

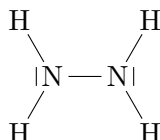
Centrale-Supélec 2016, filière PSI, épreuve de Physique-Chimie 2

Corrigé proposé par JPh Caniparoli ; pour me contacter (erreurs, ...) : artefact.act@wanadoo.fr

1 l'hydrazine

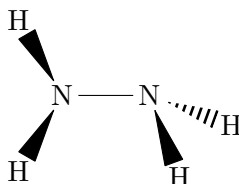
1.1

- électrons de valence : N : 5, H : 1, soit au total 14 électrons à répartir
- structure :
- 10 électrons engagés dans des liaisons, un doublet non-liant sur chaque atome d'azote.



Chaque atome d'azote a une structure AX₃E, donc une géométrie tétraédrique. La répulsion entre le doublet non-liant et un doublet liant étant plus forte que la répulsion entre doublets liants, l'angle entre liaisons N–H est comparable et légèrement inférieur à l'angle tétraédrique 109°.

Le moment dipolaire est non nul, donc les moments dipolaires associés à la polarité des liaisons N–H pour chacun des atomes d'azote ne se compensent pas : la structure tridimensionnelle ne présente pas de centre d'inversion par rapport au milieu de la liaison N–N (en termes non exigibles la conformation n'est pas trans, d'après wikipedia, il s'agit d'une conformation gauche)



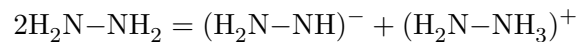
1.2

Les températures de fusion et d'ébullition de l'hydrazine, comparables à celles de l'eau, indiquent des interactions intermoléculaires élevées. Ceci peut s'expliquer par l'interaction dipolaire entre molécules, et la possibilité de liaisons hydrogène entre azote d'une molécule et hydrogène d'une molécule voisine.

Pour la même raison (interactions dipolaires, possibilité de liaison hydrogène) la molécule d'hydrazine est très miscible avec l'eau.

1.3

Le caractère amphotère est lié au transfert d'un proton entre deux molécules identiques :



La constante K_1 est bien plus faible que celle associée à l'eau : l'autoprotolyse de l'hydrazine est beaucoup plus limitée que celle de l'eau, puisque dans hydrazine pure

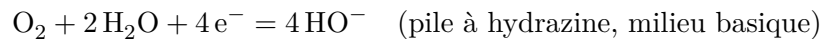
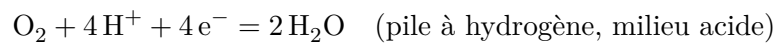
$$[(\text{H}_2\text{N}-\text{NH})^-] = [(\text{H}_2\text{N}-\text{NH}_3)^+] = \sqrt{K_1}c^\ominus = 10^{-12,5} \text{ mol L}^{-1}$$

2 pile à hydrazine

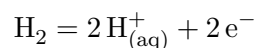
2.1

2.1.1

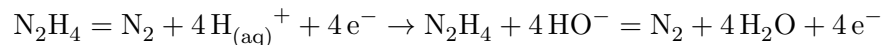
Pour chacune des piles, le dioxygène est l'oxydant (potentiel le plus élevé), d'où les demi-réactions



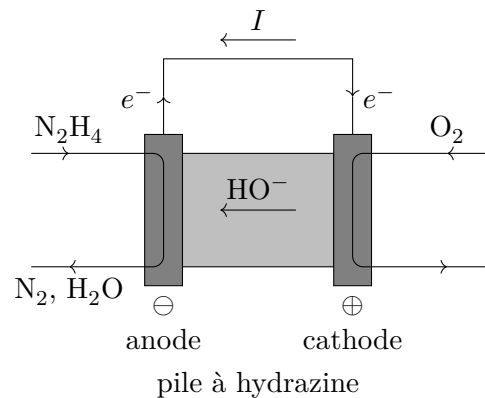
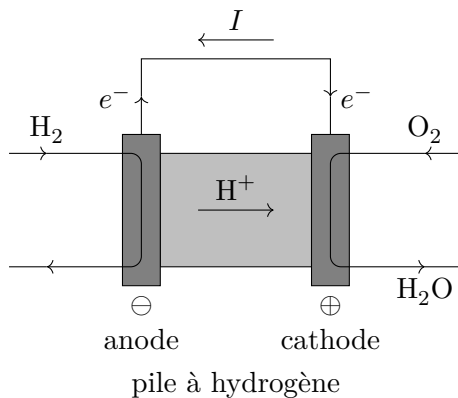
— pour la pile à hydrogène, le dihydrogène est oxydé selon la demi-réaction en milieu acide



— pour la pile à hydrazine, celle-ci est oxydée selon la demi-réaction en milieu basique



2.1.2



L'électrode où se forme l'eau, produit de la réaction, dépend du caractère acide ou basique de l'électrolyte.

