

Composition de Physique 2017

Filière BCPST

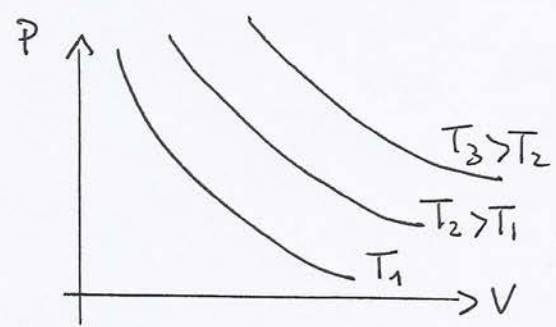
Ecoles Normales Supérieures - Ponts et Chaussées

4h, calculatrices interdites.

Notion de thermométrie

I) Notions de température et de pression

(A) 1) Diagramme (P; V) de Clapeyron



nb de moles
Gaz parfait (GP): $PV = NRT$

isotherme: $T = T_0$ pour tout V.

donc $P = \frac{NRT_0}{V} = \frac{\text{cte}}{V}$

Dans la pratique, il faut faire varier le volume d'une capsule de gaz ("parfait", donc à basse pression) dont les parois sont diathermes, et en équilibre avec un thermostat à la température T.

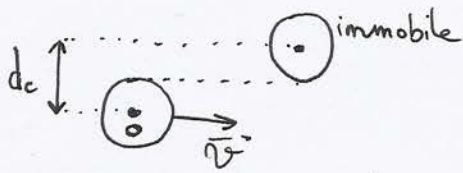
2) Question mal posée; on ne sait de quelles données on dispose.

Supposons que l'on dispose des couples de points (P; V) pour les tracés d'isothermes T_1 et T_2 , la température T_1 étant la seule connue.

On peut alors tracer $P = P(\frac{1}{V})$ et ajuster cette courbe par une fonction affine dont la pente s'identifierait à NRT_2 ; on peut en déduire T_2 si N est calculé, par exemple en utilisant l'isotherme à T_1 : $N = \frac{PV}{RT_1}$.

3] Au moment du choc, $d_c = 2r$.

(2)



Si la particule passe à une distance inférieure à d_c d'une autre particule, il y a collision.

Sur le trajet de la particule considérée, toute particule se trouvant interceptée par une section $\sigma = \pi d_c^2$ centrée en O crée une collision.

Cette section σ est usuellement nommée section efficace de collision, elle rend compte de la probabilité d'un impact avec les particules voisines.

Le libre parcours moyen ℓ étant la distance moyenne entre deux impacts, la probabilité d'impact dans une section σ , sur un trajet ℓ vaut 1:

$$\boxed{1 = n \cdot \ell \cdot \sigma} \text{ soit } 1 = n \ell \pi 4 r^2.$$

4] Pour un gaz usuel (atmosphère), on a $r \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$.

Le calcul de ℓ et d passe par une estimation de n , nombre de particules dans 1 m^3 de gaz parfait à l'équilibre, à P et T données:

$$n = \frac{P}{k_B T} \approx \frac{10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} \times 300} \approx \frac{1}{5} \times 10^{5+21} \approx \underline{2 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}}$$

Ainsi, le volume moyen attribué à chaque particule est $\frac{1}{n}$ et la distance moyenne d entre deux particules est de l'ordre de $d = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/3} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

Par ailleurs, on évalue $\ell = \frac{1}{n \pi 4 r^2} \approx \frac{1}{8 \cdot 10^{25} \cdot \pi \cdot 10^{-20}} \approx \frac{1}{30} \cdot 10^5 \approx \underline{0,3 \text{ } \mu\text{m}}$.

On notera que la valeur de ℓ dépend assez fortement de celle de r : par exemple pour $r = 3 \text{ \AA}$, on obtiendrait $\ell \approx 0,03 \text{ } \mu\text{m}$.

5] Un gaz réel voit son comportement tendre vers celui d'un gaz parfait à faible pression. Les diagrammes industriels (ex: Mollier) montrent qu'en général cela est obtenu pour $P < 1 \text{ bar}$ à température ambiante, ce qui donnerait ici $n < 10^{25} \text{ particules/m}^3$.

Plus fondamentalement, un gaz est dit parfait si ses particules n'interagissent pas entre elles (ni chocs, ni interactions dipolaires). On peut rendre compte de cela en introduisant le rapport adimensionné $P = \frac{n}{\bar{\ell}}$, qui est d'autant plus faible que les chocs sont rares.

B) 6] Sous ces hypothèses, toutes les particules de vitesse U_x situées dans un cylindre de section S et de longueur $U_x \delta t$ vont rencontrer une paroi durant l'intervalle de temps δt . Le nombre de chocs ainsi réalisés pendant δt est $\delta N_p = n \cdot \delta V_p$ soit $\delta N_p = n \cdot S \cdot U_x \delta t / 2$

Facteur 2 car la moitié des particules vont dans chaque sens

7] Un choc élastique conserve à la fois l'énergie cinétique et la quantité de mouvement du système fermé {particule + paroi} considéré. La conservation de $\vec{P}_{\text{totale}} = \vec{P}_{\text{part}} + \vec{P}_{\text{paroi}} = \vec{P}_{\text{part}}$ (car la paroi est immobile) s'écrit

$$\vec{P}_{\text{totale AVANT}} = \vec{P}_{\text{totale APRES}}, \text{ soit ici } \|\vec{P}_{\text{part. AVANT}}\| = \|\vec{P}_{\text{part. APRES}}\|$$

La variation de quantité de mouvement d'une particule s'écrit alors:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{APRES}} - \vec{p}_{\text{AVANT}} = -2 \vec{p}_{\text{AVANT}} = -2 m U_x \vec{u}_x$$

D'après la question 6, la variation $\delta \vec{p}$ de l'ensemble des particules heurtant la section S pendant δt (modèle 1D) est $\delta \vec{p} = \delta N_p \cdot \Delta \vec{p}$.

