
E.N.S. — 2017

Physique C — PC

Ondes de surface

1 Oscillations d'un volume de fluide

1.1 Oscillations d'un liquide dans un tube en U sous l'effet de la gravité

1.1.1 Détermination de la pulsation propre du système

Q1. La partie gauche du fluide va se mettre à descendre (son poids est supérieur à celui de la partie droite) ; en atteignant son niveau d'équilibre, il possédera une vitesse dirigée vers le bas et passera donc dans la zone $\eta < 0$. À ce moment, le poids excédentaire du fluide de droite va le freiner jusqu'à annuler sa vitesse, puis l'inverser. Le mouvement reprend alors en sens inverse et se poursuit par des oscillations.

Q2. Le fluide se déplace « en bloc » dans le tube et il n'existe pas de zone de compression ou de dilatation. La vitesse est donc de norme uniforme dans tout le fluide et, dans la partie gauche,

$$\underline{\mathbf{v}} = \dot{\eta}(t)\mathbf{e}_z.$$

Q3. La masse du fluide est $m = \rho SL$ se déplace en bloc avec une vitesse de norme $\dot{\eta}$; son énergie cinétique est simplement

$$\underline{E_c = \frac{1}{2}\rho SL\dot{\eta}^2.}$$

Q4. On prendra l'énergie potentielle nulle lorsque $\eta = 0$ (position d'équilibre). On passe de la situation d'équilibre à une dénivellation de 2η en prélevant une hauteur η dans le tube de droite pour le transférer dans le tube de gauche. Dans cette opération, une masse $\rho S\eta$ de fluide a vu son centre de masse passer de $z = -\eta/2$ à $z = +\eta/2$, ce qui lui confère une énergie potentielle

$$\underline{E_g = \rho Sg\eta^2.}$$

le reste du fluide n'étant pas déplacé, cette énergie potentielle représente l'énergie potentielle du fluide dans son ensemble.

Q5. L'énergie mécanique totale du fluide se conserve, donc

$$\frac{d(E_c + E_p)}{dt} = 0 = \rho SL\dot{\eta}\ddot{\eta} + 2\rho Sg\eta\dot{\eta}$$

d'où

$$\underline{\ddot{\eta} + \frac{2g}{L}\eta = 0.}$$

La solution de cette équation est

$$\eta(t) = \eta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{2g}{L}} t \right).$$

Q6. La pulsation vérifie donc bien

$$\omega^2 = \frac{2g}{L},$$

ce qui correspond à une période¹ $T = 2\text{s}$.

Q7. L'expérience est tout à fait réalisable, mais les oscillations observées sont amorties du fait de la viscosité du fluide.

1.1.2 Approche historique des vagues de gravité par NEWTON

Q8. La période d'un pendule simple de longueur ℓ est

$$T_{\text{pend}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

La période des oscillations dans un tube en U est

$$T_U = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}.$$

Ces deux périodes coïncident si $L = 2\ell$ donc si le pendule a une *longueur entre le point de suspension et le centre d'oscillation ... égale à la moitié de la longueur de la colonne d'eau qui est dans le tube en U*.

Q9. La demi-période des oscillations d'un tube en U de longueur $\lambda/2$ est

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{g}}.$$

Au bout de cette durée, le point A se retrouve dans le creux de la vague et le point B sur un crête, ce que l'on visualise comme un déplacement de la vague d'une longueur $\lambda/2$. La vitesse de phase correspondante est alors

$$v = \frac{\lambda/2}{T/2} = \frac{1}{\pi} \sqrt{g\lambda} \quad (1)$$

et la *vitesse des ondes est en raison sous doublée de leur largeur*.

Q10. Avec $v = \omega/k$, (1) se réécrit

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2g}{\pi k} \quad \text{soit} \quad \omega = \sqrt{\frac{2gk}{\pi}}. \quad (2)$$

L'erreur sur la période de la houle est de 25% d'où le commentaire de NEWTON : *le temps n'est déterminé qu'à peu près*.

1.2 Oscillations d'une goutte

1.2.1 Introduction à la capillarité

Q11. Lorsque seule la capillarité est en jeu, l'énergie d'une goutte de masse m est $E_T = \gamma S$. Lorsque sa forme varie, sa surface se modifie mais son volume reste constant égal à m/ρ . La forme d'équilibre est celle qui minimise la surface à volume constant : c'est donc une sphère (ou plutôt une boule).

¹ Avec les 3 chiffres significatifs, presque imposés par l'énoncé, on aurait 2,012, mais est-ce bien utile ?

Q12. Le centre de masse de la goutte se trouvant à une hauteur $h = R$ au-dessus du substrat, les énergies de surface et de gravité sont

$$\underline{E_T = 4\pi\gamma R^2} \quad \text{et} \quad \underline{E_g = \frac{4\pi}{3}\rho g R^4}.$$

Q13. Les phénomènes de capillarité l'emportent sur les effets de la gravité si

$$E_T \gg E_g \quad \text{soit} \quad \underline{R \ll R_c = \sqrt{\frac{3\gamma}{\rho g}} = \sqrt{3} L_c}.$$

Numériquement, $R_c = 4,7 \text{ mm}$.

1.2.2 Modes de vibration d'une goutte cylindrique

Q14. L'aire de la face supérieure est

$$\begin{aligned} \iint r \, dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R(t,\theta)} r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R(t,\theta)^2 \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (R_1(t)^2 + 2a_n(t)R_1(t)\cos(n\theta) + a_n(t)^2\cos^2(n\theta)) \, d\theta \\ &= \pi \left(R_1(t)^2 + \frac{a_n(t)^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Le volume de la goutte, invariable, vérifie donc

$$\pi R_0^2 h = \pi \left(R_1(t)^2 + \frac{a_n(t)^2}{2} \right) h \quad \text{soit} \quad R_1(t) = \sqrt{R_0^2 - \frac{a_n(t)^2}{2}}.$$

Au premier ordre non nul en a_n/R_0 , on aura

$$\underline{R_1(t) = R_0 - \frac{a_n(t)^2}{4R_0}}. \quad (3)$$

Q15. L'élément de longueur en coordonnées cylindriques est $dl = \sqrt{dr^2 + r d\theta^2}$. Le long de la courbe $r = R(\theta, t)$, à t fixé, $dr = (\partial R / \partial \theta) d\theta$, d'où

$$\underline{dl = R \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2} d\theta}.$$