2.1.3

— Pile à hydrogène : $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O}$ avec échange de 4 électrons

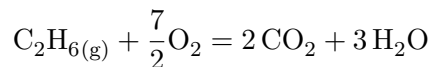
$$\log K^\ominus = \frac{4(E^\ominus(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) - E^\ominus(\text{H}_{(\text{aq})}^+/\text{H}_2))}{0,06} = 82 ; K^\ominus = 10^{82}$$

— Pile à hydrazine : $\text{N}_2\text{H}_4 + \text{O}_2 = \text{N}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$ avec échange de 4 électrons

$$\log K^\ominus = \frac{4(E^\ominus(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) - E^\ominus(\text{N}_2/\text{N}_2\text{H}_4))}{0,06} = 104 ; K^\ominus = 10^{104}$$

Les deux constantes sont très supérieures à 1 : les réactions sont totales

2.1.4



La combustion produit une quantité de chaleur qui ne peut être totalement convertie en travail dans une machine thermique cyclique, tandis que dans la pile à combustible l'énergie chimique est directement transformée en travail électrique.

2.2 Choix des électrodes

2.2.1

Les électrodes utilisées dans les piles à combustibles ne doivent pas participer aux réactions d'électrodes (électrodes inertes)

2.2.2

1. — le domaine d'immunité est le domaine d'existence du métal dans le diagramme : dans ce domaine de valeurs du potentiel et du pH le métal est stable
— les domaines de corrosion sont les domaines dans lesquels le métal est oxydé en ions solubles, qui ne peuvent former une couche protectrice séparant le métal des espèces oxydantes en solution : l'oxydation du métal se poursuit tant que l'état du système est représenté par un point appartenant à un domaine de corrosion ;
— les domaines de passivation sont les domaines dans lesquels le métal est oxydé pour former des espèces insolubles pouvant se déposer à la surface du métal et former une couche imperméable séparant le métal des espèces oxydantes et bloquant les réactions d'oxydation du métal : une fois cette couche formée, le métal est protégé contre la poursuite de son oxydation par passivation
2. les domaines A, B, C correspondent aux domaines de stabilité respectifs de H_2 , H_2O et O_2

2.2.3

— l'électrolyte de la pile à hydrogène est très acide, or pour des pH inférieurs à 5, le domaine de stabilité de l'eau n'a de partie commune qu'avec le domaine de corrosion du cobalt et du nickel : ces deux métaux sont corrodés dans le domaine de pH de l'électrolyte et ne peuvent pas servir d'électrodes inertes, contrairement au platine qui ne présente à tout pH qu'un domaine de d'immunité et un domaine de passivation :

Il n'est pas possible d'utiliser des électrodes de platine ou de cobalt pour la pile à hydrogène ; des électrodes de platine conviennent

- l'électrolyte de la pile à hydrazine est basique, domaine de pH dans lequel le domaine de stabilité de l'eau correspond aux domaines d'immunité et de passivité du cobalt et du nickel : il est possible d'utiliser ces métaux pour les électrodes de la pile à hydrazine. L'intérêt par rapport au platine est le coût bien moindre de ces métaux.

2.3 rendement de la pile à hydrazine

2.3.1

L'enthalpie de formation du dioxygène gazeux n'est pas donnée car elle est nulle, puisqu'il s'agit d'un corps simple dans son état standard de référence à 298 K

2.3.2

- La grandeur utile dans la pile est le travail électrique qu'elle peut fournir, égal à $-\delta W_e$ lors d'une variation d'avancement $d\xi$ (le signe $-$ provient de la convention de l'énoncé : δW_e représente le travail reçu par la pile) ;
- ce travail résulte de la réaction chimique, l'énergie emmagasinée dans les liaisons chimiques étant convertie non seulement en travail électrique mais également en transfert thermique qui représente une perte. Pour une variation d'avancement $d\xi$, la quantité d'énergie chimique transformée vaut $-(\delta W_e + \delta Q)$
- on peut donc définir le rendement thermodynamique de la pile par la relation

$$\rho = \frac{-\delta W_e}{-(\delta W_e + \delta Q)} = \frac{\delta W_e}{\delta W_e + \delta Q}$$