Ainsi $\delta \vec{p} = \frac{n}{2} \cdot S \cdot U_x \cdot \delta t \cdot (-2 m U_x \vec{u}_x)$: paroi de droite.

$$\delta \vec{p} = -\frac{2}{2} n m S \delta t U_x^2 \vec{u}_x = -n m S \delta t U_x^2 \vec{u}_x$$

8] La pression est une force surfacique. D'après le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD), donnant ici $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, ce modèle 1D

permet de définir la pression comme le flux de quantité de mouvement selon l'axe $\vec{u}_x$: $P = \left\| \frac{\delta \vec{p}}{\delta t} \cdot \frac{1}{S} \right\| = \frac{2}{2} n m \overline{v_x^2} = n m \overline{v_x^2}$. (4)

9] En 3D, il faut tenir compte des chocs réalisés sur les 6 parois de l'enceinte, et remplacer la vitesse v_x par sa traduction statistique: v_x^2 devient alors $\langle v_x^2 \rangle$ et chaque paroi est liée à $\frac{n}{6}$ particules.

$$P_{3D} = \frac{n}{6} m \langle v_x^2 + (-v_x)^2 + v_y^2 + (-v_y)^2 + v_z^2 + (-v_z)^2 \rangle$$

$$= \frac{1}{3} n m (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle)$$

$$\underline{P = \frac{1}{3} n m \overline{v_g^2}}$$

10] Gaz Parfait Monoatomique (GPM): $U = N C_{vm} T = N \frac{3}{2} R T$.
 (première loi de Joule.
 (équipartition de l'énergie) ↙

11] $N = \frac{N_p}{N_A}$ et $k_B = \frac{R}{N_A}$ donc $\underline{U = \frac{3}{2} N_p \cdot k_B T}$.

12] $U = N_p \langle \frac{1}{2} m \overline{v_{part}^2} \rangle = \underline{N_p \frac{1}{2} m \overline{v_g^2}}$.

13] D'après les deux écritures précédentes, $U = \frac{3}{2} N_p k_B T = \frac{1}{2} N_p m \overline{v_g^2}$
 d'où $k_B T = \frac{1}{3} m \overline{v_g^2}$.

14] On calcule ainsi $P \cdot V = V \cdot \frac{1}{3} n m \overline{v_g^2} = n k_B T V = N_p k_B T$
 $\Leftrightarrow \underline{P \cdot V = NRT}$.

(5)

15) * Différentiation à P constante :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial T}\right)_{P,V} dT + \left(\frac{\partial \phi}{\partial V}\right)_{P,T} dV = 0$$

on est bien à

$$\bar{\alpha} = P = \text{cste} \quad (1)$$

* de même différentiation de (1) à T = cste

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{-\left(\frac{\partial \phi}{\partial V}\right)_{P,T}}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial P}\right)_{V,T}} \quad (2)$$

$$\text{et à } V = \text{cste} \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = - \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial P}\right)_{T,V}}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial T}\right)_{P,V}} \quad (3)$$

On multiplie (1) (2) et (3)

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1}$$

Enfin, on a aussi :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial V}\right)_{P,T} dV + \left(\frac{\partial \phi}{\partial P}\right)_{V,T} dP + \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}\right)_{V,P} dT = 0$$

et en divisant par PVT :

$$0 = \frac{1}{PV} \left(\frac{\partial \phi}{\partial V}\right)_{P,T} \frac{dV}{V} + \frac{1}{VT} \left(\frac{\partial \phi}{\partial P}\right)_{V,T} \frac{dP}{P} + \frac{1}{VP} \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}\right)_{V,P} \frac{dT}{T}$$

Intégral :

(5)

16/ On choisit $\boxed{\Phi(P, V, T) = PV - NRT}$ (6)

$$\rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P} \right)_{T, V} = V \quad / \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_{T, P} = P$$

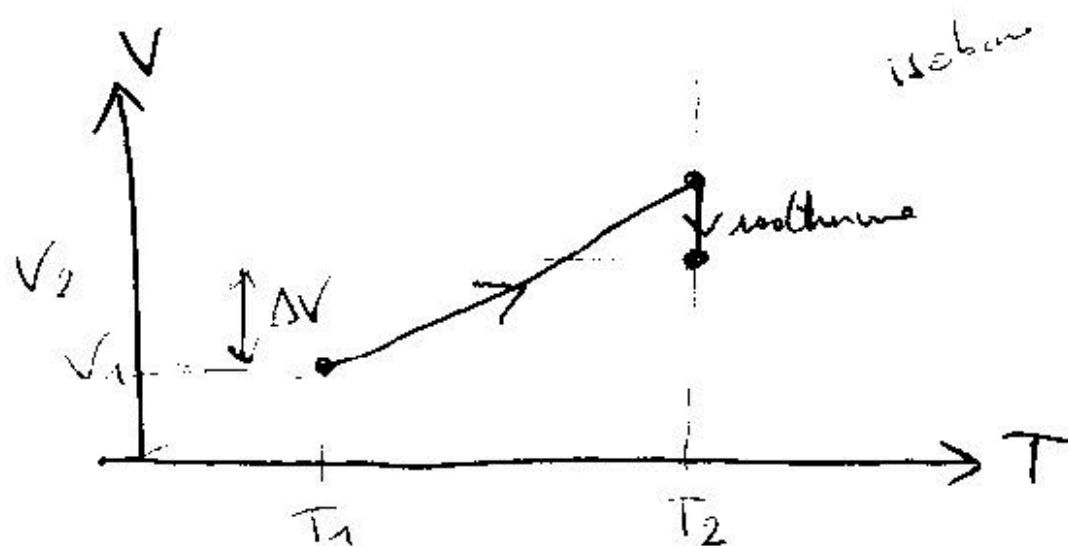
$$\text{et } \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{P, V} = -NR$$

On remplace dans (5)

$$\rightarrow \frac{1}{T_0} \frac{\delta V}{V_0} + \frac{1}{T_0} \frac{\delta P}{P_0} - \underbrace{\frac{NR}{P_0 V_0}}_{\frac{1}{T_0}} \frac{\delta T}{T_0} =$$

$$\rightarrow \frac{\delta V}{V_0} + \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta T}{T_0} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha_V^0 = \alpha_P^0 = -1}$$



Notion de thermométrie

II Thermomètre à gaz

II.A Considérations générales

II.B Thermomètre à variation de volume

18. Volume total : $V = hS$.

Gaz parfait $\rightarrow PhS = NRT \rightarrow h = \frac{NRT}{PS}$

- Calcul de s_T° : $\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = \frac{NR}{PS}$, d'où $s_T^\circ = \frac{T_0}{h_0} \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = \frac{T_0 NR}{h_0 PS} = +1$

car au voisinage de l'état E_0 , $h \simeq h_0$ et $T \simeq T_0$.

- Calcul de s_P° : de la même façon, $\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = -\frac{NRT}{P^2 S}$ et $s_P^\circ = \frac{P_0}{h_0} \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = -1$

s_T° et s_P° traduisent la sensibilité des variations de h lorsque T (respectivement P) varient. s_T° et s_P° ont la même valeur absolue : $|s_T^\circ| = |s_P^\circ| = 1$. L'influence de P sur la détermination de h est donc d'égale importance que celle de T . Par conséquent, si la pression P varie, par l'effet de l'altitude par exemple, l'erreur du thermomètre risque d'être élevée.