Q16. Ici $\frac{\partial R}{\partial \theta} = -na_n(t)\sin(n\theta)$ donc, au premier ordre,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} \approx -\frac{na_n(t)}{R_1} \sin(n\theta) \approx -\frac{na_n(t)}{R_0} \sin(n\theta)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} dl &= R d\theta \sqrt{1 + \frac{n^2 a_n^2}{R_0^2} \sin^2(n\theta)} \approx R \left(1 + \frac{n^2 a_n^2}{2R_0^2} \sin^2(n\theta) \right) d\theta \\ &= (R_1 + a_n \cos(n\theta)) \left(1 + \frac{n^2 a_n^2}{2R_0^2} \sin^2(n\theta) \right) d\theta \\ &\approx \left(R_1 + a_n \cos(n\theta) + \frac{n^2 R_1 a_n^2}{2R_0^2} \sin^2(n\theta) \right) d\theta \\ &\approx \left(R_0 - \frac{a_n(t)^2}{4R_0} + a_n \cos(n\theta) + \frac{n^2 a_n^2}{2R_0} \sin^2(n\theta) \right) d\theta \end{aligned}$$

et, en intégrant entre 0 et 2π ,

$$l = 2\pi \left(R_0 + \frac{(n^2 - 1)a_n^2}{4R_0} \right).$$

L'accroissement de la surface latérale est

$$\delta S = h(l - 2\pi R_0)$$

et l'énergie capillaire vaut (avec $E_T = 0$ pour la goutte cylindrique)

$$\underline{E_T = (n^2 - 1) \frac{\gamma \pi h a_n^2}{2R_0}}.$$

Q17. Le fluide est incompressible, donc $\text{div } \mathbf{v} = 0$, soit

$$\underline{\Delta \phi = 0.} \quad (4)$$

Q18. Avec $\phi(r, \theta, t) = b_n(r, t) \cos(n\theta)$, l'équation (4) devient, après simplification du cosinus,

$$\frac{\partial^2 b_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial b_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} b_n = 0.$$

On peut en chercher des solutions polynomiales, chacun des termes ayant la même puissance virtuelle. On pose donc $b_n(r, t) = c_n(t)r^m$ et on obtient $m(m-1) + m - n^2 = 0$ soit $m = \pm n$. Mais la solution en r^{-n} diverge au centre de la goutte et on aura donc

$$\underline{b_n(r, t) = c_n(t)r^n.}$$

Q19. La vitesse radiale sur la surface latérale de la goutte est

$$v_r(r = R(\theta, t), \theta, t) = \frac{\partial \phi}{\partial r}(r = R(\theta, t), \theta, t) = nc_n r^{n-1} \cos(n\theta) \big|_{R(\theta, t)} = nc_n(t) R(\theta, t)^{n-1} \cos(n\theta). \quad (5)$$

Cette vitesse doit être égale à la vitesse de variation de $R(\theta, t)$ soit

$$\underline{v_r(r = R(\theta, t), \theta, t) = \frac{\partial R}{\partial t}(\theta, t).} \quad (6)$$

Mais

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \dot{R}_1(t) + \dot{a}_n(t) \cos(n\theta) \approx \dot{a}_n(t) \cos(n\theta)$$

puisque, d'après (3), $\dot{R}_1 = -a_n \dot{a}_n / 2R_0$ est d'ordre 2 en a_n . En remplaçant R par R_0 dans (5) pour ne garder que l'ordre principal, la condition (6) devient simplement

$$nc_n(t) R_0^{n-1} \cos(n\theta) = \dot{a}_n(t) \cos(n\theta) \quad \text{soit} \quad \underline{c_n(t) = \frac{\dot{a}_n(t)}{nR_0^{n-1}}}.$$

On en tire

$$\underline{\phi(r, \theta, t) = \frac{\dot{a}_n(t)}{nR_0^{n-1}} r^n \cos(n\theta).} \quad (7)$$

Q20. On a

$$E_c = \iiint_V \frac{\rho}{2} v(r, \theta, t)^2 d\tau = \iiint_V \frac{\rho}{2} [\mathbf{grad} \phi(r, \theta, t)]^2 d\tau$$

où $\mathcal{V}$ est le volume de la goutte en mouvement. Mais le potentiel ϕ étant déjà d'ordre 1 en a_n , l'intégrande est d'ordre 2 et il suffit d'intégrer sur le volume $\mathcal{V}_0$ de repos de la goutte, d'où

$$E_c = \iiint_{\mathcal{V}_0} \frac{\rho}{2} [\mathbf{grad} \phi(r, \theta, t)]^2 d\tau.$$

Q21. On peut écrire

$$\operatorname{div}(\phi \mathbf{grad} \phi) = \operatorname{div}(\phi) \mathbf{grad}(\phi) + [\mathbf{grad} \phi]^2.$$

Mais l'incompressibilité impose $\operatorname{div}(\phi) = 0$ et on a donc bien

$$[\mathbf{grad} \phi]^2 = \operatorname{div}(\phi \mathbf{grad} \phi).$$

Q22. Par le théorème de GREEN-OSTROGRADSKY,

$$E_c = \oint_{S_0} \frac{\rho}{2} \phi \mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_0} \frac{\rho}{2} \phi(r = R_0, \theta, t) \mathbf{grad} \phi(r = R_0, \theta, t) \cdot d\mathbf{S}$$

où S_0 est la surface totale de la goutte au repos et S_0 sa surface latérale cylindrique au repos. En effet, la vitesse en tout point est perpendiculaire à Oz alors que les vecteurs surface des faces inférieures et supérieures sont dirigés selon cet axe. Sur la surface cylindrique latérale, l'élément $d\mathbf{S} = dS \mathbf{e}_r$ est radial donc $\mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{S} = (\partial \phi / \partial r) dS$ et, avec (7),

$$\begin{aligned} E_c &= \iint_{S_0} \frac{\rho}{2} \frac{\dot{a}_n(t)}{n R_0^{n-1}} R_0^n \cos(n\theta) \frac{\dot{a}_n(t)}{R_0^{n-1}} R_0^{n-1} \cos(n\theta) dS \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2} \frac{\dot{a}_n(t)^2 R_0}{n} \cos^2(n\theta) h R_0 d\theta \end{aligned}$$

et

$$E_c = \frac{\pi \rho h R_0^2}{2n} \dot{a}_n(t)^2.$$

Q23. L'énergie totale $E_T + E_c$ de la goutte se conserve au cours du temps, ce qui impose à a_n de vérifier l'équation

$$\frac{\pi \rho h R_0^2}{n} \dot{a}_n \ddot{a}_n + (n^2 - 1) \frac{\gamma \pi h}{R_0} a_n \dot{a}_n = 0$$

soit

$$\ddot{a}_n + \frac{n(n^2 - 1)\gamma}{\rho R_0^3} a_n = 0.$$

Les différents modes sont donc harmoniques avec des pulsations données par

$$\omega_n^2 = n(n^2 - 1) \frac{\gamma}{\rho R_0^3}.$$

Q24. On trouve² $\omega_3 = 120 \text{ s}^{-1}$ et $\omega_7 = 440 \text{ s}^{-1}$, soit $f_3 = 19 \text{ Hz}$ et $f_7 = 70 \text{ Hz}$.

