frac{2 \times 24 \cdot 10^{49}}{13 \times (50)^2 \times 10^{32}}$$

$$\sim \frac{16}{2,5 \cdot 10^3} \times 10^{17}$$

(30)

$$P_c \sim 8 \cdot 10^{14} \text{ Pa}$$

au centre du soleil
(estimation)

10

$$P = \frac{\rho R T}{\mu} \Rightarrow T_c = \frac{P_c \times \mu}{\rho R} \quad (31) \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

AN

$$T_c = \frac{8 \times 10^{14} \times 1,2 \cdot 10^{-3} \times 4 \times 8 \times (7 \cdot 10^8)^3}{2 \cdot 10^{30} \cdot 8,3}$$

$$= \frac{8 \times 4}{2 \times 8} \times 3,5 \cdot 10^2 \times \frac{10^{11} \times 10^{24}}{10^{30}}$$

$$\Rightarrow T_c = 7 \cdot 10^7 \text{ K} \quad (32)$$

Température estimée au centre du soleil

Rq: dans (31), il faudrait prendre ρ_c au lieu de ρ (en réalité, ρ n'est pas uniforme et décroît avec r). Si on estime que $\rho \sim \frac{\rho_c}{2}$, on trouve $T_c \sim 3,5 \cdot 10^7 \text{ K}$.

Rq2: les modèles récents du soleil donnent $P_c = 2,7 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$
 $T_c = 1,6 \cdot 10^7 \text{ K}$.

11

élec

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{12}$$

$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Poisson})$$

gravitation

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

$$m$$

$$-G$$

$$\vec{g}_1 = -\frac{G m_1}{r^2} \vec{u}_{12}$$

$$\left[\oint \vec{g}_1 \cdot d\vec{s} = -4\pi G M_{\text{int}} \right]$$

thm Gauss (33)

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho \quad (\text{Poisson})$$

12

Application du thm de Gauss à une sphère de rayon r :

$$g(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi G m(r)$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{g}(r) = -\frac{G m(r)}{r^2} \vec{u}_r} \quad (34)$$

13

Loi de la statique ? PFS à un volume d^3V

$$(-\vec{\text{grad}} P) d^3V + (\rho d^3V) \vec{g} = \vec{0}$$

$$\boxed{-\vec{\text{grad}} P + \rho \vec{g} = \vec{0}} \quad (35)$$

14

(34) et (35)

$$\boxed{-\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g(r) = 0} \quad (36), \text{ où } g(r) = -\frac{G m(r)}{r^2}$$

15

$P_{\text{surface}} \ll P_{\text{centre}}$

On peut prendre arbitrairement

$$\boxed{P_{\text{surface}} = 0} \quad (37)$$

16

(36) et (34) :

$$+\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho \frac{G m(r)}{r^2}$$

si la balle est homogène, $\rho = \text{cte}$

$$\text{et } m(r) = \rho \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = - G \rho^2 \times \frac{4}{3} \pi r$$

$$\Rightarrow \int_{P(R)=0}^{P(0)=P_c} dP = - G \rho^2 \frac{4}{3} \pi \int_{r=R}^{r=0} r dr$$

$$\Rightarrow P_c = + G \rho^2 \frac{4}{3} \pi \times \frac{R^2}{2} \quad (37 \text{ bis})$$

$$\text{or } \rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

$$\Rightarrow P_c = G \frac{M^2}{(\frac{4}{3} \pi)^2 R^6} \times \frac{4}{3} \pi \frac{R^2}{2}$$

$$P_c = \frac{G M^2}{R^4} \times \frac{3}{2 \times 4 \times \pi} \quad (38)$$

Pression au centre du soleil pour
modèle $\rho = \text{cte}$

Par comparaison entre (38) et (29),
on voit que

$$P_{c \text{ modèle}} = \frac{3}{16} \underbrace{P_{c \text{ estimé}}}_{\text{pour (30)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\text{modele}} \sim 1,5 \cdot 10^{14} \text{ Pa.}} \quad (39) \quad \boxed{13}$$

Pression au centre du soleil :

En conséquence, T_c est aussi multipliée par $\frac{3}{16}$. [d'après (31) et (32)]

Donc $\boxed{T_c \sim 1,2 \cdot 10^7 \text{ K.}} \quad (40)$

17 Malheureusement, la courbe fournie manque d'explications. "10% M_{de} " signifie que le point correspond au rayon r tel que $m(r) = 10\% M$.