2.3.3

1. — le premier principe $dU = \delta W_e + \delta W_p + \delta Q = \delta W_e - p_e dV + \delta Q$ s'écrit pour une transformation isobare pour laquelle $p_e = p = \text{cste}$

$$\delta U = -p dV + \delta W_e + \delta Q = -d(pV) + \delta W_e + \delta Q$$

soit comme $H = U + pV$

$$dH = \delta W_e + \delta Q$$

- le second principe s'écrit pour une transformation réversible ($\delta S_c = 0$)

$$dS = \frac{\delta Q}{T_e} + \delta S_c = \frac{\delta Q}{T_e} : \delta Q = T_e dS$$

soit pour une transformation isotherme pour laquelle $T_e = T = \text{cste}$

$$\delta Q = d(TS)$$

- En combinant ces deux relations :

$$\delta W_e = dH - \delta Q = d(H - TS) = dG ; \delta Q = dH - \delta W_e = d(H - G)$$

2. en introduisant les grandeurs de réaction :

$$dH = \Delta_r H d\xi \approx \Delta_r H^\ominus d\xi ; dG = \Delta_r G d\xi = (\Delta_r G^\ominus + RT \ln Q) d\xi$$

En supposant les activités égales à 1 (ce qui est vérifié pour toutes les espèces physico-chimique, sauf $N_{2(\text{dissous})}$ dont l'activité dépend de la concentration), $Q = 1$, d'où $dG = \Delta_r G^\ominus d\xi$

3. le rendement a pour expression

$$\rho = \frac{\delta W_e}{\delta W_e + \delta Q} = \frac{\Delta_r G^\ominus}{\Delta_r H^\ominus}$$

grâce à la loi de Hess, les données permettent de calculer pour la réaction $N_2H_4 + O_2 = N_2 + 2H_2O$ à 298 K

$$\Delta_r H^\ominus = -531 \text{ kJ mol}^{-1} ; \Delta_r S^\ominus = -123 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} ; \Delta_r G^\ominus(298 \text{ K}) = -494 \text{ kJ mol}^{-1}$$

soit

$$\rho = \frac{\Delta_r G^\ominus}{\Delta_r H^\ominus} = 0,93$$

2.3.4

Pour le cycle de Carnot entre les températures froide T_f et T_c

$$\rho_C = 1 - \frac{T_c}{T_f}$$

en prenant $T_c = 300 \text{ K}$ (température ambiante) et chaude $T_c = 1000 \text{ K}$ (température de combustion)

$$\rho_C = 0,7$$

Le rendement théorique du cycle de Carnot est nettement inférieur à celui de la pile à combustible, même dans le cas limite réversible (le rendement réel d'une machine thermique est de l'ordre de 0,3).

3 Propulsion chimique du projectile

3.1

— la réaction de décomposition (supposée à T et P fixées) de la poudre libère une énergie

$$E_\chi = m_c \Delta_r H_c^\ominus = 1,22 \text{ kJ}$$

— le projectile acquiert une énergie cinétique à la sortie du canon $E_c = m_p v^2/2$

— la vitesse est estimée d'après la figure 4 : la vitesse est une fonction croissante du temps (accélération du projectile), ce qui permet l'attribution des courbes de la sous-figure de gauche. Cette attribution est confirmée par la comparaison des deux sous-figures, qui permet d'identifier les courbes de pression $p(x)$ et $p(t)$ analogues puisque x est fonction croissante de t : la pression augmente initialement lorsque la vitesse du projectile est faible et que les gaz se forment, puis diminue lorsque la vitesse est suffisante pour que l'effet d'augmentation de volume (détente) l'emporte sur l'augmentation de la quantité de gaz. On lit à la sortie du canon $x = 17 \text{ cm}$, $v_p \approx 400 \text{ m s}^{-1}$ soit

$$E_c = 640 \text{ J}$$

- la fraction d'énergie chimique convertie en énergie cinétique vaut

$$\frac{E_c}{E_\chi} = 0,53$$

3.2

La formulation est à la fois trop vague et trop précise (quelle forme d'énergie se conserve?). Le résultat est donné, mais sa justification précise me semble délicate, et l'énoncé ne fournit absolument aucune indication.