Q25. Pour une onde stationnaire, la longueur du milieu, ici $2\pi R_0$, doit être un multiple de la longueur d'onde, soit

$$2\pi R_0 = n\lambda_n \quad \text{ou encore} \quad k_n = \frac{n}{R_0}.$$

On peut donc écrire $1/R_0 = k_n/n$ et

$$\omega_n^2 = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{\gamma}{\rho} k_n^3.$$

Q26. Pour les grandes valeurs de n ($\lambda_n \ll R_0$), cette formule se simplifie en

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho} k^3 \quad (8)$$

et la relation de dispersion ne dépend plus du mode.

² ... avec 2 chiffres significatifs seulement ...

2 Ondes de surface

2.1 Vagues en régime d'eau profonde

2.1.1 Cinématique

Q27. L'équation de LAPLACE appliquée au potentiel proposé conduit à

$$0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = b \cos(\omega t - kx + \psi) (-k^2 f(z) + f''(z)) \quad \text{soit} \quad \underline{f''(z) - k^2 f(z) = 0}.$$

La solution finie (la vitesse ne saurait diverger), définie sur $\mathbb{R}^-$ et vérifiant $f(0) = 1$ est

$$\underline{f(z) = e^{kz}}. \quad (9)$$

Q28. Soit P une particule fluide de la surface libre, située en $M = (x, z = \eta(x, t))$ à l'instant t ; elle se trouvera, à $t + dt$, en $M' = (x + v_x dt, z' = \eta(x + v_x dt, t + dt))$. Sa vitesse selon Oz est alors

$$v_z = \frac{Dz}{Dt} = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

soit, en introduisant le potentiel des vitesses,

$$\underline{\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta}}. \quad (10)$$

Q29. En ordre de grandeur, on a $v_x \sim v_z \sim k\phi$. Le déplacement vertical est donc d'ordre $\int v_z dt$, d'où $\eta \sim k\phi/\omega \sim a$. On en tire

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \sim k\phi \sim a\omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} \sim \frac{k^2 \phi}{\omega} \sim ka.$$

À la surface, $\phi \sim b \sim a\omega/k$ et les termes linéaires de (10) sont d'ordre $a\omega$ alors que le terme non linéaire est d'ordre $(ka)(a\omega)$; le terme non-linéaire sera donc négligeable si $a \ll \lambda$ (ou encore $|k\eta| \ll 1$).

Ensuite $\phi(z = \eta) = \phi(z = 0) + \eta \frac{\partial \phi}{\partial z}$, où le premier terme est d'ordre b et le second d'ordre kab , donc négligeable par rapport au premier dans les mêmes conditions que ci-dessus.

On peut donc linéariser (10) en

$$\underline{\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0}}. \quad (11)$$

Q30. Puisque, avec (9), $\frac{\partial \phi}{\partial z} = k\phi$, l'équation (11) devient

$$-\omega a \sin(\omega t - kx) = -kb \cos(\omega t - kx + \psi)$$

d'où

$$\underline{b = \frac{a\omega}{k}} \quad \text{et} \quad \underline{\psi = -\frac{\pi}{2}}.$$

Le potentiel des vitesses s'écrit donc

$$\underline{\phi(x, z, t) = \frac{a\omega}{k} e^{kz} \sin(\omega t - kx)}. \quad (12)$$

Q31. La vitesse de la particule se trouvant en (x, z) l'instant t est

$$\underline{\mathbf{v} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z = a\omega e^{kz} (\cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_x - \sin(\omega t - kx) \mathbf{e}_z)}. \quad (13)$$

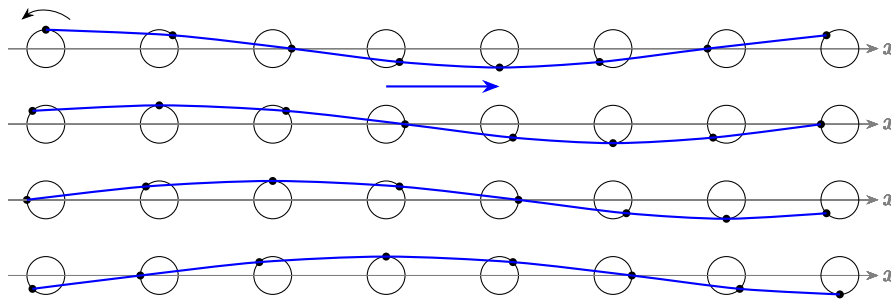


Fig. 1 : Mouvements circulaires et propagation ; la distance d entre deux points est telle que $kd = \pi/4$ et l'intervalle de temps entre chaque ligne est $T/8$.

On peut considérer les termes kx et kz comme constants au cours du temps dans cette expression ; en effet, l'étendue des variations des coordonnées est de l'ordre de a (plus précisément de l'ordre de ae^{kz} et ces termes varient de $\pm ka$, avec $ka \ll 1$. La position (x, z) peut alors être considérée comme étant la *position moyenne* de la particule P étudiée dont la position s'obtient par intégration directe de (13). On obtient alors

$$\begin{cases} x_P = x + ae^{kz} \sin(\omega t - kx) \\ z_P = z + ae^{kz} \cos(\omega t - kx). \end{cases}$$

Les trajectoires sont des cercles de rayon ae^{kz} (décroissant avec la profondeur) parcourus en sens horaire. On peut graphiquement relier ces mouvements circulaires avec la propagation de la vague à l'aide du schéma ci-dessous.

