

I. Modélisation de la réponse élastique d'un solide

I.A. Considérations préliminaires

- Equilibre du cube: $\vec{0}' = m\vec{g}' + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \text{face sup}} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \text{face inf}}$

$$\vec{0}' = -\rho a^3 g \vec{u}_z + \sigma_z a^2 \vec{u}_z + (-\vec{\sigma}' a^2)$$

↑ action réciproque

donc: $\boxed{\vec{\sigma}' = (\sigma_z - \rho g a) \vec{u}_z}$

2. Le poids est négligeable si: $\rho g a \ll \sigma_z$

3. Une force agissant sur un volume est une force à distance.

I.B. Etat de contrainte uniaxial

4. L'hypothèse est: $\Delta L_m \ll L_m$

5. $E \sim 10^{11} \text{ Pa}$ pour l'acier

justification: $c_{\text{son dans un solide}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \rightarrow E = \rho c_{\text{son}}^2 \sim 10^4 \cdot (3 \cdot 10^3)^2 \sim 10^{11} \text{ Pa}$

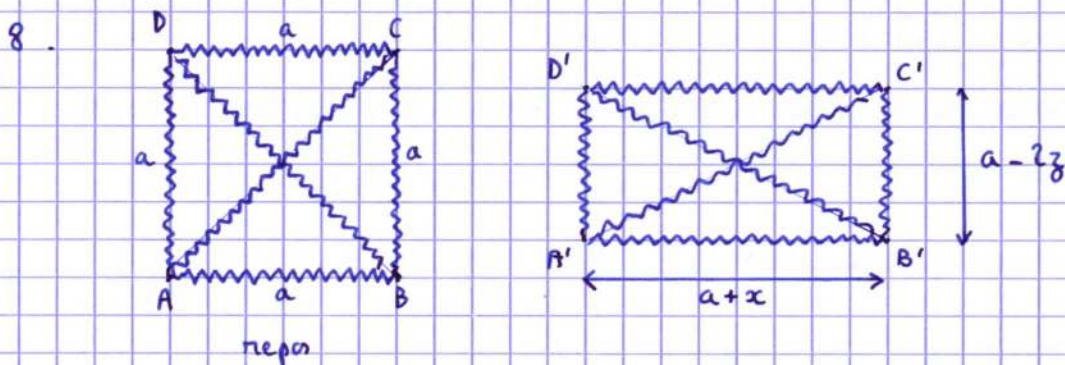
6. Symétrie de révolution autour de $Oz \Rightarrow Ox$ et Oy sont équivalents

$$\Rightarrow \boxed{v_x = v_y}$$

7. Travail élémentaire de $\vec{F}$: $\delta W = F dx = -d(-Fx)$

$\Rightarrow$ énergie potentielle $-Fx$ associée à la force $\vec{F}$

L'énergie potentielle totale: $\boxed{\Psi = E_p - Fx}$ est minimale à l'équilibre stable



$$E_p = 2 \times \frac{1}{2} k x^2 + 2 \times \frac{1}{2} k (2z)^2 + 2 \times \frac{1}{2} k' (l - a\sqrt{2})^2$$

$$\text{avec: } l = [(a+x)^2 + (a-2z)^2]^{1/2}$$

$$= [a^2 + 2ax + x^2 + a^2 - 4az + 4z^2]^{1/2}$$

$$= [2a^2 + 2ax - 4az + x^2 + 4z^2]^{1/2}$$

$$l = a\sqrt{2} \left[1 + \frac{x}{a} - \frac{2z}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{2z^2}{a^2} \right]^{1/2}$$

$$\text{donc: } l \approx a\sqrt{2} \left(1 + \frac{x}{2a} - \frac{z}{a} \right)$$

$$\text{puis: } E_p = kx^2 + 4kz^2 + k' \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}z \right)^2$$

$$\text{Finalement: } \Psi = kx^2 + 4kz^2 + k' \left(\frac{x^2}{2} + 2z^2 - 2xz \right) - Fx$$

$$9. \text{ A l'équilibre: } \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2kx + k'x - 2k'z - F = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \Rightarrow 4kz + 2k'z - k'x = 0$$