L'extrémité droite de la courbe correspond donc au centre de l'étoile ($r=0$)
la gauche correspond à $r=R$.

Pour le centre, on lit

$$T_c \approx 11 \cdot 10^6 \text{ K}$$

↓

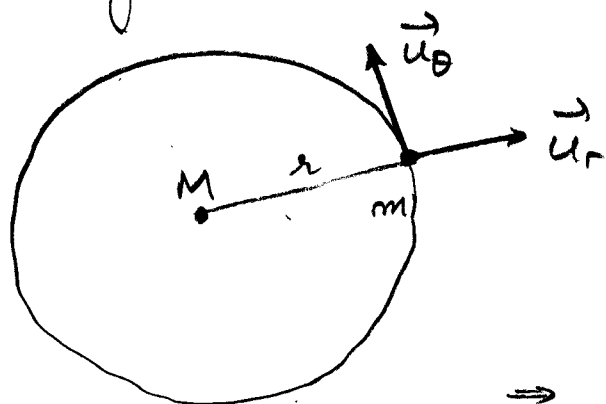
bon accord
avec le modèle
simple
(eq. 40)

$$P_c \approx 10^{16} \text{ Pa.}$$

↓

mauvais accord
avec (39),
(39) sous-estime P_c .

18 PFD au mobile m dans la référentiel galiléen lié au centre attracteur



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{GMm}{r^2} \vec{u}_r$$

$$= - \frac{v^2}{r} \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow - \frac{mv^2}{r} = - \frac{GMm}{r^2} \text{ en proj sur } \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}} : \text{ vitesse sur l'orbite}} \quad (41)$$

Energie mécanique ?

$$E_m = E_c + E_p \text{ avec } \begin{cases} E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} \\ E_p = - \frac{GMm}{r} \end{cases} \quad (42)$$

$$(43)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_m = - \frac{1}{2} \frac{GMm}{r}} \quad (44)$$

19 Par (42) et (43),

$$\boxed{\frac{E_c}{E_p} = - \frac{1}{2}} \quad (45)$$

20 Si r varie "lentement", les équations (42) à (45) restent vraies en remplaçant r par $r(t)$.

- $\varepsilon_m \searrow \xRightarrow{(44)}$ le rayon $r(t)$ diminue (45)
- (46) et (42) $\Rightarrow \boxed{\varepsilon_c \nearrow}$ (47) $\Rightarrow \boxed{v \nearrow}$ (48)
accélération
- (46) et (43) $\Rightarrow \boxed{\varepsilon_p \searrow}$ (49)

21

$\varepsilon_m = \varepsilon_c + \varepsilon_p$ est l'analogie de $U = e_c + e_p$.

Ainsi :

- $\varepsilon_m \searrow$ correspond à $U \searrow$.
- $\varepsilon_c \nearrow$ correspond à $e_c \nearrow$; c'est-à-dire une augmentation de l'agitation thermique, donc de la température.

En résumé, $U \searrow$ et $T \nearrow$.

Donc

$$\boxed{C_v = \frac{\partial U}{\partial T} < 0.} \quad (50)$$

22



La partie $m(r)$ crée le champ

$$\vec{g}(r) = - \frac{Gm(r)}{r^2} \vec{u}_r$$

Ainsi, une masse dm est soumise à la force de gravitation

$$dm \cdot \vec{g} = - \frac{G m(r) dm}{r^2} \vec{u}_r$$

$$= - \vec{\text{grad}} (d^3 \epsilon_p)$$

où $d^3 \epsilon_p = - \frac{G m(r) dm}{r} + \underbrace{\text{cte}}_{=0}$

représente l'énergie potentielle (choix conventionnel) de gravitation de dm .