2.1.2 Approche énergétique

Q32. Avec (13), on a immédiatement

$$e_c = \frac{\rho a^2 \omega^2}{2} e^{2kz}.$$

Dès lors,

$$\langle E_c \rangle = \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\rho a^2 \omega^2}{2} e^{2kz} dz = \frac{\rho a^2 \omega^2}{4k} e^{2k\eta}.$$

Puisque $|k\eta| \ll 1$, on peut simplifier cette expression en prenant $e^{2k\eta} = 1$ et

$$\langle E_c \rangle = \frac{\rho a^2 \omega^2}{4k}.$$

Q33. L'énergie potentielle volumique de pesanteur est $e_g = \rho g z$. On notera E_{g0} l'énergie surfacique de repos du fluide (en l'absence d'onde)

$$E_{g0} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} dx \int_{-\infty}^0 e_g(z) dz$$

que l'on prendra comme énergie surfacique de référence³, de sorte

$$E_g = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} dx \int_{-\infty}^{\eta} e_g(z) dz - E_{g0} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} dx \int_0^{\eta} e_g(z) dz = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{\rho g \eta(x, t)^2}{2} dx.$$

En posant $u = kx$, on se ramène à

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho g a^2}{2} \cos^2(\omega t - u) du = \frac{\rho g a^2}{2} \langle \cos^2(\omega t - u) \rangle$$

³ Cette indication manque dans le sujet. C'est d'autant plus gênant que, sans cela, l'intégrale de E_g définie sur le même modèle que E_c est infinie.

et

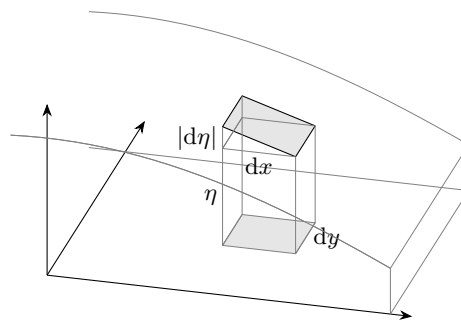
$$\langle E_g \rangle = \frac{\rho g a^2}{4}.$$

Q34. La surface $\delta S = dx dy$ se modifie au cours de l'élévation (algébrique) de la vague et passe à la valeur

$$\delta S' = dy \sqrt{dx^2 + d\eta^2} = \delta S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2}.$$

La variation de la surface élémentaire du fluide sera

$$dS = \delta S' - \delta S = dx dy \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2} (x, t) - 1 \right).$$



Q35. Lorsque $|k\eta| \ll 1$, on peut développer en

$$dS = \frac{1}{2} dx dy \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = \frac{k^2 a^2}{2} dx dy \sin^2(\omega t - kx)$$

de sorte que l'énergie capillaire par unité de surface est

$$E_{\text{cap}} = \int_{y_0}^{y_0+1} dy \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0+\lambda} \frac{\gamma k^2 a^2}{2} \sin^2(\omega t - kx) dx = \frac{\gamma k^2 a^2}{2} \langle \sin^2(\omega t - kx) \rangle$$

d'où

$$\langle E_{\text{cap}} \rangle = \frac{\gamma k^2 a^2}{4}.$$

Q36. L'égalité des énergies cinétique et potentielle moyennes impose alors

$$\frac{\rho a^2 \omega^2}{4k} = \frac{\rho g a^2}{4} + \frac{\gamma k^2 a^2}{4}$$

soit

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3.$$

On retrouve les deux relations de dispersion déjà évoquées au [Q10.](#) et dans (8).

Q37. On aura, avec (12),

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \int_{-\infty}^\eta \rho a \omega e^{kz} \cos(\omega t - kx) dz \mathbf{e}_x = \frac{\rho a \omega}{k \lambda} \int_0^\lambda dx e^{k\eta} \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_x.$$

Le premier ordre non nul pour le calcul de $\langle \mathbf{P} \rangle$ est obtenu en prenant $e^{k\eta} = 1 + k\eta$ au premier ordre en $|k\eta|$ car le terme d'ordre 0 est nul du fait de la moyenne de $\cos(\omega t - kx)$. On a alors

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{\rho a \omega}{k \lambda} \int_0^\lambda \cos(\omega t - kx) dx \mathbf{e}_x + \frac{\rho a^2 \omega}{\lambda} \int_0^\lambda \cos^2(\omega t - kx) dx \mathbf{e}_x = \mathbf{0} + \rho a^2 \omega \langle \cos^2(\omega t - u) \rangle \mathbf{e}_x$$

d'où

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{\rho a^2 c_\phi k}{2} \mathbf{e}_x \quad (14)$$

où $c_\phi = \omega/k$ est la vitesse de phase de l'onde.

Q38. Je ne sais pas trop quoi dire sur la « nature » de la constante $\frac{\rho c_\phi a^2}{2}$ sinon qu'elle est une constante de proportionnalité ... On peut toujours écrire une formule du genre

$$\left(\frac{\langle E_m \rangle}{c_\phi}, \langle \mathbf{P} \rangle \right) = \frac{\rho c_\phi a^2}{2} \left(\frac{\omega}{c_\phi}, \mathbf{k} \right) \quad (15)$$

mais ça ne dit toujours rien sur la « nature » du coefficient.

Si on note S la surface de fluide étudiée, alors $\frac{\rho c_\phi a^2 S}{2}$ a la même dimension que $\hbar$, qui joue un rôle analogue en mécanique quantique.

2.2 Vagues en régime d'eau peu profonde

2.2.1 Effet d'une bathymétrie variable. Cas unidimensionnel

Q39. En régime stationnaire, l'énergie du fluide contenue entre deux plans x_1 et x_2 est constante. Entre deux instants t et $t + dt$, l'énergie qui entre dans le volume étudié à travers une largeur L du plan x_1 est $\delta E_e = E(x_1)Lc(x_1)dt$ et celle qui sort en x_2 est $\delta E_s = E(x_2)Lc(x_2)dt$; ces deux quantités étant nécessairement égales on a, pour toute paire (x_1, x_2) , $E(x_1)c(x_1) = E(x_2)c(x_2)$ ou encore

$$\frac{dEc}{dx} = 0.$$

Q40. En chaque point, une onde de fréquence f , invariable au cours de la propagation, est caractérisée par une longueur d'onde

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{\sqrt{g(h_0 - \beta x)}}{f},$$

c'est-à-dire que la longueur d'onde diminue à l'approche du rivage comme la racine carrée de la profondeur.

Q41. La constance du produit Ec au cours de la propagation indique que $a^2\sqrt{h} = \text{cte}$, c'est-à-dire que a augmente à l'approche du rivage comme

$$a \propto h^{-1/4}.$$

Q42. Comme la profondeur décroît et que l'amplitude croît, l'hypothèse selon laquelle $|\eta| \ll h$ tombe en défaut et les phénomènes non-linéaires prennent de l'importance et conduisent au déferlement de la vague.