10. NB : L'énoncé me semble mal posé car il y a une inversion des rôles de Ox et Oz entre les figures 1 et 2

Contrainte $\frac{F}{a^2}$ selon $Ox \Rightarrow$ élongation $\Delta L_x = x$ selon Ox

contraction $\Delta L_z = -2z$ selon Oz

Par définition du coefficient de Poisson: $-2z = -\nu x \Rightarrow 2z = \nu x$

On reporte dans la 2^e relation de la question 9: $2k\nu x + k'\nu x - k'x = 0$

$$(2k + k')\nu = k'$$

$$\text{donc: } \nu = \frac{k'}{2k + k'}$$

Cas particuliers: • $k = k'$: $\nu = \frac{1}{3}$

• $k \gg k'$: $\nu \approx \frac{k'}{2k} \ll 1$ il n'y a quasiment pas de contraction latérale

• $k \ll k'$: $\nu = 1$ l'allongement est identique à la contraction

11. Par définition de E : $\frac{F}{a^2} = E \frac{x}{a} \Rightarrow F = Eax$

La première relation de la question 9 donne: $2kx + k'x - k'\nu x - F = 0$

$$\Rightarrow F = (2k + k'(1 - \nu))x$$

$$\text{En égalant les deux expressions de } F: \boxed{E = \frac{2k + k'(1 - \nu)}{a}} \left(= \frac{4k(k + k')}{a(2k + k')} \right)$$

Cas particuliers: • $k = k'$: $E = \frac{8k}{3a}$

• $k \gg k'$: $E = \frac{2k}{a}$

• $k \ll k'$: $E = \frac{4k}{a}$

E paramètre intensif $\Rightarrow E$ indépendant de $a \Rightarrow k$ et k' proportionnels à a

I-C Etat de contrainte plan

12. On a: $\sigma_z = E \epsilon_z \Rightarrow \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$

puis: $\epsilon_x = \frac{\Delta L_x}{a} = -\frac{\nu \Delta L_z}{a} = -\nu \epsilon_z \Rightarrow \epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_z$

σ_x et σ_y sont équivalents, donc: $\epsilon_x = \epsilon_y$

13. On inverse les rôles de σ_x et σ_z : $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x$

14. Par principe de superposition dans un milieu linéaire:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_z \quad \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x$$

15. Si $\sigma_z = -\sigma_x = \sigma$:

$\epsilon_x = -\frac{(\nu+1)}{E} \sigma$
$\epsilon_y = 0$
$\epsilon_z = \frac{(\nu+1)}{E} \sigma$

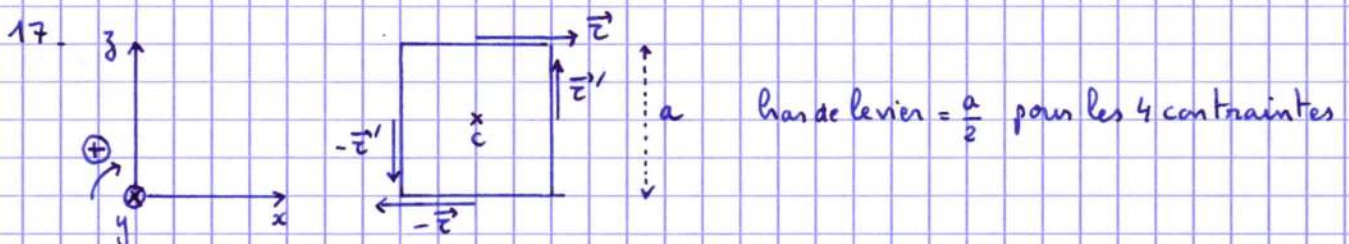
$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{(a+\Delta L_x)(a+\Delta L_y)(a+\Delta L_z) - a^3}{a^3} \\ &= \frac{a^3(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(1+\epsilon_z) - a^3}{a^3} \\ &= (1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(1+\epsilon_z) - 1 \\ &\approx 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z - 1 \quad (\text{à l'ordre 1}) \end{aligned}$$

donc: $\frac{\Delta V}{V} = 0$

I-D Etat de cisaillement simple

16. La loi $\tau = \gamma G$ est vérifiée sauf pour $\gamma < 10\%$

La pente est: $G \approx \frac{12 \cdot 10^6 - 0,2 \cdot 10^6}{1,5 - 0,1}$ soit: $G = 7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$