On intégrant sur θ et φ , on obtient l'énergie potentielle gravitationnelle d'une coquille sphérique de masse dm :

$$d\epsilon_p = - \frac{G m(r) dm}{r}$$

Enfin, en sommant (intégration) sur toute la masse de l'étoile, on obtient

$$\underbrace{\epsilon_p}_{\substack{\text{noté} \\ E_g \text{ dans} \\ \text{l'énoncé}}} = - \int_{m=0}^M \frac{G m}{r} dm$$

(51)

23

17

Pour un GE, U ne dépend que de T :

$$du = c_v dT \quad \text{où } c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu}$$

massique.

$$\Rightarrow du = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} dT$$

$$\int \Rightarrow \boxed{u(T) = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} T} + \text{cte} \quad (52)$$

= 0
par convention

$$\text{On } P = \rho \frac{RT}{\mu} \Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu} \quad (53).$$

Par (52) et (53),

$$\boxed{u(T) = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho}} \quad (54)$$

Dans l'étoile, la température est élevée ($T_c \sim 10^7 \text{ K}$). Les molécules ne peuvent pas exister car l'agitation thermique donne lieu à des chocs violents qui cassent les liaisons covalentes intramoléculaires. Les gaz sont donc monoatomiques (et même ionisés : plasma).

Energie interne totale,

$$U = \int_0^M u \, dm \quad \text{(54)} = \int_{r=0}^R \underbrace{\frac{3}{2} \frac{P}{\rho}}_{\substack{\downarrow \\ \text{par parties}}} \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\substack{\uparrow \\ \text{par parties}}} = \int_{r=0}^R \left[\frac{3}{2} P \times \frac{4}{3} \pi r^3 \right]_0^R - \int_{r=0}^R \frac{3}{2} \times 4\pi \times \underbrace{\frac{2P}{2r}}_{-\rho \frac{Gm(r)}{r^2}} \times \frac{r^3}{3} dr$$

= 0 car $P(R) = 0$

$$= - \frac{1}{2} \int_{r=0}^R - Gm(r) r \times 4\pi \rho \, dr$$

$$= - \frac{1}{2} \int_{r=0}^R - \frac{Gm(r)}{r} \underbrace{4\pi r^2 \rho \, dr}_{dm}$$

$$= - \frac{1}{2} \int_{m=0}^M - \frac{Gm}{r} dm$$

$$= - \frac{1}{2} \underbrace{E_p}_{E_g \text{ de l'étoile}}$$

Résumé

$$U + \frac{1}{2} E_g = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{E_g + 2U = 0} \quad (55)$$

Théorème du Viriel.

On peut écrire (55) sous forme

$$\frac{U}{E_g} = - \frac{1}{2} \quad (55 \text{ bis}).$$

(55 bis) est l'analogue de (45).

19

25

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = -L$$

↑
perte d'énergie
par rayonnement électromag.

$$E_{\text{tot}} = E_g + \underbrace{U}_{-\frac{1}{2}E_g} = +\frac{1}{2}E_g. \quad (56).$$

(par 55 bis)

(56) montre que, $E_{\text{tot}} \downarrow$ implique $E_g \downarrow$,
c'est-à-dire $R \downarrow$.

En rayonnant, l'étoile se contracte. (57)
($R \downarrow$)

Or, $U = -\frac{1}{2} \underbrace{E_g}_{\downarrow}$ donc $U \uparrow$, soit $T \uparrow$

En se contractant, l'étoile s'échauffe (58)
($T \uparrow$)

Résumé $E_{\text{tot}} \downarrow$ et $T \uparrow$

soit

$$C_V = \frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial T} < 0 \quad (59).$$

Capacité thermique négative, comme pour le satellite.

26 Si C_v était > 0 , la baisse de E_{de} due au rayonnement impliquerait $T \downarrow$: cela n'allumerait pas les réactions nucléaires et la luminosité de l'étoile ne serait plus entretenue.

27 Plus l'étoile est massive, plus P_c est grand (cf (37 bis) si on suppose que ρ est le même pour toutes les étoiles, ce qui n'est pas vrai).

Donc, plus T_c est grand également. L'agitation thermique est plus forte, donc les collisions interatomiques plus fréquentes, ce qui augmente le taux de réactions nucléaires.