19. L'indication qui nous est fournie à propos de la masse d'air comprise entre 0 et 5 000 m nous renseigne sur la pression qui règne à 5 000 m d'altitude : en effet, d'après l'hydrostatique, la pression atmosphérique P est liée au poids p_a de la colonne d'air surmontant le point considéré : $P = \frac{p_a}{S}$, où S est la section (constante) de la colonne d'air. Par conséquent, on peut considérer qu'à l'altitude $z_1 = 5\,000$ m, la pression P_1 est égale à la moitié de la pression P_0 au sol : $P_1 = \frac{P_0}{2}$.

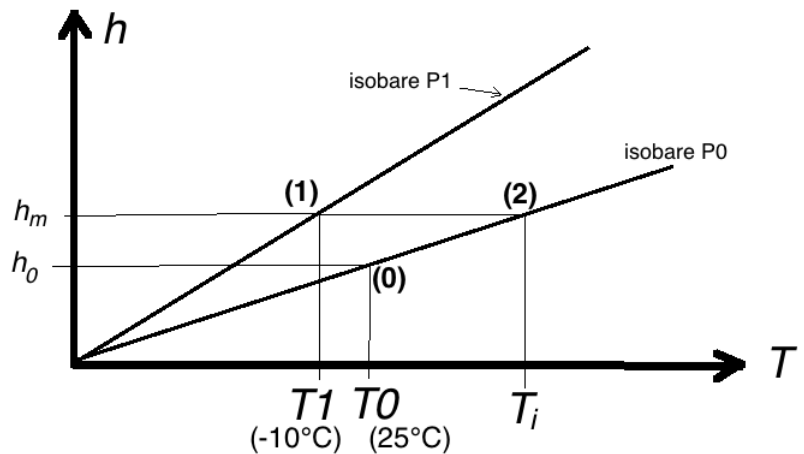
Pour obtenir la température T_i , on part de la relation linéarisée (5), en variable h , de la question 16 : en effet, en simplifiant pas la section S du thermomètre, on a : $\frac{\delta h}{h_0} = \frac{\delta V}{V_0}$. On passe donc facilement en variable h :

$$\frac{\delta T}{T_0} = -\alpha_P^\circ \frac{\delta P}{P_0} - \alpha_V^\circ \frac{\delta h}{h_0} = \frac{\delta P}{P_0} + \frac{\delta h}{h_0}$$

car $\alpha_P^\circ = \alpha_V^\circ = -1$.

Il y a plusieurs façons de terminer la question. En voici une.

À partir de la relation $h = \frac{NRT}{PS}$, on peut construire le graphe ci-contre, semblable à celui de la question 17, afin de faire apparaître les différents paramètres intervenant dans cette question. h_0 : hauteur mesurée au niveau de la mer à T_0 , P_0 (état (0) sur le schéma) ; h_m : hauteur mesurée effectivement à 5 000 m et à T_1 (état(1) : T_1 , P_1).



T_i correspond à l'état (2) : hauteur h_m , sous la pression P_0 (on fait une erreur sur P et donc une erreur sur T).

L'énoncé suggère de linéariser à partir de l'état de référence (0) (ou $\mathcal{E}_0$) :

- linéarisation (0) $\curvearrowright$ (1) : $\frac{T_1 - T_0}{T_0} = \frac{h_m - T_0}{h_0} + \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{h_m - h_0}{h_0} - \frac{1}{2}$
- linéarisation (0) $\curvearrowright$ (2) : $\frac{T_i - T_0}{T_0} = \frac{h_m - h_0}{h_0}$

On en déduit : $\frac{T_1 - T_i}{T_0} = -\frac{1}{2}$, d'où $\boxed{T_i = T_1 + \frac{T_0}{2}}$

A.N. $\boxed{T_i = 412\text{ K}}$ ou 139 °C

Conclusion : l'erreur est considérable.

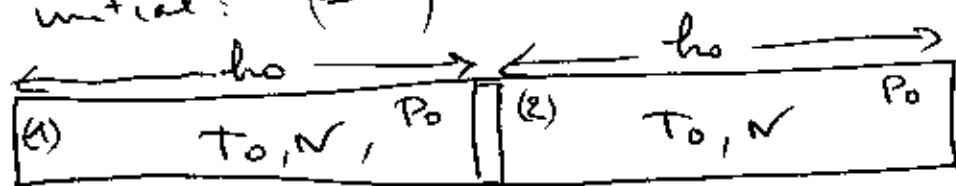
*
* *

20/

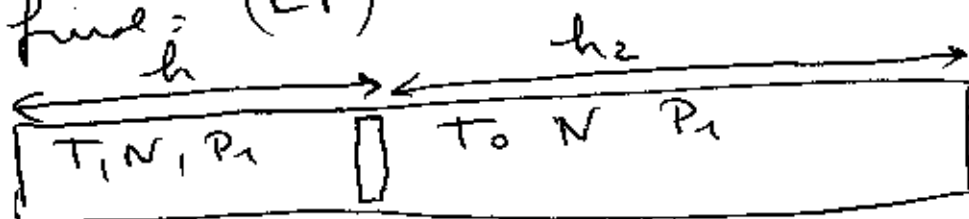
(10)

Equilibre mécanique du piston mobile sans frottement $\Rightarrow P_1 = P_2$

Etat initial: (EI)



Etat final: (EF)



Conservation du volume:

$$h_1 + h_2 = 2h_0 \quad (1)$$

Relation entre P_1 et P_0 :

EI: $NRT_0 + NRT_0 = P_0(h_0 + h_0)S$

EF: $NRT + NRT_0 = P_1(h_1 + h_2)S$

Or $h_1 + h_2 = 2h_0$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_0} = \frac{T + T_0}{2T_0} \quad (2)$$

Expression de $T - T_0 = X T_0$ à partir de l'éq (1)
de GP dans l'EF:

$$\text{À gauche: } P_1 h = \frac{NRT}{S}$$

$$\text{À droite } P_1 h_2 = \frac{NRT_0}{S}$$

$$\Rightarrow T - T_0 = \frac{P_1 S}{NR} (h - h_2)$$

$$\text{Or (1)} \Rightarrow h_2 = 2h_0 - h$$

$$\boxed{T - T_0 = 2 \frac{P_1 S}{NR} (h - h_0)} \quad (3)$$

On remplace l'expression de P_1 de (2) dans (3):

$$T - T_0 = \frac{2S}{NR} (h - h_0) P_0 \frac{T + T_0}{2T_0}$$

$$T - T_0 = \frac{S P_0}{NR T_0} (h - h_0) (T + T_0)$$

$$\text{Or } \frac{S P_0}{NR T_0} = \frac{1}{h_0} \rightarrow T - T_0 = \frac{h - h_0}{h_0} (T + T_0)$$