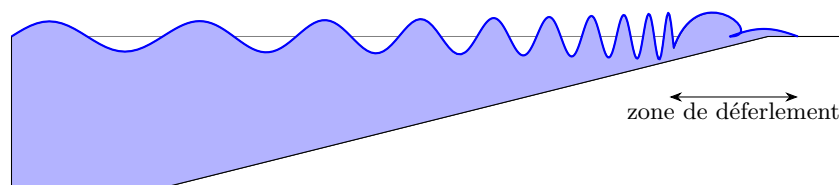


Fig. 2 : Vagues au voisinage des plages

Si, loin de la plage, la hauteur de la houle est a_0 lorsque la profondeur est h_0 , on aura $ah^{1/4} = a_0h_0^{1/4}$. La zone critique où l'on passe d'une houle ($|\eta| \ll h$) en eau peu profonde à une vague déferlante se trouve au voisinage du lieu où $a = h$, soit $h_c = a_0^{4/5}h_0^{1/5}$.

L'énergie de la vague est dissipée dans les phénomènes non-linéaires, les turbulences et communiquée au rivage qui s'érode peu à peu.

2.2.2 Effet d'une bathymétrie variable. Cas général

Q43. Le vecteur d'onde en $x < 0$ est $\mathbf{k}_0 = k_0 \cos \alpha_0 \mathbf{e}_x + k_0 \sin \alpha_0 \mathbf{e}_y$; en $x > 0$, on l'écrit $\mathbf{k}_1 = k_{1x} \mathbf{e}_x + k_{1y} \mathbf{e}_y$. La continuité de la phase en $x = 0$ impose alors

$$(\omega t - k_0 \cos \alpha_0 x - k_0 \sin \alpha_0 y)_{x=0} = (\omega t - k_{1x} x - k_{1y} y)_{x=0}$$

soit $k_{1y} = k_0 \sin \alpha_0$.

Mais $k_0 = \omega/c_0$ et $k_1 = \omega/c_1$ et si on appelle α_1 l'angle entre $\mathbf{k}_1$ et Ox , on obtient

$$\frac{1}{c_1} \sin \alpha_1 = \frac{1}{c_0} \sin \alpha_0.$$

C'est l'équivalent des relations de DESCARTES pour la réfraction des ondes lumineuses.

En reformulant en fonction de la profondeur,

$$\sin \alpha_1 = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} \sin \alpha_0.$$

Q44. On a vu à la question précédente que la conservation de la phase impliquait la conservation de la composante k_y , donc

$$k \sin \alpha = K.$$

Q45. Un déplacement élémentaire le long de $y_R(x)$, $d\ell = dx \mathbf{e}_x + dy_R \mathbf{e}_y$ est localement parallèle à $\mathbf{k}$ puisque ce vecteur définit la tangente à $y_R(x)$. On en tire immédiatement

$$\frac{dy_R}{dx} = \frac{k_y}{k_x} = \frac{k \sin \alpha}{k \cos \alpha}$$

que l'on peut réécrire

$$\frac{dy_R}{dx} = \frac{K}{\sqrt{k^2 - K^2}}.$$

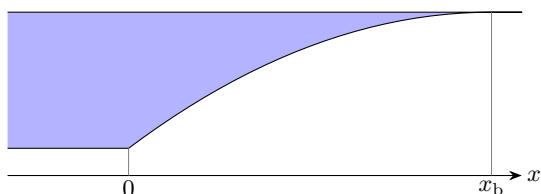


Fig. 3 : Fond parabolique

Q46. On a maintenant $K = k_0 \sin \alpha_0 = \frac{\omega}{\sqrt{gh_0}} \sin \alpha_0$
et $k = \omega / \sqrt{gh(x)}$, d'où

$$\frac{dy_R}{dx} = \frac{\sin \alpha_0}{\sqrt{h_0/h - \sin^2 \alpha_0}}$$

ou encore

$$\frac{dy_R}{dx} = \frac{\sin \alpha_0}{\sqrt{\left(\frac{x_b}{x_b - x}\right)^2 - \sin^2 \alpha_0}}.$$

Q47. Avec $\xi = 1 - x/x_b$ et $\eta = y_R/x_b$, il vient $dy_R/dx = -d\eta/d\xi$ et

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi \sin \alpha_0}{\sqrt{1 - (\xi \sin \alpha_0)^2}}.$$

Q48. On a donc

$$d(\sin \alpha_0 \eta) = -\frac{\xi \sin \alpha_0 d(\xi \sin \alpha_0)}{\sqrt{1 - (\xi \sin \alpha_0)^2}} = d\left(\sqrt{1 - (\xi \sin \alpha_0)^2}\right)$$

et, par intégration directe, avec $y_R(0) = y_0$, on trouve

$$\sin \alpha_0 \frac{y_R - y_0}{x_b} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_0 \left(1 - \frac{x}{x_b}\right)^2} - \cos \alpha_0$$

ou encore

$$(x_b - x)^2 + (y_R - y_0 + x_b \cot \alpha_0)^2 = \frac{x_b^2}{\sin^2 \alpha_0}.$$

C'est l'équation d'un cercle dont le centre se trouve sur la plage en $(x_b, y_0 - x_b \cot \alpha_0)$ et dont le rayon est $x_b / \sin \alpha_0$.

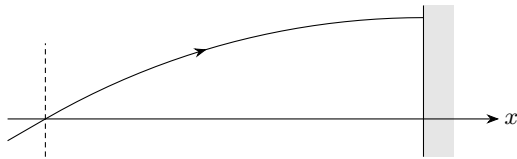


Fig. 4 : Trajectoire des vagues

Q49. Pour $x_b = 1\,000$ m et $\alpha_0 = 30^\circ$, le centre se trouve en $y = -x_b \cot \alpha_0 = -1\,730$ m. Le rayon de la trajectoire vaut 2 000 m donc le point d'impact sur la plage se situe en $y = 270$ m. À ce moment les vagues se déplacent perpendiculairement au rivage.

Q50. Sur la plage, les vagues sont parallèles au rivage.

Q51. Ce phénomène est effectivement observé sur la photographie.

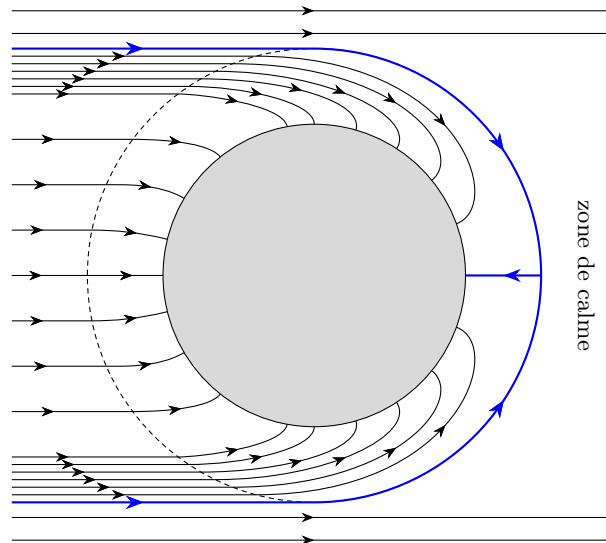


Fig. 5 : Trajectoire des vagues autour de l'île

Q52. Réponse sous toute réserve !