28 Libre parcours moyen $l = \frac{1}{K\rho}$

où $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$\Rightarrow$ $l = \frac{4\pi R^3}{3KM}$ (60)

$$l = \frac{4 \times \cancel{3} \times (7 \cdot 10^8)^3}{\cancel{3} \times 10^{-1} \times 2 \cdot 10^{30}}$$

$\uparrow$
 $k = 10^{-1} \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$

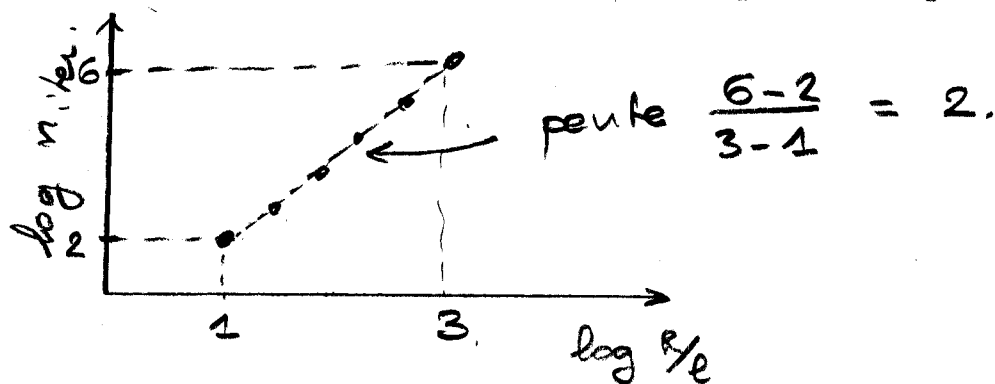
$$= 2 \times 3,5 \cdot 10^2 \times \frac{10^{24}}{10^{-1} 10^{30}}$$

$$\Rightarrow \boxed{l = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \quad (61)$$

La matière stellaire est donc relativement opaque.

29) Ainsi $\frac{R_{\odot}}{l} = \frac{7 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^{-3}} = 10^{11} \quad (62)$

Or le graphe de l'énoncé montre une relation linéaire en échelle log-log



$$\Rightarrow \frac{(\log n_{\text{iter}}) - 2}{(\log R/e) - 1} = 2$$

$$\Rightarrow \log(n_{\text{iter}}) = 2 \log\left(\frac{R}{e}\right) \quad (63)$$

$= 11 \text{ par (62)}$

$$\Rightarrow \boxed{n_{\text{iter}} = 10^{22}} \quad (64)$$

nb d'itérations avant que le photon puisse sortir du soleil

30 Ainsi, la distance effective parcourue par le photon est

$$L = n_{\text{iter}} \times l = 10^{22} \times 7 \cdot 10^{-3} = 7 \cdot 10^{19} \text{ m.}$$

Cette distance est parcourue à la célérité c , d'où le temps

$$\tau_{\text{ph}} = \frac{L}{c} = \frac{7 \cdot 10^{19}}{3 \cdot 10^8} \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ s.}$$

$$\approx \frac{2 \cdot 10^{11}}{\pi \cdot 10^7} \text{ années}$$

$$\approx 0,6 \cdot 10^4 \text{ années}$$

$$\boxed{\tau_{\text{ph}} \sim 6 \cdot 10^3 \text{ années}} \quad (65)$$

Durée nécessaire pour qu'un photon produit au centre puisse s'échapper de l'étoile. C'est long!

31 En réalité, il faut ajouter à τ_{ph} la durée totale des processus.

d'absorption / réémission, soit

$$\tau_{\text{abs/rée}} = n_{\text{ité}} \times \tau_{\text{emi}}^{\text{abs}} = 10^{22} \times 10^{-9} \text{ s.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{\text{abs/rée}} = 10^{13} \text{ s.}} \quad (66)$$

Ce temps est 100 fois supérieur à τ_{ph} !
Il est donc tout sauf négligeable -

$$\tau_{\text{tot}} = \underbrace{\tau_{\text{ph}}}_{2 \cdot 10^{11} \text{ s}} + \underbrace{\tau_{\text{abs/rée}}}_{10^{13} \text{ s}} \simeq \tau_{\text{abs/rée}}$$

$$\Rightarrow \tau_{\text{tot}} \simeq 10^{13} \text{ s} = \frac{10^{13}}{\pi \cdot 10^7} \sim 0,3 \cdot 10^6 \text{ années}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{\text{tot}} \sim 3 \cdot 10^5 \text{ ans}} \quad (67)$$

32

Gas monoatomique

$$\begin{cases} C_{\text{vm}} = \frac{3}{2} R \\ C_{\text{pm}} = \frac{5}{2} R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{C_{\text{pm}}}{C_{\text{vm}}} = \frac{5}{3} = 1,6} \quad (68)$$