$$\text{On peut exprimer } X, Y : T = X T_0 + T_0$$

$$\Rightarrow T + T_0 = (X + 2) T_0$$

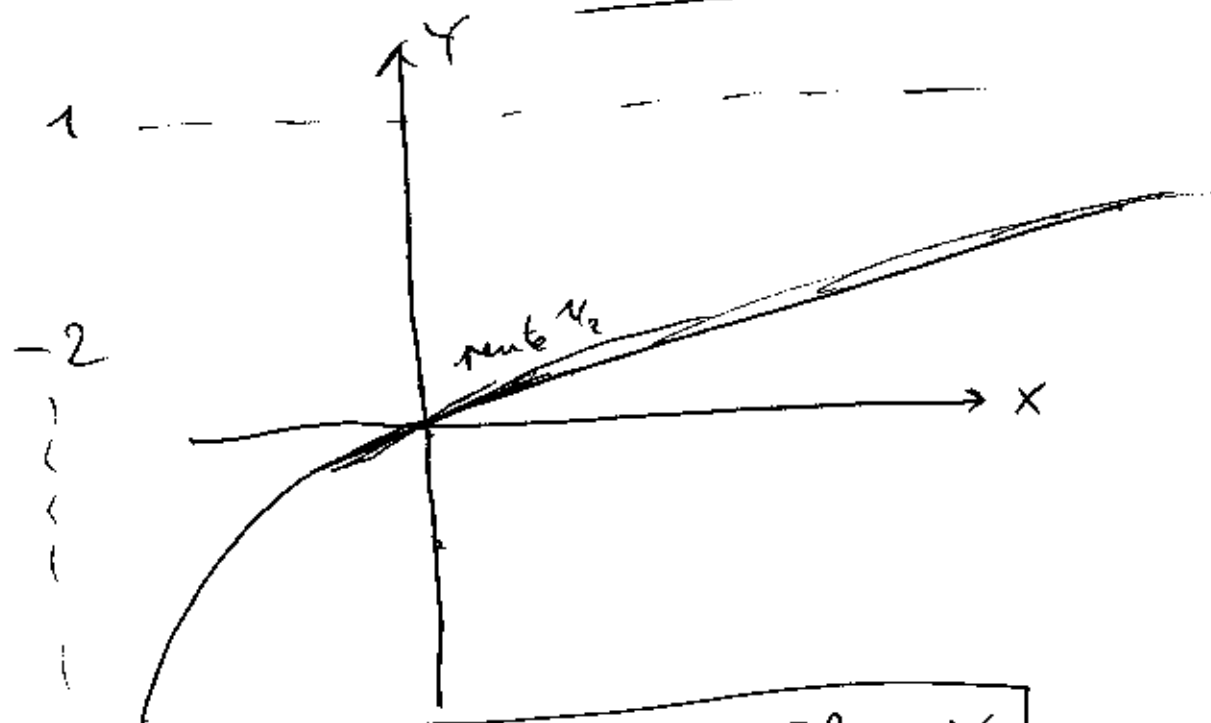
$$\text{On obtient donc } X = Y (X + 2) \text{ soit bien}$$

$$\boxed{Y = \frac{X}{X + 2}}$$

21/ Il est intéressant de prévoir la dépendance $X-Y$ au voisinage de $X=0$:

Pour $X \ll 2$,

$$Y \approx \frac{X}{2}$$



sensibilité

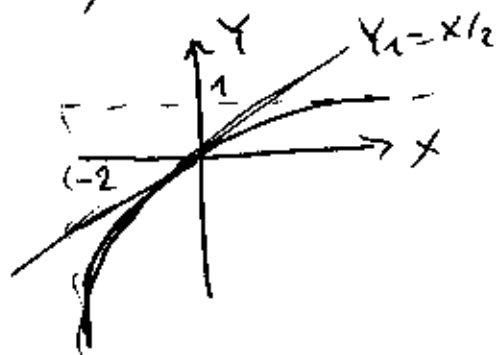
$$S_T^0 = \frac{T_0}{h_0} \frac{\delta h}{\delta T} = \frac{Y}{X}$$

$$\Rightarrow S_T^0 \approx \frac{1}{2}$$

La sensibilité est 2 fois plus

faible que précédemment en ce qui concerne la température. Mais d'erreur de mesure a été corrigée

22) Approximation linéaire: $Y_1 = \frac{X_1}{2}$



* Erreur relative de $+10\%$: elle se produit

lorsque X varie : $Y_1 = \frac{X}{2} = \underbrace{1,1}_{\downarrow} \frac{X}{X+2}$

$$1 + 0,1 = (100 + 10)\%$$

$$\rightarrow \boxed{X = 0,2}$$

* Erreur relative de -10% : alors

$$Y_1 = \frac{X}{2} = \underbrace{0,9}_{\downarrow} \frac{X}{X+2}$$

$$1 - 0,1$$

$$\rightarrow \boxed{X = -0,2}$$

Conclusion

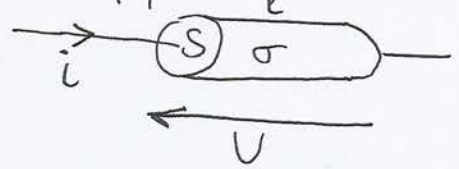
$$\boxed{-0,2 \leq X \leq 0,2}$$

23/ Equilibre Solide - liquide de l'eau.

24/ Pour un gaz parfait, on a vu à la question 15 que $\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V}$.

Dans ce thermomètre, seules P et T varient : $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta P}{P}$, ainsi $\Delta P = (T - T_0) \frac{NR}{V}$.

25/ Modèle microscopique d'un conducteur ohmique : $U = R \cdot i = R \cdot jS = R(\sigma E)S$



$\Leftrightarrow U = R \sigma \frac{U}{l} S \Leftrightarrow R = \frac{l}{\sigma S}$

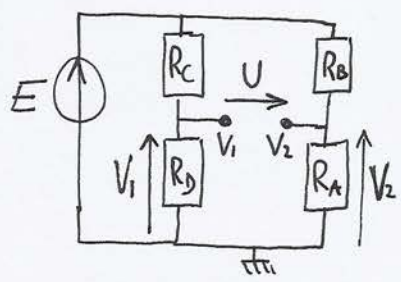
Ainsi, une élongation augmente l en diminuant la section S : R augmente !

26/ On nomme $\alpha = \frac{L_0}{r}$ l'angle d'ouverture qui englobe les jauges J_1 et J_2 .