- Le système {poudre + projectile} est un système fermé auquel on peut appliquer le premier principe de la thermodynamique entre l'état initial où la combustion de la poudre n'a pas commencé, et un instant quelconque, si on considère l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local (vérifiée a priori puisque l'énoncé définit la pression du gaz), en tenant compte du terme d'énergie cinétique important pour le projectile

$$\Delta U + \Delta E_c = W_{\text{ext}} + Q_{\text{ext}}$$

- La transformation est rapide : on suppose la transformation adiabatique, $Q_{\text{ext}} = 0$;
- W_{ext} est le travail de la pression exercée par l'air en avant du projectile. La pression des gaz de combustion (≈ 1000 bar) est très supérieure à la pression atmosphérique : même si le mouvement du projectile entraîne une augmentation de la pression de l'air en avant du projectile, on peut supposer le travail associé négligeable devant les variations d'énergie associées à la transformation : $W_{\text{ext}} \approx 0$. On obtient ainsi une équation conservation de l'énergie

$$\Delta U + \Delta E_c = 0$$

- Le terme d'énergie cinétique est essentiellement celui du projectile ($m_p \approx 20m_c$), donc entre l'instant initial ($v_p = 0$) et un instant quelconque

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m_p v^2$$

- On suppose ΔU uniquement lié aux transformations de la poudre, en négligeant les transferts thermiques entre les gaz et le projectile, et on utilise le raisonnement du calcul d'une température de flamme, en décomposant la transformation en deux étapes :
 - réaction à T et P fixée d'une masse m' de poudre libérant de l'énergie chimique : $\Delta U_1 \approx \Delta H = m' \Delta_r H_r^\ominus$ la masse m' correspond d'après la figure 3 à un volume $S(l-z)$ tandis que la masse initiale m_c de poudre occupe un volume Sl , donc en supposant la poudre homogène

$$m' = m_c \frac{l-z}{l} ; \Delta U_1 = m_c \frac{l-z}{l} \Delta_r H_r^\ominus$$

- variation de température des produits de la réaction, assimilés à n moles gaz parfait, la variation de température de la poudre n'ayant pas encore réagi étant négligée, et la température atteinte étant supposée importante devant la température initiale :

$$\Delta U_2 = nC_{vm}\Delta T \approx nC_{vm}T = \frac{nRT}{\gamma-1} = \frac{pV}{\gamma-1}$$

en utilisant les propriétés du gaz parfait :

$$nR\Delta T = \Delta(pV) ; C_{vm} = \frac{R}{\gamma-1}$$

initialement la poudre est à la pression atmosphérique très inférieure à la pression atteinte, donc on suppose que la valeur initiale du produit pV est négligeable :

$$\Delta U_2 \approx \frac{pV}{\gamma - 1} = \frac{pS(x + l - z)}{\gamma - 1}$$

en considérant l'ordre de grandeur $L \gg l$ avec $L = 17 \text{ cm}$ et $l = 5,1 \text{ mm}$, on peut supposer à tout moment $x \gg l - z$, soit finalement

$$\Delta U_2 \approx \frac{pSx}{\gamma - 1}$$

— en regroupant finalement les différents termes, on obtient

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + \frac{1}{2}m_p v^2 = m_c \frac{l - z}{l} \Delta_r H_r^\ominus + \frac{pSx}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}m_p v^2 = 0$$

soit, comme $\Delta_r H_r^\ominus < 0$

$$m_c \frac{l - z}{l} |\Delta_r H_r^\ominus| = \frac{pSx}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}m_p v^2 = 0$$