33

L'éq. (5) de l'énoncé est le PFD appliqué à un volume élémentaire d^3x de l'étoile.

$$dm \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = - \underbrace{\left(\vec{\text{grad}} P \right)}_{\frac{\partial P}{\partial r} \vec{u}_r} \underbrace{d^3 \vec{r}}_{\frac{dm}{\rho}} + dm \underbrace{\vec{g}^s(r)}_{-\frac{Gm}{r^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{Gm}{r^2}} \quad (69)$$

34

La version différentielle de l'équation (6) de l'énoncé s'écrit $dm = 4\pi r^2 \rho dr$. (70)

Ainsi $\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$ (71) et $\frac{\partial r_0}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0}$ (72)

ou encore, il y a des équivalences entre opérateurs

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r} \end{array} \right. \quad (73)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \end{array} \right. \quad (74)$$

Se pose $\begin{cases} r(m, t) = r_0(m) + r_1(m, t) \end{cases} \quad (75)$

$$\begin{cases} \rho(m, t) = \rho_0(m) + \rho_1(m, t) \end{cases} \quad (76)$$

(75) et (76) dans (71):

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_0}{\partial m} + \frac{\partial r_1}{\partial m} &= \frac{1}{4\pi (r_0 + r_1)^2 (\rho_0 + \rho_1)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_0^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{r_1}{r_0}\right)^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)} \end{aligned}$$

on pose $\frac{r}{r_0} = \epsilon_r(m,t)$ et $\frac{\rho}{\rho_0} = \epsilon_p(m,t)$.

Il vient, en linéarisant (les ϵ sont $\ll 1$)

$$\frac{\partial}{\partial m} [r_0 (1 + \epsilon_r)] = \frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0} \underbrace{(1 - 2\epsilon_r)(1 - \epsilon_p)}_{\approx 1 - 2\epsilon_r - \epsilon_p}$$

$$\Rightarrow (1 + \epsilon_r) \frac{\partial r_0}{\partial m} + r_0 \frac{\partial \epsilon_r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0} - (2\epsilon_r + \epsilon_p) \times \frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial r_0}{\partial m}}_{\substack{\uparrow \\ \text{se compensent par (72)}}} + \epsilon_r \underbrace{\frac{\partial r_0}{\partial m}}_{\text{par (72)}} + r_0 \underbrace{\frac{\partial \epsilon_r}{\partial m}}_{\text{par (73)}} = \underbrace{\frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0}}_{\substack{\uparrow \\ \text{se compensent par (72)}}} - (2\epsilon_r + \epsilon_p) \frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0}$$

$$\Rightarrow \epsilon_r \times \frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0} + r_0 \frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r_0} = -(2\epsilon_r + \epsilon_p) \frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_0 \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r_0} = -3\epsilon_r - \epsilon_p} \quad (77)$$

C'est bien l'équation demandée.

35 Les oscillations sont adiabatiques quasistatiques. La loi de Laplace s'applique:

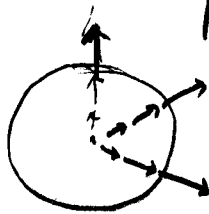
$$P \rho^{-\gamma} = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dP}{P}}_{\epsilon_P} = \gamma \underbrace{\frac{d\rho}{\rho}}_{\epsilon_p} \Rightarrow \boxed{\epsilon_P = \gamma \epsilon_p = \frac{5}{3} \epsilon_p} \quad (78)$$

36

$\epsilon_r = cte$: l'amplitude des oscillations
est $\epsilon_r \times r_0$ pour un point situé en r_0
à l'équilibre

L'étoile subit une
homothétie par
rapport à son centre.



26

37 Les dérivées de ϵ_r sont nulles. L'équation (7)
de l'énoncé se résume à

$$\frac{A}{1-\frac{3}{2}\gamma} \epsilon_r = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0} \quad (79)$$