On a donc : $L_1 = \alpha(r - \frac{e}{2})$ et $L_2 = \alpha(r + \frac{e}{2}) \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = \frac{L_1 - L_0}{L_0} = -\frac{e}{2r} \\ \epsilon_2 = \frac{+e}{2r} \end{cases}$

On en déduit $\begin{cases} R_1 = R_0 + R_0 \epsilon_1 = R_0(1 - \frac{C_e}{2r}) \\ R_2 = R_0(1 + \frac{C_e}{2r}) \end{cases}$

27/ Il s'agit d'un pont de Wheatstone ; son grand intérêt est de réaliser des mesures autour de $U=0$ (pont équilibré). Comme U est proportionnelle à ΔP , on pourra mesurer ΔP avec le calibre fin d'un multimètre !



Loi des mailles : $U = V_2 - V_1$

Diviseurs de tension : $V_1 = E \frac{R_A}{R_A + R_B}$ et $V_2 = E \frac{R_D}{R_C + R_D}$

donc $U = E \left[\frac{R_A}{R_A + R_B} - \frac{R_D}{R_C + R_D} \right]$

28/ On admet pour l'instant que $r = \frac{K}{\Delta P}$, et on souhaite obtenir $U = \text{cte} \times \Delta P$.

Comme on a montré que $R_i = R_0 \left(1 \pm \frac{C \cdot e \cdot \Delta P}{2K} \right)$ et $U = E \left[\frac{1}{1 + \frac{R_B}{R_A}} - \frac{1}{1 + \frac{R_C}{R_D}} \right]$ on peut choisir de placer des jauges en lieu et place de R_A et R_D ; avec $R_B = R_C = R_0$:

ainsi, $\frac{U}{E} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1-X}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{1+X}} \approx \frac{1}{2+X} - \frac{1}{2-X} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+\frac{X}{2}} - \frac{1}{1-\frac{X}{2}} \right] \approx -\frac{1}{2} X$

avec $X = \frac{C e \Delta P}{2K} \ll 1$

28] donc avec $\begin{cases} R_A = R_2 ; R_B = R_0 \\ R_D = R_1 ; R_C = R_0 \end{cases}$, on obtient:

8

$$U = \frac{E.C.e}{4K} \Delta P = \frac{E.C.e}{4K} \cdot \frac{NR}{V} (T - T_0)$$

A partir de la question 29, voir aussi des compléments de réponse page suivante.

29] Equilibre statique: $-2F = \Delta P 4a^2 \Rightarrow F = -2a^2 \Delta P$.

30] $\vec{M}_O = \int \vec{r} \wedge \Delta P \cdot 2a dr \vec{M}_y = 2a \Delta P \frac{a^2}{2} \vec{M}_y = a^3 \Delta P \vec{M}_y$.

31] De même que précédemment: $l_0 = dr$, $l_1 = d(r - \frac{e}{2})$ et $l_2 = d(r + \frac{e}{2})$.

$M_z = -k \underbrace{(r + \frac{e}{2})}_{\text{bras de levier}} \underbrace{d\frac{e}{2}}_{\text{déplacement}} \sin d + k (r - \frac{e}{2}) (-\frac{de}{2}) \sin d \approx -\frac{k d^2 e}{2} [r + \frac{e}{2} + r - \frac{e}{2}] = -\frac{k l_0^2 e}{r} = M_z$
 $\sin d \approx d$ pour une petite déformation d .

32] Loi de Hooke: $\frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta H}{H}$ (avec E : module de Young).

On évalue ici: A = section du matériau étiré/compressé = $2ea$.

$N = k(l_2 - l_0) \approx k \frac{de}{2} = \frac{k l_0 e}{2r} \rightarrow \text{Rmq: facteur 2 sans doute discutable.}$

$\frac{\Delta H}{H} \approx \frac{l_2 - l_1}{l_0} = \frac{de}{l_0} = \frac{l_0 e}{l_0 r} = \frac{e}{r}$.

Ainsi, $\frac{k l_0 e}{2 \times 2ea} = E \frac{e}{r} \Leftrightarrow k = \frac{4aeE}{l_0}$

33] On avait $M_z = M = -\frac{k l_0^2 e}{r}$, donc $M = -\frac{4aeE}{l_0} \cdot \frac{l_0^2 e}{r} = -\frac{4ae^2 E l_0}{r} = M$

34] On a $r = \frac{K}{\Delta P}$. [TMC] à l'équilibre de la membrane: $M_0 + M = 0$

$\Leftrightarrow a^3 \Delta P = \frac{4ae^2 E l_0}{r}$

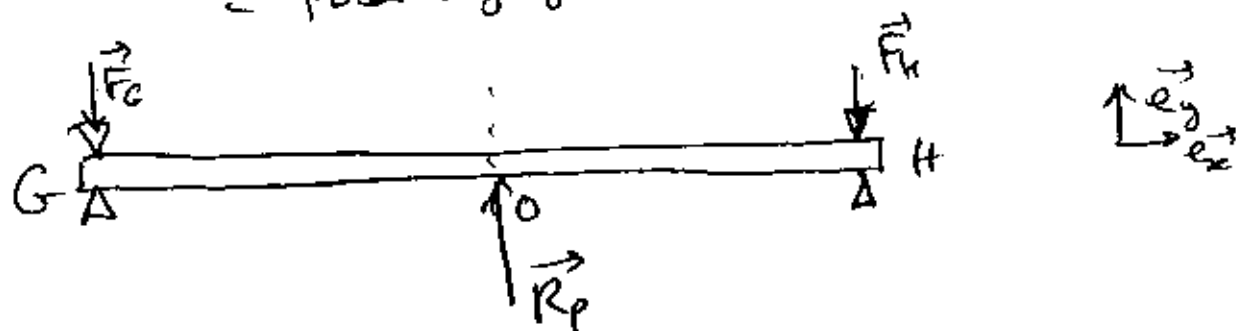
$r = \frac{4e^2 E l_0}{a^2} \cdot \frac{1}{\Delta P}$
 $\rightarrow K$.