3.3

D'après la figure 4 on estime la pression et la vitesse à la sortie du canon : $p \approx 160 \text{ bar}$, $v \approx 390 \text{ m s}^{-1}$. En reportant ces valeurs dans l'équation précédente, avec $m_c = 0,38 \text{ g}$, $m_p = 8 \text{ g}$, $S = \pi d^2/4$ où $d = 9 \text{ mm}$, $x = L = 17 \text{ cm}$ et $\Delta_r H_r^\ominus = -3,2 \text{ kJ g}^{-1}$, on calcule la valeur de la fraction de poudre brûlée

$$\frac{m'}{m_c} = \frac{l - z}{l} = 0,86$$

3.4

L'intégration de la relation donnée donne en supposant α constant

$$\Delta z = -\alpha \int p dt$$

d'après la sous-figure de droite de la figure 4, on peut estimer la surface sous la courbe $p(t)$ entre l'instant initial et l'instant où le projectile sort du canon à 11 carreaux, la surface d'un carreau correspondant à 500 bar ms , soit

$$\int p dt = 5,5 \text{ bar s}$$

entre ces deux instants, d'après la question précédente

$$\frac{\Delta z}{l} = \frac{z - l}{l} = -0,86 \quad : \quad \Delta z = -0,86l = -4,4 \text{ mm}$$

On en déduit

$$\alpha = 0,8 \text{ mm bar}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

3.5

L'équation de la question III.B relie les trois inconnues p , x et z (v étant la dérivée temporelle de x elles sont liées par l'équation $v = \frac{dx}{dt}$). L'équation de la question III.D relie z et p , donc ces équations doivent être complétées par une dernière équation entre les variables p , x et z pour obtenir un jeu complet d'équations.

La seconde loi de Newton appliquée au projectile en projection selon l'axe x , s'écrit dans l'approximation $p \gg p_{\text{ext}}$

$$m_p \frac{dv}{dt} = m_p \frac{d^2x}{dt^2} = (p - p_{\text{ext}})S \approx pS$$

On obtient ainsi un jeu complet d'équations permettant de déterminer la loi $x(t)$.

4 Balistique

4.1

Le projectile n'est soumis qu'à la force de pesanteur, donc la seconde loi de Newton s'écrit en projection dans un repère donc l'axe Oz est dirigé selon la verticale ascendante

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0 ; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

Par double intégration, en choisissant O confondu avec le point initial du mouvement de chute libre, et l'axe Ox tel que la vitesse initiale soit contenue dans le plan Ozx

$$x(t) = v_{0x}t ; \quad y(t) = 0 ; \quad z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0z}t$$

La portée correspond au point où la trajectoire parabolique repasse par l'ordonnée $z = 0$ soit les équations

$$D = v_{0x}t_0 ; \quad 0 = -\frac{g}{2}t_0^2 + v_{0z}t_0 = t_0 \left(-\frac{g}{2}t_0 + v_{0z} \right)$$

puis en éliminant le temps t_0

$$t_0 = \frac{2v_{0z}}{g} ; \quad D = \frac{2v_{0x}v_{0z}}{g}$$

Le tir étant effectué sous un angle de 45° par rapport à l'horizontale $v_{0x} = v_{0z} = v_0/\sqrt{2}$ puisque $\cos(45^\circ) = \sin(45^\circ) = \sqrt{2}/2$, donc

$$D = \frac{v_0^2}{g}$$

Application numérique

$$v_0 = \sqrt{Dg} = 384 \text{ m s}^{-1} ; \quad E_{c0} = \frac{mv_0^2}{2} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ J}$$

4.2

4.2.1

Le rapport des effets convectif (quantité de mouvement) et diffusif (viscosité) de l'écoulement de l'air autour du projectile en mouvement est estimé par le nombre de Reynolds, qu'on calcule avec la vitesse initiale du projectile

$$Re = \frac{\rho d_e v_0}{\eta} = 1,5 \cdot 10^6 \gg 2000$$

On en déduit que l'effet convectif est prépondérant sur l'effet diffusif : l'effet de la quantité de mouvement est prépondérant sur l'effet de la viscosité dans la force exercée par le fluide sur le projectile.

4.2.2

On se place dans le référentiel du projectile, le fluide incident ayant une vitesse par rapport au projectile $-\vec{v}$. Pour une estimation on peut supposer que le fluide incident dans le tube de courant de section égale à celle du projectile cède la totalité de sa quantité de mouvement au projectile : pendant dt , en projection sur l'axe du mouvement

$$dp_{\text{projectile}} = D_m dt(-v) = -\rho S v^2 dt : \frac{dp}{dt} = F = -\rho S v^2$$