38 Par conséquent, $0 = \frac{3\omega_0^2}{2\pi G \rho_0 \gamma} + \frac{2(4-3\gamma)}{\gamma}$

$$\Rightarrow \frac{3\omega_0^2}{2\pi G \rho_0 \gamma} = \frac{2 \times (3\gamma - 4)}{\gamma} \quad (79 \text{ bis})$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{3} (3\gamma - 4)}} \quad (80)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \pi G \frac{M_0}{\frac{4}{3} \pi R_0^3} \times (3\gamma - 4)}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{GM_0}{R_0^3} \times (3\gamma - 4)}} \quad (81)$$

$$\gamma = 5/3$$

$$\text{AN: } \omega_0 = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 2 \cdot 10^{30}}{(7 \cdot 10^8)^3} \times 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{25} \frac{10^{19}}{10^{24}}} = \frac{1}{5} \cdot 10^{-5/2} = \frac{1}{5} \times 10^{-2} \times \frac{1}{10^{0,5}} \approx 1/5$$

$$\omega_0 \sim \frac{1}{\frac{15}{0.06}} \cdot 10^{-2} \text{ rad. s}^{-1}$$

27

$$\omega_0 \sim 6 \cdot 10^{-4} \text{ rad. s}^{-1} \quad (82)$$

Pulsation temporelle des oscillations du soleil.

Période : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \times 3}{6 \cdot 10^{-4}} = 10^4 \text{ s}$

$$T_0 \sim 3 \text{ heures} \quad (83) \text{ Période des oscillations du soleil.}$$

39 La relation (80) lie ω_0 (et donc T_0) à la seule variable ρ_0 , d'où la nom "relation période - masse volumique".

40 Si $A = 14 > 0$, il faut ajouter ce A au second membre de (79 bis). Cela fait augmenter ω .

Ainsi, $\omega_1 > \omega_0 \quad (84)$

41

- $M = 21 M_\odot$
- sur la courbe, on lit $R \sim 1,4 \cdot 10^3 R_\odot$ dans la situation d'équilibre.

Ainsi

$$\rho_{\text{étoile}} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{21}{(1,4 \cdot 10^3)^3} \rho_\odot$$

$$\rho_{\text{étoile}} = \frac{21}{4 \cdot 10^3} \rho_{\odot} = 5 \cdot 10^{-3} \rho_{\odot} \quad (84 \text{ bis}) \quad \boxed{28}$$

Ainsi, en utilisant (80) pour le Soleil et l'étoile de $21 M_{\odot}$,

$$\frac{\omega_{\odot}}{\omega_{\text{étoile}}} = \sqrt{\frac{\rho_{\odot}}{\rho_{\text{étoile}}}} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 10^{-3}}} \sim \frac{1}{2} \cdot \underbrace{10^{+4,5}}_{10^{+4} \cdot \underbrace{10^{0,5}}_{\sim 3}} \sim 1,5 \cdot 10^{+4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T_{\text{étoile}}}{T_{\odot}} \sim 1,5 \cdot 10^{+4}} \quad (85)$$

$$\Rightarrow T_{\text{étoile}} \sim 1,5 \cdot 10^{+4} \times \begin{cases} 10^4 \text{ s} \\ 3 \text{ heures} \end{cases} \sim \begin{cases} 4,5 \cdot 10^4 \text{ heures} \\ 1,5 \cdot 10^8 \text{ s} \end{cases} \quad (85 \text{ bis})$$

$$\text{Or } 1 \text{ année} \sim \pi \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{\text{étoile}}}{1 \text{ année}} \sim \frac{1,5 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^7} \sim \frac{1}{2} \times 10 \sim 5$$

$$\text{soit } \boxed{T_{\text{étoile}} \sim 5 \text{ ans}} \quad (86)$$

Sur les courbes, on lit une période d'environ 3 ans. L'ordre de grandeur (86) est correct, surtout si on tient compte du fait que les calculs

sont effectués grossièrement à la main.

42

Le rayon de l'étoile varie considérablement (entre 500 et 2500 $R_{\odot}$) lors des oscillations. Il ne s'agit donc pas de petites perturbations, mais bien d'un véritable cataclysme.