29) Bilan des forces sur la membrane :

(8 bis)

$$\begin{aligned} - \vec{F}_G &= \vec{F} \\ - \vec{F}_H &= \vec{F} \end{aligned}$$

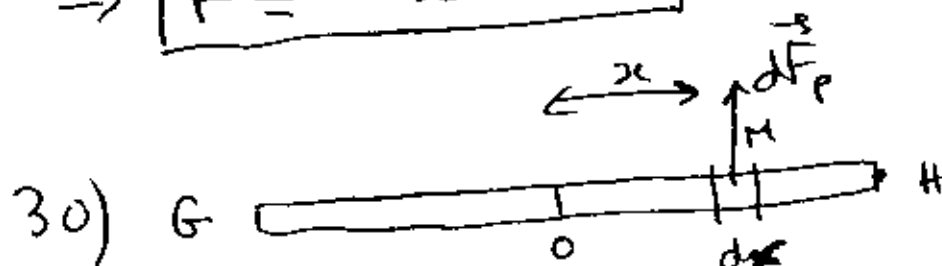
- Résultante $\vec{R}_p$ des forces pressantes
- poids négligeable



$$\vec{R}_p = \Delta P (2a)^2 \vec{e}_y = 4a^2 \Delta P \vec{e}_y$$

Condition d'équilibre statique : $\vec{R}_p + 2\vec{F} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \boxed{F = -2a^2 \Delta P}$$



$$d\vec{F}_p = 2a \, dx \, \Delta P \vec{e}_y \quad (\text{force pressante sur l'élément de surface situé à } x \text{ de } G)$$

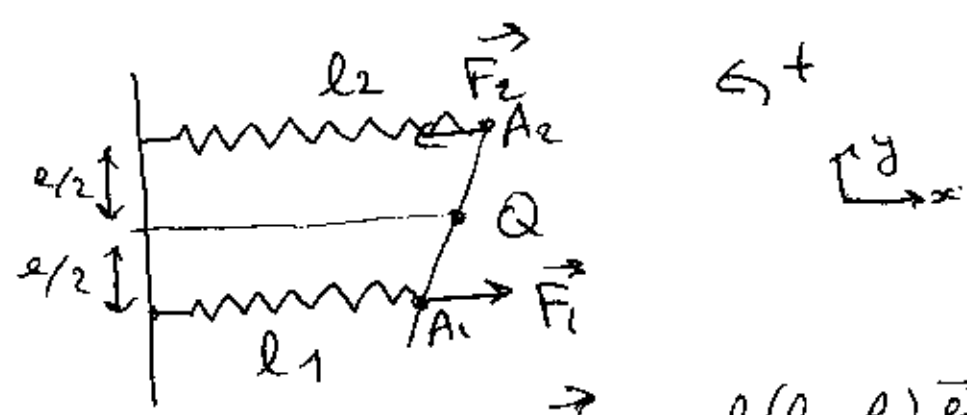
Le moment de $d\vec{F}_p$ par rapport à O_G est

$$dM_0 = x \, dF_p = 2a \Delta P x \, dx$$

Par intégration : $M_0 = \int_{x=0}^{x=a} dM_0 = 2a \Delta P \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a$

$$\boxed{M_0 = \Delta P a^3}$$

31/ Le moment (couple) $\vec{M}$ que l'on cherche doit équilibrer le moment des tensions de 2 ressorts en Q, autour de l'axe Oz



On a facilement $\vec{F}_1 = k(l_0 - l_1)\vec{e}_x$
 $\vec{F}_2 = -k(l_2 - l_0)\vec{e}_x$

$\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|$

Le moment de $\vec{F}_1$ par rapport à Oz , en O, est
 . Celui de F_2 est le même : $M_2 = M_1$

$M_1 = F_1 \frac{e}{2}$
 bras de levier

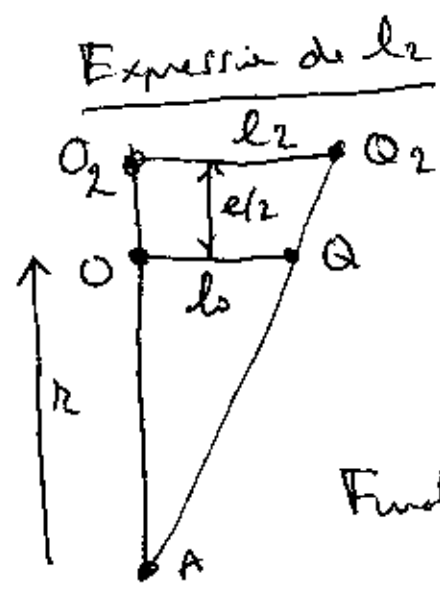
$M = -2M_2 = -k(l_2 - l_0)e$

$\sum M = 0 \Rightarrow$

Thales : $\frac{l_2}{l_0} = \frac{l_2 + e/2}{l_2}$

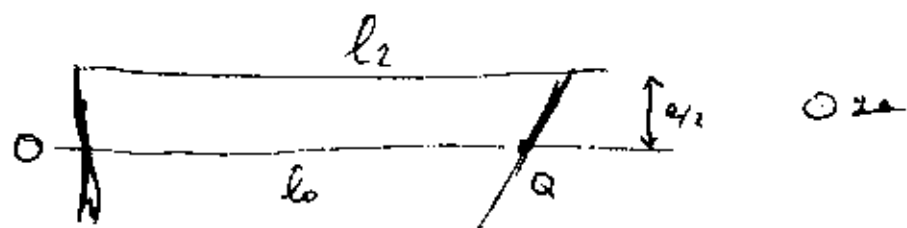
$\rightarrow l_2 = l_0 \left(1 + \frac{e}{2l_0}\right)$

et $l_2 - l_0 = \frac{l_0 e}{2l_0}$



Finalement

$M = -\frac{k l_0 e^2}{2r}$



$$\text{section } A = 2a \times \frac{e}{2} = ae$$

Allongement $\Delta H \approx l_2 - l_0$ sans se préoccuper du préfacteur

$$H = l_0$$

$$N = F_2 = k(l_2 - l_0)$$

donc, d'où $\frac{N}{A} = \frac{E \Delta H}{H}$ donne

$$\frac{k(l_2 - l_0)}{ae} = E \frac{l_2 - l_0}{l_0} \quad (E \text{ est en Pa})$$

$$k = \frac{Eae}{l_0}$$

$$33/ \quad M = - \frac{k l_0 e^2}{2r} = - \frac{E a e^3}{2r}$$

34) Equilibre de la membrane $M_0 + M = 0$
avec $M_0 = \Delta P a^3$

et $K = r \Delta P$

$$\Rightarrow K = r \Delta P = \frac{E e^3}{2a^2}$$

Pour ΔP donné, le rayon de courbure varie fortement avec e (puissance 3), a (puissance -2) et linéairement avec E

35/ Toujours pour ΔP donné, une ^{grande} variation (8.5)
de résistances électriques des jantes est obtenue
pour un rayon de courbure R petit
 $\Rightarrow$ il est souhaitable que K soit faible

$\Rightarrow$ faible épaisseur e

α élevé

E faible (souplesse de la membrane)