Loi scalaire du moment cinétique par rapport à l'axe C_z , à l'équilibre:

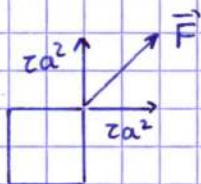
$$\tau \cdot \frac{a}{2} \times 2 - \tau' \cdot \frac{a}{2} \times 2 = 0 \Rightarrow \tau = \tau'$$

Si $a \rightarrow 0$, le volume tend vers 0, donc le couple volumique tend vers 0 ainsi que le moment d'inertie du cube par rapport à l'axe Cy
 $\Rightarrow$ la loi du moment cinétique est inchangée
 $\Rightarrow \tau = \tau'$

18 - A l'équilibre: $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow 4k'x - \sqrt{2}F = 0$
 $\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \Rightarrow 4kz + 4k'z - \sqrt{2}F = 0$

D'après la figure 6: $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{x}{a+z} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} \approx \frac{x}{a} \Rightarrow \gamma \approx \frac{2x}{a}$

On a aussi:



$$F = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \tau a^2 = \sqrt{2} \tau a^2$$

En utilisant la première relation à l'équilibre: $4k' \cdot \frac{a\gamma}{2} - \sqrt{2}(\sqrt{2} \tau a^2) = 0$

$$2k'a\gamma - 2\tau a^2 = 0$$

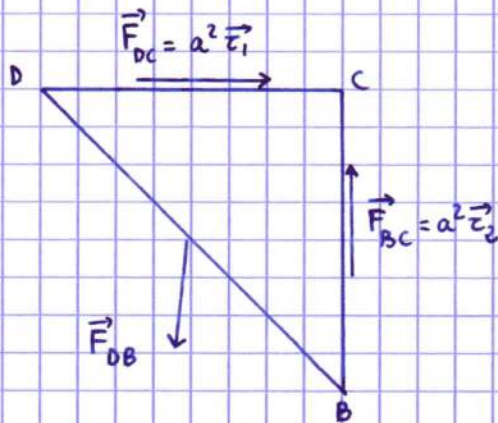
$$k'\gamma - \tau a = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{k'}{a} \gamma$$

On en déduit: $G = \frac{k'}{a}$

I. E Lien entre les modules de Young et de cisaillement

19.



Equilibre du domaine DCB: $\vec{F}_{DC} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{DB} = \vec{0}$

$$\Rightarrow a^2 z \vec{u}_x + a^2 z \vec{u}_y + \vec{F}_{DB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{DB} = -a^2 z (\vec{u}_x + \vec{u}_y) = -a^2 z \sqrt{2} \vec{u}_x$$

Par définition: $\vec{\sigma}_1 = \frac{\vec{F}_{DB}}{S}$ avec: $S = a \cdot DB = \sqrt{2} a^2$

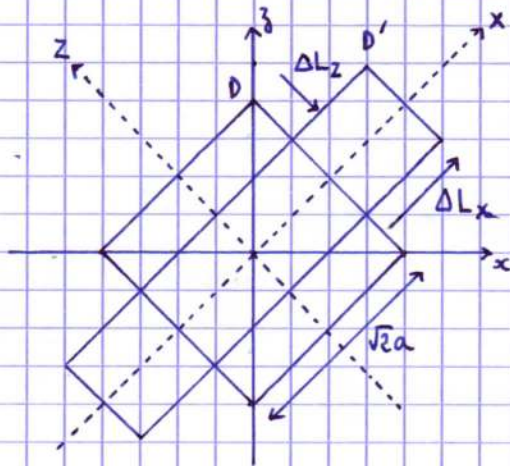
$$= \frac{a^2 z \sqrt{2}}{\sqrt{2} a^2} \vec{u}_x$$

donc: $\vec{\sigma}_1 = \tau \vec{u}_x$ Or on a: $\sigma = \tau$

20. De la même façon:

$$\vec{\sigma}_2 = -\tau \vec{u}_z$$

21.