43

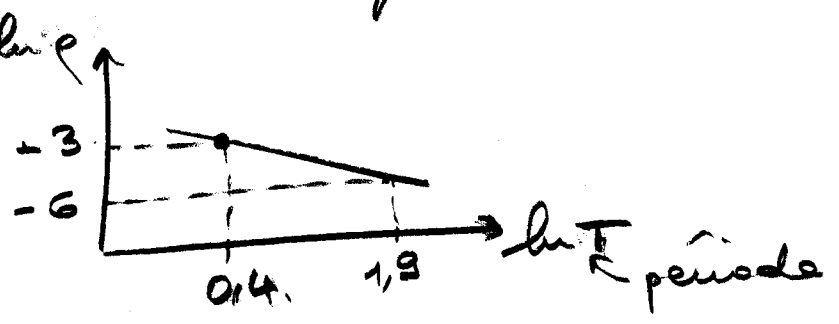
La relation (80) montre que

$$T^{-1} \propto \rho^{1/2}$$

$$\Rightarrow -\ln T \propto \frac{1}{2} \ln \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln \rho \propto -2 \ln T} \quad (87)$$

On attend une droite de pente (-2) sur la courbe.



la pente est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \sim \frac{-6 + 3}{1,9 - 0,4} = \frac{-3}{1,5} = -2$$

ce résultat est bien en accord avec (87).

Localisons l'étoile précédente sur la courbe. Par (84 bis)

$$\rho_{\text{étoile}} = 5 \cdot 10^{-9} \times \rho_{\odot}$$

$$\frac{M_{\odot}}{\frac{4}{3}\pi R_{\odot}^3} \simeq 1,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{étoile}} = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$$

Par ailleurs, (85 bis) donne

$$T_{\text{étoile}} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ s} = 5 \text{ ans.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log T_{\text{étoile}} \sim 0,7 & \text{en années.} \\ \log \rho_{\text{étoile}} \sim -3,5 & \text{en } \text{g} \cdot \text{m}^{-3} \end{cases}$$

ces valeurs semblent correspondre à un point de la courbe.

Les unités plausibles sont

$\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$ et années

45

Equations de Maxwell dans un plasma

- peu dense (interactions e-e-négligées)
- non relativiste ($v \ll c$ pour négliger $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ devant $q\vec{E}$)

M - Thomson : $\text{div } \vec{B} = 0$ (88)

M - Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ (89)
 plasma localement neutre
 (possible lors du passage d'une onde plane)

M - Faraday : $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (90)

M - Ampère : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (91)

De plus, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ par le plasma.
 Pour trouver la conductivité complexe γ , on raisonne sur un électron (on fait d'emblée l'hypothèse que les ions sont immobiles, car $m_{\text{ion}} > 10^3 m_{\text{electron}}$).

PFD à un électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + \underbrace{q\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\ll q\vec{E}} \quad (32)$$

En régime harmonique (pulsation temporelle ω),

32

$$m(i\omega) \vec{v} = q \vec{E} \quad (\text{où } i^2 = -1)$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{q}{m(i\omega)} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = n q \vec{v} = \underbrace{\frac{n q^2}{i m \omega}}_{\chi} \vec{E}} \quad (93)$$

Pour l'électron, $q = -e$, donc la conductivité χ du plasma est

$$\boxed{\chi(\omega) = \frac{ne^2}{i m \omega}} \quad (94)$$

Rq χ n'est pas réelle (elle est imaginaire pure), donc la relation $\vec{J} = \chi \vec{E}$ n'a de sens qu'en $\mathbb{C}$.

Par conséquent, il faut écrire toutes les équations de Maxwell (88) à (91) en $\mathbb{C}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{D} = 0 \quad (95) \\ \text{div } \vec{B} = 0 \quad (96) \\ \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (97) \\ \text{rot } \vec{D} = \mu_0 \chi \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (98) \end{array} \right.$$

On prend le rot de (97):

33

$$\text{rot}(\text{rot } \underline{\underline{E}}) = \text{rot} \left[- \frac{\partial \underline{\underline{B}}}{\partial t} \right] \quad \left(\text{rot et } \frac{\partial}{\partial t} \text{ commutent: thm de Schwarz} \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{grad}(\text{div } \underline{\underline{E}})}_{=0} - \Delta \underline{\underline{E}} = - \frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\text{rot } \underline{\underline{B}}}_{\text{par (98)}})$$

$$\Rightarrow \Delta \underline{\underline{E}} = + \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu_0 \gamma \underline{\underline{E}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial t} \right]$$

$$\Delta \underline{\underline{E}} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{\underline{E}}}{\partial t^2} \quad (99)$$

Equation de propagation sur $\underline{\underline{E}}$

47

On cherche une solution de (99) sous la forme d'une pseudo onde:

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_0 \exp[i(\omega t - kx)] \quad (100)$$