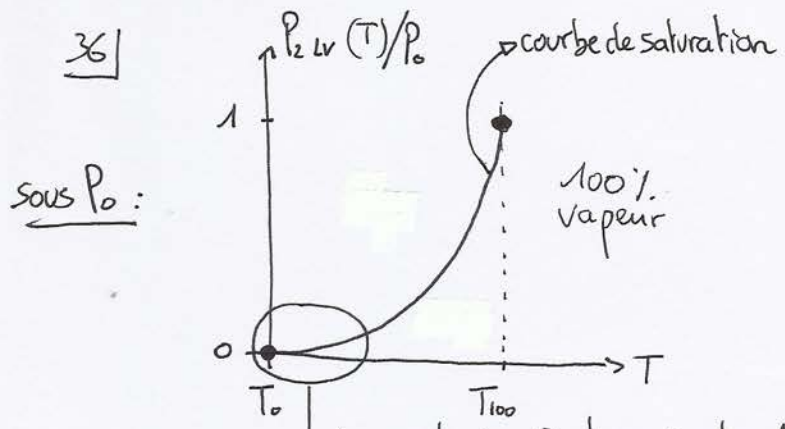
34] Analyse : avant tout, on note que l'expression $r = \frac{K}{\Delta P}$ est cohérente, car r est le rayon de courbure (il est donc faible si la déformation est importante, ce qui correspond bien à ΔP élevé). Et à ΔP fixé, r est faible si K aussi (capteur sensible).

Concernant l'expression de K : K proportionnel à E (module de Young : $E_{acier} \approx 200$
 $E_{bois} \approx 20$)

donc K quantifie bien la rigidité de la membrane : le capteur est d'autant plus sensible que la membrane est déformable (il faut K faible).
De même, K est proportionnel à $\frac{e^2}{a^2}$: la membrane sera globalement d'autant plus rigide qu'elle est épaisse et de petite surface.

35] voir ci-dessus : à ΔP fixée, la tension affichée sera d'autant plus grande (bonne sensibilité) que les jauges sont déformées (r petit) ; il faut donc K faible.

III] Thermomètre diphasique.



pour les températures proches de T_0 , la loi est moins bonne qu'à $T \approx T_{100}$
car ici $P_{2(LV)} \xrightarrow{T \rightarrow T_0} 0$, alors qu'à $0^\circ C$, $P_{sat}(H_2O, 1atm) = 6 \text{ mbar}$.

37] équilibre de l'obturateur (son poids est négligé devant les forces de pression, même si l'énoncé n'en parle pas) : $P_0 S = P_{tot} S = (P_1 + P_2) S \iff \boxed{P_0 = P_1 + P_2}$

38] Si $\exists$ eau liquide (100% vapeur) : $P_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2} P_0$.

Si $\exists$ équilibre diphasé (LV) : $P_2 = P_{2LV}(T) = P_0 \left(\frac{T - T_0}{T_{100} - T_0} \right)^4$.

39] A la frontière entre les deux domaines (courbe de rosée) : $\boxed{\frac{N_2}{N_1 + N_2} P_0 = P_0 \left(\frac{T^* - T_0}{T_{100} - T_0} \right)^4}$

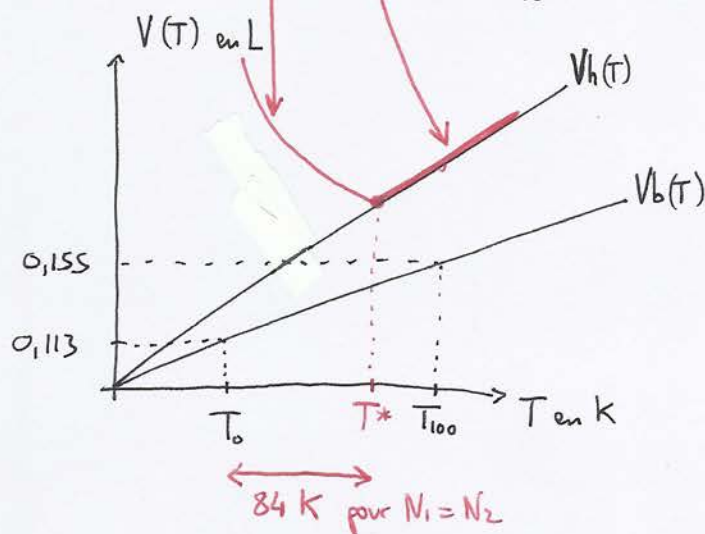
40] Pour $N_1 = N_2$: $T^* - T_0 = (T_{100} - T_0) \left(\frac{N_2}{2N_2} \right)^{1/4} = 100 \times 2^{-1/4} = 84^\circ \text{C}$.

41] • pour $T \in [T_0; T^*]$: équilibre diphasé $\rightarrow V_{\text{tot}}(T) \simeq V_{\text{gaz}}(T) = \frac{N_2 RT}{P_2 p_{\text{lv}}(T)} = \frac{N_2 RT}{P_0 f(T)}$.

• pour $T \in [T^*; T_{100}]$: 100% vapeur $\rightarrow V(T) = \frac{N_2 RT}{P_2} = \frac{N_2 (N_1 + N_2) RT}{P_0}$.

42] Pour $N_1 = 0$ ("mélange" sans azote, 100% H_2O): $T^* = T_{100} \rightarrow$ cohérent sous $P_0 = 1 \text{ atm}$.

Pour $N_1 = N_2$:
$$\begin{cases} V(T) = \frac{N_2 RT}{P_0} \cdot \frac{1}{f(T)} & \text{entre } T_0 \text{ et } T^* \\ V(T) = 2 \frac{N_2 RT}{P_0} & \text{entre } T^* \text{ et } T_{100} \end{cases}$$



• on a vu que la divergence pour $T \rightarrow T_0$ n'est pas réaliste.

• la mesure de $V(T)$ pour T légèrement inférieure à $T^*(N_1, N_2)$ est très sensible.

• T^* est une valeur qui peut être choisie via la composition du mélange $\frac{N_1}{N_2}$.

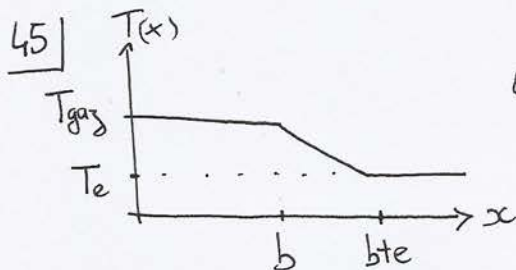
43] Sensibilité intrinsèque: $s = \frac{T}{V} \frac{dV}{dT} = \frac{P_2}{N_2 R} \cdot \frac{N_2 R}{P_2} = 1$ pour $T \in [T^*; T_{100}]$.

et $s = \frac{T}{V} \frac{dV}{dT} = \frac{R f(T)}{N_2 R} \cdot \frac{N_2 R}{R} \frac{f(T) - T f'(T)}{f^2(T)} = 1 - T \frac{f'(T)}{f(T)}$ pour $T \in [T_0; T^*]$.

avec $f(T) = \left(\frac{T - T_0}{T_{100} - T_0} \right)^4$, on a $1 - T \frac{f'(T)}{f(T)} = 1 - \frac{4T}{T - T_0}$. Ainsi $s(T = 300 \text{ K}) = -43$!
(grande sensibilité)

IV Temps de réponse d'un thermomètre

44] Régime stationnaire : le flux total Φ est conservé quelle que soit la surface sphérique choisie dans le verre. Autrement dit, $\Phi(b) = \Phi(b_{te}) \Leftrightarrow -\lambda_{\text{en}} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b 4\pi b^2 = -\lambda_{\text{en}} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{b_{te}} 4\pi (b_{te})^2$
(La distribution de température est à symétrie sphérique, donc $\text{grad } T$ est radial).
Ainsi, pour $e \ll b$, l'étude thermique peut se traiter de façon unidimensionnelle sur $\overline{M_x}$.