On voit d'après ce qui précède que un train de vague arrivant en $x_b = R_b$ sous un angle de 90° (en bleu sur la Fig. 5) converge vers la plage en suivant un cercle de rayon R_b . Dans le cas de l'île conique, ce cercle reste toujours à la même distance de la plage et je postule donc la trajectoire en bleu. Du fait de la symétrie, 2 trains de vagues, se déplaçant en sens inverse, se rencontrent donc au point $(x = R_b, y = 0)$, avec une vitesse tendant vers 0.

Q53. Si la condition $R \ll \lambda$ n'est plus respectée, il faudra tenir compte de la diffraction.

3 Interactions non-linéaires entre ondes

3.1 Addition de fréquences en optique non-linéaire

Q54. L'énoncé ne le précise pas, mais la propagation a lieu selon Ox , et $\mathbf{E} = E(x, t)\mathbf{e}_y$.

Les équations de MAXWELL permettent d'écrire, d'une part $\mathbf{rot rot E} = -\Delta \mathbf{E}$, car $\text{div } \mathbf{E} = 0$, et d'autre part

$$\mathbf{rot rot E} = -\frac{\partial \mathbf{rot B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = -\mu_0 \varepsilon_0 \left(\mathbf{n}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \chi \frac{\partial^2 E^2}{\partial t^2} \mathbf{e}_y \right),$$

d'où, en projection sur Oy et avec $\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\mathbf{n}(\omega)^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\chi}{c^2} \frac{\partial^2 E^2}{\partial t^2}. \quad (16)$$

Q55. Le second membre étant un terme correctif du fait de la présence de χ , on ne tiendra compte que de A_1 et A_2 dans le calcul de E^2 . Le carré E^2 contient alors des termes constants (car $\langle E^2 \rangle \neq 0$), des termes de pulsations $2\omega_1$ et $2\omega_2$, un terme de pulsation $|\omega_1 - \omega_2|$ et enfin un terme de pulsation $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ qui s'écrit, en notation complexe,

$$E^2 = 2A_1 A_2 e^{i(\omega_3 t - (k_1 + k_2)x)} + \dots;$$

on ne conserve que celui-ci dans le problème étudié. Les trois autres termes qui demeurent dans la dérivée temporelle de E^2 indiquent que le problème n'est pas fermé.

Ensuite, on a

$$\frac{\partial^2 A_p e^{i(\omega_p t - k_p x)}}{\partial x^2} = e^{i(\omega_p t - k_p x)} \left(\frac{d^2 A_p}{dx^2} - 2ik_p \frac{dA_p}{dx} - k_p^2 A_p \right)$$

et si $\ell \gg \lambda$ est la distance caractéristique de variation de A_p , les ordres de grandeurs seront

$$\left| \frac{d^2 A_p}{dx^2} \right| \sim \frac{|A_p|}{\lambda^2} \ll k_p \left| \frac{dA_p}{dx} \right| \sim \frac{|A_p|}{\lambda \ell} \ll k_p^2 |A_p| \sim \frac{|A_p|}{\lambda^2}$$

ce qui fait que le premier terme est négligeable devant les deux autres. Finalement, l'équation (16), décomposée sur chaque composante spectrale, devient

$$\left(\frac{\mathbf{n}(\omega_p)^2 \omega_p^2}{c^2} - k_p^2 \right) A_p - 2ik_p \frac{dA_p}{dx} = 0 \quad \text{pour } p = 1, 2$$

et

$$\left(\frac{\mathbf{n}(\omega_3)^2 \omega_3^2}{c^2} - k_3^2 \right) A_3 - 2ik_3 \frac{dA_3}{dx} = -\frac{2\chi \omega_3^2}{c^2} A_1 A_2 e^{i(k_3 - k_1 - k_2)x}.$$

Q56. On choisit, pour chaque pulsation,

$$k_p = \frac{\mathbf{n}(\omega_p) \omega_p}{c}. \quad (17)$$

Avec ce choix, A_1 et A_2 deviennent indépendant de x et, en notant $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$,

$$\frac{dA_3}{dx} = -\frac{i\chi \omega_3^2}{c^2 k_3} A_1 A_2 e^{-i\Delta k x}.$$

Δk est non nul du fait que $\mathbf{n}$ dépend de ω .

Q57. L'intégration directe entre $x = 0$ et L donne

$$A_3(L) = \frac{\chi\omega_3^2}{c^2k_3\Delta k} A_1 A_2 (e^{-i\Delta k L} - 1). \quad (18)$$

Q58. Partant de $\mathbf{E} = \sum_p \mathbf{E}_p$ et de l'équation de MAXWELL $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, on peut écrire $\mathbf{B}_p = (\mathbf{k}_p \times \mathbf{E}_p) / \omega_p$, en négligeant les dérivées dA_3/dx devant les termes $k_3 A_3$ dans

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}_3 = \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_z = \left(\frac{dA_3}{dx} - ik_3 A_3 \right) e^{i(\omega_3 t - k_3 x)} \mathbf{e}_z,$$

pour obtenir

$$\mathbf{B}_p = \frac{\mathbf{n}(\omega_p)}{c} E_p \mathbf{e}_z.$$

Le vecteur de POYNTING moyen est

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{p,q} \langle \mathbf{E}_p \times \mathbf{B}_q \rangle$$

mais, dans la somme, tous les produits avec $p \neq q$ ont une moyenne nulle, de sorte que

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \sum_p \langle \mathbf{E}_p \times \mathbf{B}_p \rangle = \frac{1}{\mu_0} \sum_p \left\langle \frac{\mathbf{n}(\omega_p)}{c} E_p^2 \right\rangle \mathbf{e}_x = \sum_p I_p \mathbf{e}_x$$

où

$$I_p = \frac{\mathbf{n}(\omega_p)}{\mu_0 c} \langle E_p^2 \rangle \quad \text{soit} \quad I_p = \frac{\mathbf{n}(\omega_p) \varepsilon_0 c}{2} A_p A_p^*. \quad (19)$$