En utilisant la question 15, on a:

$$\Delta L_x = a\sqrt{2} \epsilon_x = a\sqrt{2} \frac{\sigma}{E} (1+\nu)$$

$$\Delta L_z = a\sqrt{2} \epsilon_z = -a\sqrt{2} \frac{\sigma}{E} (1+\nu)$$

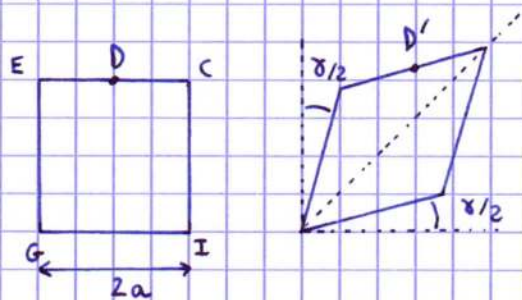
Donc: $\vec{DD}' = \Delta L_x \vec{u}_x + \Delta L_z \vec{u}_z$

$$= a\sqrt{2} \frac{\sigma}{E} (1+\nu) (\vec{u}_x - \vec{u}_z)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \vec{u}_x$$

$$\vec{DD}' = 2a \frac{\sigma}{E} (1+\nu) \vec{u}_x$$

22.



En supposant l'angle $\frac{\delta}{2}$ petit, on a:

$$\frac{\delta}{2} \approx \frac{(DD')_x}{2a} \Rightarrow (DD')_x = \delta a$$

et d'après la relation (7): $\delta = \frac{\tau}{G}$

donc: $(DD')_x = \frac{\tau a}{G}$

23. En identifiant les 2 expressions de $(DD')_x$: $2a \frac{\sigma}{E} (1+\nu) = \frac{\tau a}{G}$

Comme $\sigma = \tau$, on a: $E = 2G(1+\nu)$

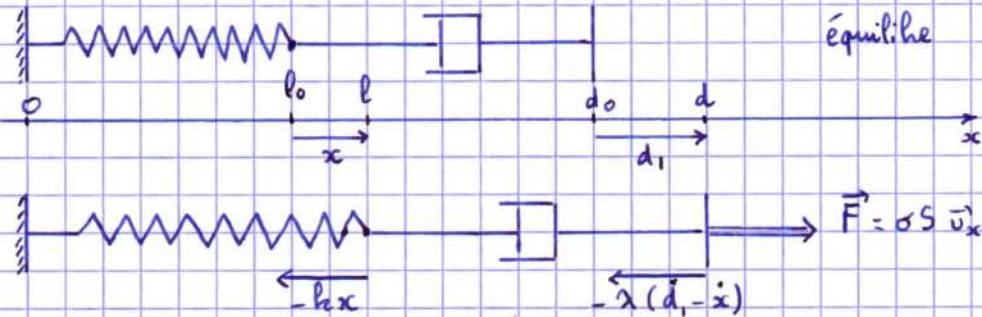
24. La figure 7 montre que deux contraintes normales à 90° sont équivalentes à une contrainte tangentielle à 45° .
Cela peut expliquer l'apparition de plans de rupture à 45° .

II Viscoélasticité d'une solution de polymères

25. La modélisation est linéaire car on suppose $|\dot{d}| \ll \dot{d}_0$

26. Le modèle est plus adapté à un liquide viscoélastique car l'amortisseur représente des frottements fluides.

27.



En négligeant les termes d'accélération (effets inertiels), on a: $F = \lambda(\dot{d}_1 - \dot{x}) = kx$

Nombre de cellules: $\frac{d_0}{a} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = \frac{d_0}{a} \cdot BB' = d_0 E \\ x = \frac{d_0}{a} \cdot AA' = d_0 E_e \end{cases}$

On a aussi: $E_v = \frac{AB' - AB}{a} = \frac{BB' - AA'}{a} = E - E_e$

Donc: $F = kx \Rightarrow \sigma S = k d_0 E_e \Rightarrow \sigma = \frac{k d_0}{S} E_e \Rightarrow E = \frac{k d_0}{S}$

$F = \lambda(\dot{d}_1 - \dot{x}) \Rightarrow \sigma S = \lambda(d_0 \dot{E} - d_0 \dot{E}_e) \Rightarrow \sigma = \frac{\lambda d_0}{S} (\dot{E} - \dot{E}_e) = \frac{\lambda d_0}{S} \dot{E}_v \Rightarrow \eta = \frac{\lambda d_0}{S}$

28. $\sigma = \sigma_e = \sigma_v$ (éléments en série et effets inertiels négligés)