Il s'agit bien d'une force proportionnelle à v^2 , donc l'ordre de grandeur du coefficient de proportionnalité est ρS . Cet ordre de grandeur est surestimé, puisque le fluide conserve une partie de sa quantité de mouvement incidente. L'expression estimée précédente est cohérente avec la relation obtenue pour des nombre de Reynolds élevés :

$$F = -C_x S \frac{\rho v^2}{2} ; C_x \approx \text{cste}$$

4.2.3

En présence de la force de freinage, l'équation du mouvement s'écrit en notant S la section du projectile, $\mathcal{V}$ son volume et ρ_p sa masse volumique

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -C_x S \frac{\rho v}{2} \vec{v} + m \vec{g} ; \frac{d\vec{v}}{dt} = -C_x \frac{S}{m} \frac{\rho v}{2} \vec{v} + \vec{g} = -C_x \frac{S}{\mathcal{V}} \frac{\rho v}{2 \rho_p} \vec{v} + \vec{g}$$

On constate que l'influence de la force de freinage sur le mouvement évolue avec la géométrie du projectile comme le rapport $S/\mathcal{V}$ de sa section par son volume. Ce rapport est inversement proportionnel à la taille du projectile pour des projectiles de même forme : plus le projectile est gros plus l'influence de la force de freinage est faible, donc plus sa portée se rapproche de sa portée dans le vide.

5 Propulsion électromagnétique : un prototype de laboratoire

5.1

Je pense qu'il faut comprendre interrupteur mécanique dans l'énoncé

La connexion doit être réalisée en un temps très court, avec une montée en courant importante (d'après les graphiques, montée du courant à environ 300 A en 450 μ s) et sans interruption (présence de l'inductance) ce qu'un interrupteur mécanique ne peut pas réaliser, en particulier à cause du phénomène de rebond mécanique (microcoupures lors de la fermeture de l'interrupteur), et du risque d'échauffement destructeur du contact au début de la fermeture lorsque la surface de contact des pièces conductrices de l'interrupteur mécanique est faible.

5.2

Pour augmenter la capacité de l'association, il faut associer les condensateurs en parallèle. Deux condensateurs en parallèles sont soumis à une même tension, et la charge totale de l'association est la somme des charges de chacune des armatures connectées dans l'association :

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U_1 + C_2 U_2 = (C_1 + C_2)U = C_{\text{eq}}U$$

d'où une capacité équivalente somme des capacités individuelles.

5.3

5.3.1

Le laser He-Ne émet dans le rouge ($\lambda \approx 640 \text{ nm}$) ce qui est compatible avec le domaine d'utilisation donné dans les caractéristiques des photodiodes (400 nm-1100 nm), donc le choix est convenable

5.3.2

La réponse fait apparaître un temps de montée du signal long ($\approx 600 \mu\text{s}$) suivi d'une chute rapide ($\approx 50 \mu\text{s}$). Le temps de commutation des photodiodes n'est pas en jeu puisqu'il est beaucoup plus court ($\approx 20 \text{ ns}$), donc on peut supposer la dissymétrie temporelle du signal causée par la forme vraisemblablement profilée du projectile : l'occultation de la photodiode par le projectile dont la partie avant est profilée est progressive, tandis que le retour à l'éclairement est plus rapide.

(La montée fait penser à une réponse du premier ordre qui pourrait être lié au circuit électrique associé à la photodiode, mais cela n'expliquerait pas la dissymétrie temporelle de la réponse)

Le début de montée du signal correspond à l'instant où la pointe du projectile pénètre dans le champ de la photodiode, tandis que la descente commence d'après le graphique $\Delta t = 800 \mu\text{s}$ plus tard, lorsque l'arrière du projectile commence à le libérer. Entre ces deux instants il a parcouru sa propre longueur $l_a = 20 \text{ mm}$, soit

$$v = \frac{l_a}{\Delta t} = 25 \text{ m s}^{-1}$$

5.4

5.4.1

Remarque : l'énoncé ne précise pas que l'origine des axes est arbitraire

Par ordre d'apparition dans la légende :

- (trait gris continu) tension aux bornes du condensateur, image de sa charge : $U(t < t_0 = -36 \text{ ms}$ condensateur chargé, circuit ouvert, puis décharge du condensateur
- (tirets gras) courant dans le montage : nul pour $t < t_0$ (circuit ouvert) puis courant de décharge du condensateur, tendant vers 0 lorsque le condensateur est déchargé
- (pointillés) photodiode en sortie de bobine : analogue au signal de la figure 7 (impulsion traduisant le passage du projectile, en avance sur le second signal de même type
- (trait noir continu) photodiode en sortie de tube, $L_t = 80 \text{ cm}$ après la première photodiode, détection du passage du projectile à la sortie du tube, en retard sur la détection du passage en sortie de bobine