En $x = L$, avec (18)

$$\begin{aligned} A_3 A_3^* &= \left(\frac{\chi\omega_3^2}{c^2k_3\Delta k} \right)^2 A_1 A_1^* A_2 A_2^* (e^{-i\Delta k L} - 1) (e^{+i\Delta k L} - 1) \\ &= \left(\frac{\chi\omega_3^2}{c^2k_3\Delta k} \right)^2 A_1 A_1^* A_2 A_2^* (2 - 2\cos(\Delta k L)) \\ &= \left(\frac{2\chi\omega_3^2}{c^2k_3\Delta k} \right)^2 A_1 A_1^* A_2 A_2^* \sin^2(\Delta k L). \end{aligned}$$

En utilisant (17) et (19), on peut écrire

$$I_3 = \frac{\mathbf{n}(\omega_3) \varepsilon_0 c}{2} \frac{2}{\mathbf{n}(\omega_1) \varepsilon_0 c} \frac{2}{\mathbf{n}(\omega_2) \varepsilon_0 c} \left(\frac{2\chi\omega_3}{c\mathbf{n}(\omega_3)\Delta k} \right)^2 I_1 I_2 \sin^2(\Delta k L)$$

soit

$$I_3 = \frac{8\chi^2\omega_3^2}{\mathbf{n}(\omega_1)\mathbf{n}(\omega_2)\mathbf{n}(\omega_3)\varepsilon_0 c^3} I_1 I_2 \frac{\sin^2(\Delta k L)}{\Delta k^2} = \frac{8\chi^2\omega_3^2 L^2}{\mathbf{n}(\omega_1)\mathbf{n}(\omega_2)\mathbf{n}(\omega_3)\varepsilon_0 c^3} I_1 I_2 \text{sinc}^2(\Delta k L).$$

Q59. On a représenté ci-dessous la courbe $I_3(\Delta k)$, avec

$$I_{3,\max} = \frac{8\chi^2\omega_3^2 L^2}{\mathbf{n}(\omega_1)\mathbf{n}(\omega_2)\mathbf{n}(\omega_3)\varepsilon_0 c^3} I_1 I_2.$$

On obtient une répartition de l'intensité lumineuse similaire à celle que l'on obtient lors de la diffraction d'une onde plane par une fente étroite.

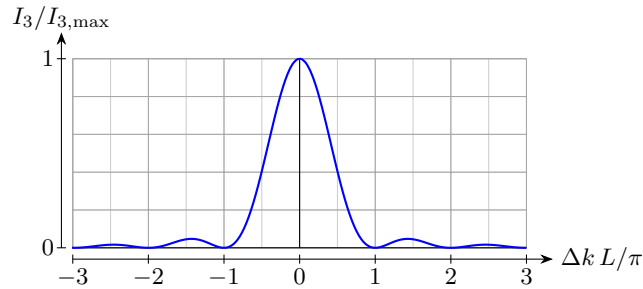


Fig. 6 : $I_3(\Delta k)$

Q60. Sur la graphe de la Fig. 7, on a pris

$$I'_{3,\max} = \frac{8\chi^2\omega_3^2}{\mathbf{n}(\omega_1)\mathbf{n}(\omega_2)\mathbf{n}(\omega_3)\varepsilon_0 c^3(\Delta k)^2} I_1 I_2.$$

$I_3(L)$ est maximale à chaque fois que $\Delta k L = m\pi$ ($m \in \mathbb{N}$).

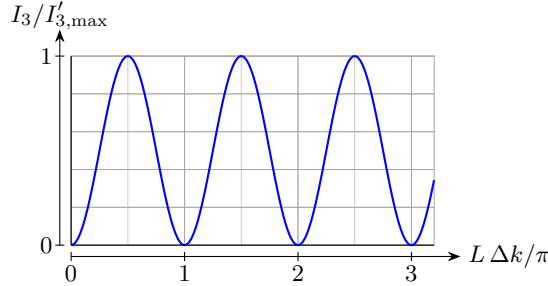


Fig. 7 : $I_3(L)$

Q61. Les indices du milieu pour les deux radiations sont $\mathbf{n}_1 = 1,5 + 2,96 \times 10^{-3}$ et $\mathbf{n}_2 = 1,5 + 7,81 \times 10^{-3}$ et les nombres d'onde valent

$$k_1 = \frac{2\pi\mathbf{n}_1}{\lambda_1} = 7,26 \text{ m}^{-1} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{2\pi\mathbf{n}_2}{\lambda_2} = 11,3 \text{ m}^{-1}.$$

Les pulsations correspondantes sont

$$\omega_1 = \frac{2\pi c}{\lambda_1} = 1,45 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{2\pi c}{\lambda_2} = 2,35 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

d'où l'on tire

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3,80 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}, \quad \lambda_3 = \frac{2\pi c}{\omega_3} = 495 \text{ nm}, \quad \mathbf{n}_3 = 1,5 + 2,04 \times 10^{-2}$$

et, finalement

$$k_3 = \frac{2\pi\mathbf{n}_3}{\lambda_3} = 19,3 \times 10^6 \text{ m}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta k = k_1 + k_2 - k_3 = -1,83 \times 10^5 \text{ m}^{-1}.$$

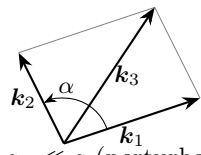
On peut alors calculer

$$\frac{I_{3,\max}}{I_1 I_2} = \frac{8\chi^2\omega_3^2 L^2}{\mathbf{n}(\omega_1)\mathbf{n}(\omega_2)\mathbf{n}(\omega_3)\varepsilon_0 c^3} = 6,90 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{W}.$$

On aura donc $I_3 \ll \sqrt{I_1 I_2}$ si $\sqrt{I_1 I_2} \ll 145 \text{ GW/m}^2$.

Le fait que la génération d'harmonique soit due à un terme non-linéaire quadratique, impose de travailler avec des intensités initiales limitées pour pouvoir considérer les harmoniques générées comme des perturbations.

3.2 Interactions résonantes à trois ondes des vagues



Q62. D'après (14), l'impulsion de l'onde p varie comme $a_p^2 \omega_p \mathbf{u}_p$ ($\mathbf{u}_p$ est la direction de propagation) et d'après (15), son énergie varie en $a_p^2 \omega_p^2 / k_p$. Je ne vois personnellement pas quoi en tirer.

Si $a_1 = a_2 = a$ et $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$, alors $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \propto a^2 \omega_3 \mathbf{u}$ tandis que $\mathbf{P}_3 \propto a_3^2 \omega_3 \mathbf{u}$ (la direction de propagation est conservée puisque $\mathbf{k}_3 = k_3 \mathbf{u}_3 = (k_1 + k_2) \mathbf{u}$) ; or $a_3 \ll a$ (perturbation) donc ... ? Ou alors faut-il oublier ici le caractère « petit » de la troisième onde ?