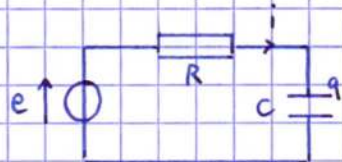
$\Rightarrow \sigma = \eta(\dot{E} - \dot{E}_e) = \eta(\dot{E} - \frac{\dot{\sigma}}{E})$

$\Rightarrow \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} + \sigma = \eta \dot{E}$

$\Rightarrow \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta} \sigma = E \dot{E}$ soit: $\boxed{\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{T} = E \dot{E}}$ avec: $T = \frac{\eta}{E}$

29. $\sigma = \sigma_e = \sigma_v$ pour les éléments en série $\Leftrightarrow$ conservation de i pour un circuit série

on peut proposer:



$Ri + \frac{q}{C} = e$

$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}$ car $i = \frac{dq}{dt}$

donc: $\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = \frac{1}{R} \frac{de}{dt}$ analogue de: $\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{T} = E \frac{dE}{dt}$

Correspondances: $\sigma \leftrightarrow i$ $E \leftrightarrow e$ $E \leftrightarrow \frac{1}{R}$ $\eta \leftrightarrow C$

30. L'équation différentielle en notation complexe est: $i\omega \underline{\sigma} + \frac{\sigma}{T} = i\omega E \underline{E}$

$i\omega \underline{E} \underline{E} + \frac{1}{T} \underline{E} \underline{E} = i\omega E \underline{E}$

donc: $(i\omega T + 1) \underline{E} = i\omega T \underline{E}$

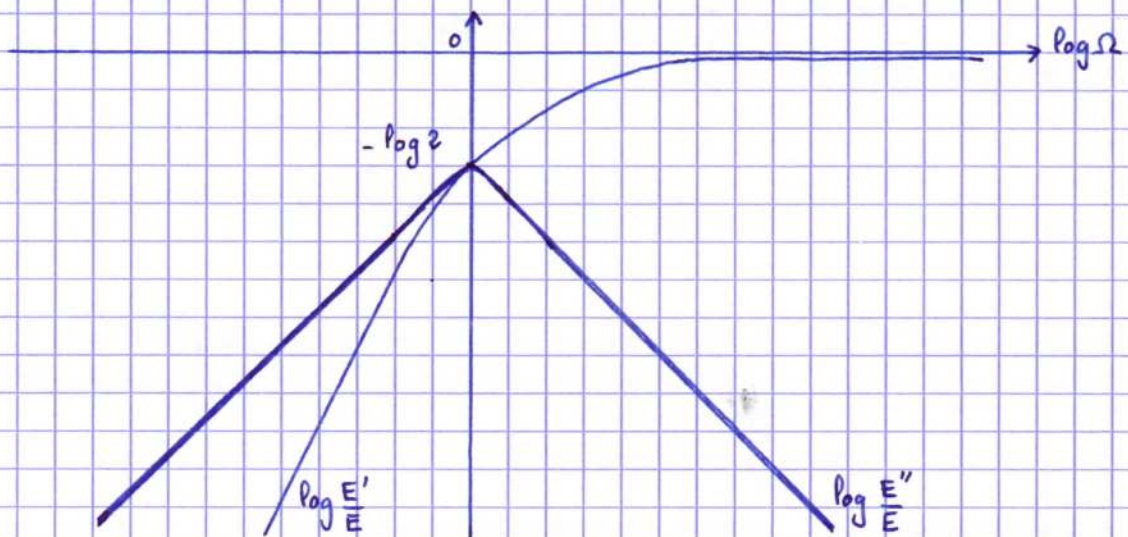
En posant $\Omega = \omega T$, on a: $\underline{E} = \frac{i\Omega \underline{E}}{1+i\Omega}$

On a: $\underline{E} = \frac{i\Omega \underline{E}(1-i\Omega)}{1+\Omega^2} \Rightarrow \underline{E}' = \frac{E\Omega^2}{1+\Omega^2} \quad \underline{E}'' = \frac{E\Omega}{1+\Omega^2}$

$\Omega \ll 1$: $\frac{E'}{E} \approx \Omega^2$ et $\frac{E''}{E} \approx \Omega \Rightarrow \log \frac{E'}{E} = 2 \log \Omega$ et $\log \frac{E''}{E} \approx \log \Omega$