Tension de charge du condensateur (en supposant la décharge totale, soit $U_\infty = 0$ confondu avec la ligne de base : 6,5 divisions à 30 V/div soit $U = 195$ V cohérent avec la donnée de l'énoncé (générateur délivrant une tension maximale de 200 V)

Courant maximal dans le montage : 3,5 divisions à 100 div soit $I_{\max} = 350$ A, estimation affinée avec la figure 9 : $I_{\max} = 315$ A

5.4.2

Le décalage temporel entre les signaux des deux photodiodes vaut environ 3,7 divisions soit $\Delta t = 37$ ms, correspondant à la traversée du tube de longueur $L_t = 80$ cm :

$$v = \frac{L_t}{\Delta t} = 21,6 \text{ m s}^{-1}$$

Valeur plus faible que la première estimation, avec pour explication possible les forces de frottement subies par le projectile dans le tube de guidage.

5.4.3

La vitesse initiale du projectile est nulle et l'accélération, donc la force subie, sont supposées constantes, donc le théorème de l'énergie cinétique appliqué au projectile soumis à la seule force magnétique (si le dispositif est horizontal) s'écrit sur la distance d'accélération Δx

$$\Delta E_c = \frac{m_a v^2}{2} = W = \int_0^{\Delta x} F dx = F \Delta x$$

soit

$$F = \frac{m_a v^2}{2 \Delta x} = 10 \text{ N}$$

5.4.4

On peut définir le rendement comme le rapport de l'énergie cinétique $E_c = (m_a v^2)/2$ acquise par le projectile sur l'énergie fournie par la décharge du condensateur, égale à son énergie initiale $E_Q = (CU^2)/2$, soit avec les données et les valeurs calculées précédemment

$$\rho = \frac{E_c}{E_Q} = \frac{m_a v^2}{CU^2} = 1,3 \cdot 10^{-3}$$

5.4.5

Si on suppose que la pression exercée par la plaque sur le projectile est égale à la pression $P_{\lim}$ indépendamment de sa déformation, le théorème de l'énergie cinétique appliqué au projectile entre l'instant où il touche la plaque et l'instant où il s'arrête s'écrit comme précédemment

$$\Delta E_c = -\frac{m_a v^2}{2} = -P_{\lim} S \Delta x = -P_{\lim} (\pi r_a^2) \Delta x$$

où πr_a^2 représente la section du projectile, et Δx la profondeur sur laquelle le projectile s'enfonce dans la plaque. On en déduit l'estimation

$$\Delta x = \frac{m_a v^2}{2 \pi r_a^2 P_{\lim}} = 14 \text{ cm}$$

Il faut donc prévoir une plaque d'une épaisseur de l'ordre d'une vingtaine de centimètres pour pouvoir arrêter le projectile.

5.5

5.5.1

L'effet inductif se traduit par la continuité du courant. Cet effet est particulièrement visible à la fermeture du circuit puisqu'alors le courant associé à la décharge du condensateur ne prend pas instantanément une valeur non nulle, mais augmente sur une durée brève mais finie avant de décroître.

5.5.2

D'après la courbe le montage RLC série équivalent est en régime apériodique (pas d'oscillations)

$$\tau_{RC} = RC, \tau_{RL} = L/R$$

La loi des mailles pour un circuit RLC série en régime libre s'écrit

$$0 = u_L + u_R + u_C = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}$$

en dérivant l'équation précédente, puis en la divisant par R on obtient l'équation

$$0 = \tau_{RL} \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau_{RC}}$$

Les racines du polynôme caractéristique vérifient

$$\tau_{RL} r^2 + r + \frac{1}{\tau_{RC}} = 0 ; \Delta = 1 - 4 \frac{\tau_{RL}}{\tau_{RC}}$$