On peut aller plus loin dans les hypothèses « bizarres » : si le coefficient $\rho c_\phi a^2/2$ était le même pour les 3 ondes, alors les conditions de résonance se transforment en $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_3$ et $E_1 + E_2 = E_3$, c'est-à-dire que les ondes incidentes s'annihilent pour donner naissance à l'onde 3.

Mais tout cela m'a l'air très tiré par les cheveux ...

Dans le cas de l'optique non-linéaire, les conditions de résonances signifie que $\Delta k = 0$ et que l'on est au maximum du couplage (mais avec $I_1, I_2 \gg I_3$ ce qui se transpose ici à $a_1, a_2 \gg a_3$).

Q63. La superposition quadratique des deux fréquences f_1 et f_2 génèrent des harmoniques dont les fréquences sont de la forme $|pf_1 + qf_2|$ où $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.

Si on excepte $f_2 - f_1 = 3$ Hz en dehors du diagramme, les premiers termes composites sont bien là, à savoir $f_1 + f_2, 2f_1, 2f_2, 2f_1 + f_2, 2f_2 + f_1$ de même que $2f_2 - f_1 = 21$ Hz et $2f_1 - f_2 = 12$ Hz, ou $3f_1 = 45$ Hz et $3f_2 = 54$ Hz, etc.

Le bruit à 50 HZ provient de l'alimentation des instruments de mesure.

Q64. Si $kL_c \gg 1$, alors

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\gamma k^3}{\rho} \gg \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\rho g^3}{\gamma}} = \frac{g}{4\pi^2 L_c} \quad \text{soit} \quad f \gg f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L_c}}.$$

f_1 et f_2 ne vérifient pas vraiment cette condition à ce stade de l'énoncé ! On prendra directement les valeurs de fréquences de la question suivante, soit $f_1 = 60$ Hz et $f_2 = 70$ Hz !

On a alors

$$k = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 \rho f^2}{\gamma}}$$

d'où $k_1 = 1\,250 \text{ m}^{-1}$ et $k_2 = 1\,390 \text{ m}^{-1}$.

La condition de résonance nous permet de calculer $f_3 = 130$ Hz et $k_3 = 2\,100 \text{ m}^{-1}$.

Q65. On trace les cercles de rayons k_1 et k_3 et on positionne le vecteur $\mathbf{k}_1$. En prenant l'extrémité de $\mathbf{k}_1$ comme centre, on trace le cercle de rayon k_2 ; les intersections de ce cercle avec le cercle de rayon k_3 donnent deux solutions pour $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{k}_3$, symétriques par rapport à $\mathbf{k}_1$. L'angle α est donc déterminé de façon univoque.

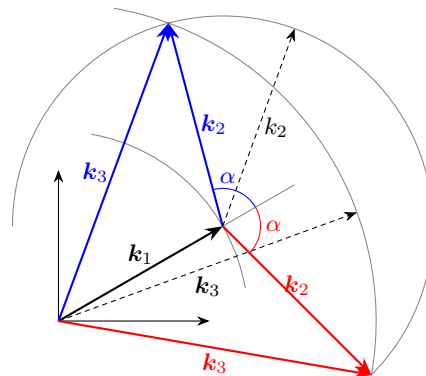


Fig. 8 : Résolution graphique

Q66. On a $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2 \cos \alpha = k_3^2$, d'où

$$\cos \alpha = \frac{k_3^2 - k_1^2 - k_2^2}{2k_1k_2}.$$

Ici $\alpha = 75^\circ$.

Q67. Cette fois-ci il faut $f \ll f_c$, d'où le choix $f_1 = 1$ Hz et $f_2 = 2$ Hz. Dès lors $f_3 = 3$ Hz et

$$k_1 = \frac{4\pi^2 f_1^2}{g} = 4 \text{ m}^{-1}, \quad k_2 = \frac{4\pi^2 f_2^2}{g} = 16,1 \text{ m}^{-1} \quad \text{et} \quad k_3 = \frac{4\pi^2 f_3^2}{g} = 36,2 \text{ m}^{-1}.$$

Q68. Il apparaît clairement sur la Fig. 9 que le problème résonant n'a pas de solution ici. En effet, le calcul mené au Q66. montre que cette solution n'existe que si

$$|k_1 - k_2| < k_3 < k_1 + k_2$$

alors qu'ici, $k_1 + k_2 < k_3$.

Q69. Si $k \propto f^{1/\beta}$, l'existence d'une solution n'est garantie que si $k(f_1) + k(f_2) > k(f_1 + f_2)$, donc si $f_1^{1/\beta} + f_2^{1/\beta} > (f_1 + f_2)^{1/\beta}$ ou encore, en posant $u = (f_2/f_1)^{1/\beta}$,

$$\forall u > 0 \quad (1 + u)^\beta > 1 + u^\beta.$$

On pose alors $f(u) = 1 + u^\beta$ et $g(u) = (1 + u)^\beta$ avec $f(0) = g(0) = 1$ ($\beta > 0$). Pour $u > 0$ on a

$$f'(u) = \beta u^{\beta-1} \quad \text{et} \quad g'(u) = \beta(1 + u)^{\beta-1}$$

ce qui impose $0 < f'(u) < g'(u)$ si $\beta > 1$ et $0 < g'(u) < f'(u)$ si $\beta < 1$. La condition $g(u) > f(u)$ avec $g(0) = f(0)$ ne se réalise donc que si $\underline{\beta > 1}$.

C'est bien le cas des ondes capillaires ($\beta = 3$) et on a bien absence de solution pour les ondes de gravité ($\beta = \frac{1}{2}$).

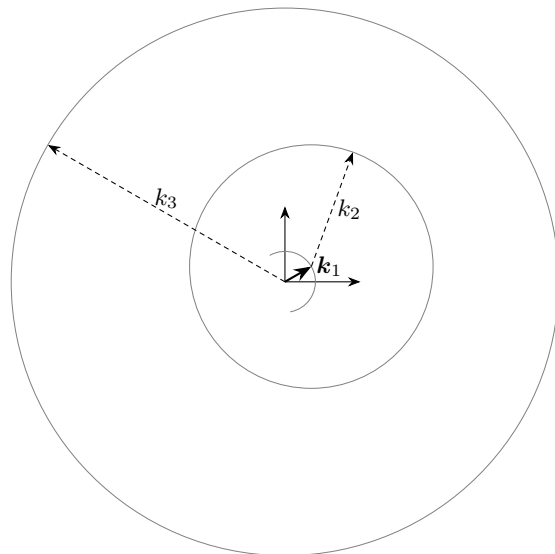


Fig. 9 : Absence de solution si $k_1 + k_2 < k_3$