$\Omega = 1$: $E' = E'' = \frac{E}{2} \Rightarrow \log \frac{E'}{E} = \log \frac{E''}{E} = -\log 2$

$\Omega \gg 1$: $\frac{E'}{E} \approx 1$ et $\frac{E''}{E} \approx \frac{1}{\Omega} \Rightarrow \log \frac{E'}{E} = 0$ et $\log \frac{E''}{E} = -\log \Omega$



Pour $\Omega \gg 1$ ($\omega \gg \frac{1}{T}$): $\underline{E} \approx E$ le milieu a un comportement de solide élastique

Pour $\Omega \ll 1$ ($\omega \ll \frac{1}{T}$): $\underline{E} \approx iE'' = iE\Omega = i\omega ET = i\omega\eta \Rightarrow \sigma = \eta \dot{\epsilon}$

$\Rightarrow$ le milieu a un comportement de fluide visqueux

$E' = E''$ pour $\Omega = 1$. Les deux effets sont comparables.

On a: $\underline{E} = \frac{E}{2}(1+i) \Rightarrow$ contrainte et déformation sont déphasées de $\frac{\pi}{4}$

32. Puissance reçue par l'échantillon: $\mathcal{P} = F \cdot \dot{d}_1$

Donc: $\mathcal{P}_v = \frac{F \dot{d}_1}{S d_0} = \sigma \cdot \dot{\epsilon}$ donc: $\boxed{\mathcal{P}_v = \sigma \cdot \dot{\epsilon}}$

33. $\langle \mathcal{P}_v \rangle = \langle \sigma \dot{\epsilon} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{E} \cdot \underline{E} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}^*)$

On a: $\underline{E} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}^* = \epsilon_0 e^{i\omega t} \cdot (-i\omega \epsilon_0 e^{-i\omega t}) = -i\omega \epsilon_0^2$

donc: $\langle \mathcal{P}_v \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}((E' + iE'')(-i\omega \epsilon_0^2))$

d'où: $\boxed{\langle \mathcal{P}_v \rangle = \frac{1}{2} \omega E'' \epsilon_0^2}$

Analogie avec la puissance dissipée dans un milieu d'indice complexe en électromagnétisme.

34. □ : courbe de E' x : courbe de E''

Le modèle de Maxwell convient sauf pour E'' dans le domaine haute fréquence.

35. En haute fréquence: $E' \approx E$ On lit: $E = 20 \text{ Pa}$

$$\Omega = 1 \text{ pour } \omega = 7 \cdot 10^{-2} \text{ rads}^{-1} \Rightarrow T = \frac{1}{7 \cdot 10^{-2}} \approx 14$$

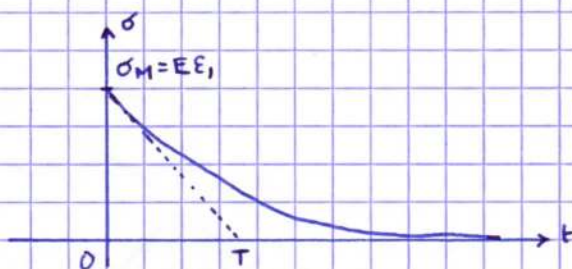
$$\Rightarrow \eta \approx 280 \text{ Pl}$$

36. La mise en mouvement de l'équipage mobile nécessite une énergie supplémentaire. Cela va modifier l'énergie dissipée dans le milieu. C'est donc E'' (module de perte) qui est affecté par cette correction.

37. $\dot{E} = 0$ pour $t > 0$ donc: $\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{T} = 0$ de solution $\sigma = A e^{-\frac{t}{T}}$

À $t=0$: $\sigma(0) = A = EE_1$

donc: $\sigma = EE_1 e^{-t/T}$



38. • Pâte posée sur la table: on est dans une situation du type $\Omega \ll 1$ (basse fréquence)
D'après la question 31, le milieu a un comportement de fluide visqueux
 $\Rightarrow$ étalement lent

• Pâte lancée contre le sol: on est dans une situation du type $\Omega \gg 1$ (haute fréquence)
D'après la question 31, le milieu a un comportement de solide élastique
 $\Rightarrow$ rebond