En régime apériodique $\Delta > 0$, soit la condition $\tau_{RC} > 4\tau_{RL}$. Les deux racines ont pour expressions

$$r_1 = \frac{1}{2\tau_{RL}} \left(-1 + \sqrt{1 - 4 \frac{\tau_{RL}}{\tau_{RC}}} \right) ; r_2 = \frac{1}{2\tau_{RL}} \left(-1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\tau_{RL}}{\tau_{RC}}} \right)$$

et le courant a pour expression, compte tenu de la condition initiale $i(0) = 0$ par continuité au moment de la fermeture du circuit

$$i(t) = I_0 (e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$$

somme de deux termes de constantes de temps négatives $1/r_1$ et $1/r_2$. Si les constantes de temps sont très différentes, on peut écrire $|r_1| \ll |r_2|$ et d'après les propriétés de l'équation du second degré

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{1}{\tau_{RL}\tau_{RC}} ; r_1 + r_2 = -\frac{1}{\tau_{RL}} \approx r_2$$

soit les valeurs approchées

$$r_2 = \frac{-1}{\tau_{RL}} ; r_1 = \frac{-1}{\tau_{RC}}$$

On vérifie que la condition $|r_1| \ll |r_2|$ soit $\tau_{RC} \gg \tau_{LC}$ est cohérente avec la condition d'oscillation apériodique $\tau_{RC} > 4\tau_{RL}$. Le courant a pour expression approchée dans ce cadre

$$i(t) = I_0 \left(e^{-t/\tau_{RC}} - e^{-t/\tau_{RL}} \right)$$

qui représentent les réponses d'un circuit RC et d'un circuit RL.

La courbe apparaît comme la superposition de deux exponentielles amorties de temps caractéristiques très différents :

- aux temps courts la variation de courant est principalement due à l'exponentielle de temps caractéristique faible τ_{RL} : ce terme est lié au caractère inductif du circuit qui se traduit par la continuité du courant ;
- aux temps longs, la variation de courant est due à l'exponentielle de temps caractéristique élevé τ_{RC} , qui traduit la décharge du condensateur.

Au delà de quelques millisecondes, l'exponentielle associée au terme inductif est négligeable, donc $i(t) \approx I_0 e^{-t/\tau_{RC}}$. En estimant sur le graphique $i(2\text{ ms}) = 260\text{ A}$ et $i(3\text{ ms}) = 175\text{ A}$, on calcule

$$\tau_{RC} = 1/\ln(260/175) = 2,5\text{ ms}$$

Pour estimer précisément τ_{LR} , on dérive l'expression du courant pour trouver l'instant où il est maximal :

$$0 = \frac{di}{dt} = I_0 \left(-\frac{1}{\tau_{RC}} e^{-t/\tau_{RC}} + \frac{1}{\tau_{RL}} e^{-t/\tau_{RL}} \right) : \frac{1}{\tau_{RC}} e^{-t/\tau_{RC}} = \frac{1}{\tau_{RL}} e^{-t/\tau_{RL}}$$

la résolution numérique (calculatrice) de l'équation en τ_{RL} avec $t = 450\text{ }\mu\text{s}$ et $\tau_{RC} = 2,5\text{ ms}$ donne $\tau_{RL} = 150\text{ }\mu\text{s}$

$$\tau_{RC} = 2,5\text{ ms} ; \tau_{RL} = 150\text{ }\mu\text{s}$$

On déduit des relations $\tau_{RC} = RC$ et $\tau_{RL} = L/R$, et de la donnée $C = 12,5\text{ mF}$

$$R = 0,2\text{ }\Omega ; L = 30\text{ }\mu\text{H}$$

La longueur du fil vaut

$$L = 2\pi N R_b = 9,4\text{ m}$$

sa résistance vaut

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{4L}{\pi \sigma d_f^2} = 0,09\text{ }\Omega$$

La résistance de la bobine contribue pour moitié à la résistance totale du circuit.

Pour un solénoïde sans effet de bord, le champ magnétique, uniforme, a pour expression $B = \mu_0 n i$, soit un flux à travers une spire $\phi_1 = \pi R_b^2 \mu_0 n i$, et un flux total $\phi = N \phi_1 = \pi \mu_0 R_b^2 n N i = \pi \mu_0 R_b^2 N^2 i / L_b$, soit une inductance propre

$$L = \pi \mu_0 N^2 \frac{R_b^2}{L_b} = 150\text{ }\mu\text{H}$$

Valeur 5 fois plus élevée que celle déterminée d'après la courbe d'évolution du courant.