Equation de la chaleur selon $\vec{u}_x$ (1D):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \text{ (régime permanent)}$$

ainsi $T(x) = Ax + B$ (affine entre b et bte).

En 1D radiale: $\Phi(r) = \text{cte}$.

$$\Leftrightarrow d\Phi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left[-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 4\pi r^2 \right] = 0 \text{ (bilan mésoscopique)}.$$

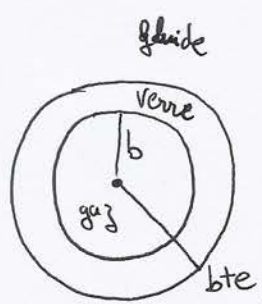
Calcul de R_{th} de l'enceinte sphérique: $\Phi(r) = \text{cte} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 4\pi r^2 = \Phi$

$$\Leftrightarrow -\Phi \frac{dr}{r^2} = 4\pi \lambda dT$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{bte} \right) = 4\pi \lambda (T - T_e)$$

Par définition, $\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$ donc

$$R_{th} = \frac{1}{4\pi \lambda_{en}} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{bte} \right)$$



46/ Bilan enthalpique sur la cellule:

$$\frac{dH}{dt} = \Phi = C \frac{dT}{dt} = \frac{T_e - T}{R_{th}} \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{R_{th}C} T = \frac{1}{R_{th}C} T_e \text{ et } \tau_{mod} = R_{th}C.$$

47]

	Diffusion thermique	Analogie électrique
condition de validité	régime stationnaire	ARQS
variation intensive	$\Delta T = T_A - T_B$	$U_{AB} = \Delta V = V_A - V_B$
courant	Φ	i
résistance	R_{th}	R
Poi d'Ohm	$\Delta T = \Phi \cdot R_{th}$	$U = R \cdot i$
Poi locale	$\vec{j} = -\lambda \vec{grad} T$	$\vec{j} = \chi \vec{E} = -\chi \vec{grad} V$
schéma		

48] 49]

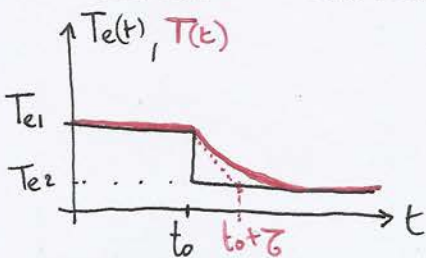
On résout l'équation différentielle d'ordre 1:

$$T(t) = A \exp \left[\frac{-(t-t_0)}{\tau_{mod}} \right] + B$$

$$\text{donc } T(t) = (T_{e1} - T_{e2}) e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau_{mod}}} + T_{e2}$$

avec $B = T_{e2}$

$$T_{e1} = A \cdot 1 + T_{e2} \rightarrow A = T_{e1} - T_{e2}$$



50] T^* est une grandeur adimensionnée et permet ainsi de fixer l'échelle des variations à l'unité, $\forall T_{ei}$: cela permet de mettre en évidence les seules caractéristiques temporelles du signal. Ici, la superposition des courbes montre que les deux signaux présentent un même temps caractéristique τ_{exp} .

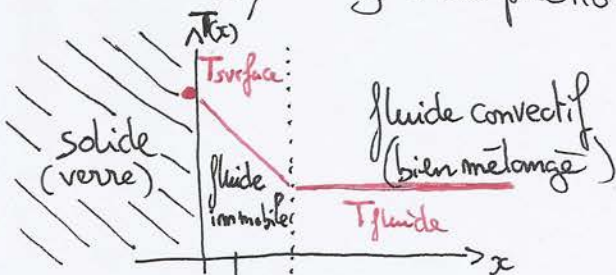
51] Méthode 1: intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote.

Méthode 2: évolution jusqu'à 63% du régime permanent.

Dans les deux cas, on trouve $\tau_{exp} \approx 23 \text{ s}$.

52] $\tau_{mod} = R_{th} C$ avec $R_{th} \approx 0,5 \text{ K.W}^{-1}$ et $C = C_{en} + C_{gaz}$ car il faut fournir de l'énergie au verre et aussi au gaz, ainsi $C = 15,03 \text{ J.K}^{-1}$, et $\tau_{mod} \approx 7,5 \text{ s}$, ce qui sous-estime le temps observé τ_{exp} . Cette estimation est cependant cohérente avec la valeur de la diffusivité de l'enceinte $D_{en} \approx \frac{e^2}{\tau} \rightarrow \tau \approx \frac{e^2}{D} = 7 \text{ s}$.

53] Le thermomètre est plongé brutalement dans un liquide à 0°C : il faut donc tenir compte du saut brutal de température entre le liquide et la surface du verre; il s'agit d'un phénomène de conducto-convection.



↳ hors-programme en BCPST ?

↳ couche limite thermique (CLT): dans cette couche d'épaisseur d ($10^{-5} \text{ m} \leq d \leq 10^{-3} \text{ m}$) le fluide est quasi-immobile, par effet de viscosité: il y a diffusion sans convection.

Le flux surfacique s'écrit alors $j_{CLT} = \frac{\lambda_{fluide}}{d} (T_{surf} - T_{fluide}) = h \cdot \Delta T$

Le coefficient de Newton h est évalué empiriquement.

Ici, pour une convection solide/liquide, on peut prendre $h \approx 200 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

La résistance thermique de conducto-convection est telle que $R_{cc} = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{1}{h \cdot S_{contact}} = \frac{1}{h \cdot 4\pi (bte)^2}$.

Les résistances R_{th} et R_{cc} sont en série, donc $R = R_{th} + R_{cc}$.

On corrige alors $\tau = \tau_{corr} = RC = (0,5 + \frac{5}{6}) \cdot 15,03 \approx 21 \text{ s}$ (→ cohérent).

↳ coefficient de Newton.

$\approx \frac{5}{6} \text{ K.W}^{-1}$