(100) dans (99) donne:

$$(-ik)^2 \underline{\underline{E}} = \underbrace{\mu_0 \gamma \times (i\omega)}_{\frac{ne^2}{m} \text{ par (94)}} \underline{\underline{E}} + \mu_0 \epsilon_0 (i\omega)^2 \underline{\underline{E}}$$

On simplifie par $\underline{\underline{E}}$, qui est non nul:

$$-k^2 = \mu_0 \frac{ne^2}{m} - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$$

$$= \underbrace{\mu_0 \epsilon_0}_{\frac{1}{c^2}} [\omega_p^2 - \omega^2] \quad \text{où } \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2) \quad \text{où} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{m \epsilon_0}}} \quad (101)$$

Relation de dispersion des OPPM dans le plasma -

Pour que (100) soit effectivement une OPPM, il faut que $\underline{k} \in \mathbb{R}$, donc $\underline{k}^2 \in \mathbb{R}^+$, soit, d'après (101),

$$\boxed{\omega > \omega_p} \quad (102)$$

Condition pour qu'une OPPM puisse se propager dans le plasma.

Le plasma ne laisse passer que les ondes de haute fréquence ("filtre passe-haut")

- Si $\omega < \omega_p$, $\underline{k}^2 \in \mathbb{R}^- \Rightarrow \underline{k}$ est imaginaire pur $\Rightarrow$ (100) est une onde évanescente

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{le plasma est opaque aux ondes, tq } \omega < \omega_p.} \quad (103)$

48

Si l'hélium est doublement ionisé, n est multiplié par 2. Dans ce cas, la pulsation de plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{m \epsilon_0}}$

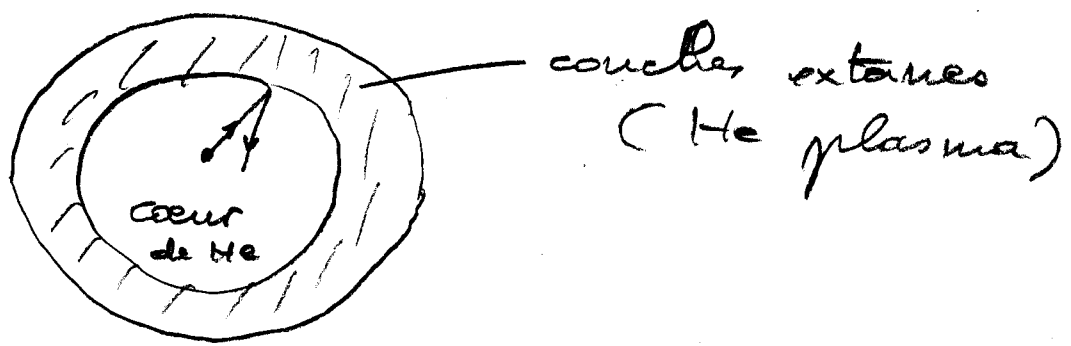
se trouve multipliée par $\sqrt{2}$.

ainsi, la bande interdite (= plage d'opacité $\omega \in [0, \omega_p]$) se trouve élargie.

49

Comme χ est imaginaire pure, $\vec{J}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature, donc

$\langle P_{tot} \rangle = \langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle = 0$: le plasma ne s'échauffe pas par effet Joule. Ainsi les ondes qui ne peuvent pas se propager dans le plasma ($\omega < \omega_p$) sont réfléchies (renvoyées d'où elles viennent).



Par conséquent, l'énergie produite ds le cœur par les réactions nucléaires ne peut pas être évacuée sous forme de rayonnement.

→ le cœur s'échauffe. (régime non permanent).

Dans le cœur, $T \uparrow$ (donc $P \uparrow$).

Donc le cœur se dilate, ce qui dilate aussi les couches externes de H^+ plasma. Le plasma devient donc moins dense ($n \downarrow$ donc $n_p \downarrow$) et donc moins opaque.

L'énergie peut donc s'évacuer par ondes électromagnétiques (la luminosité de l'étoile est augmentée dans cette phase).

Par conséquent, $T_{\text{cœur}} \downarrow \Rightarrow P_{\text{cœur}} \downarrow$

$\Rightarrow$ l'étoile se reconstruit sous l'effet de son autogravité. Son atmosphère redevient opaque (phase de faible luminosité) : c'est le retour à la situation initiale.