

Corrigé distribuable aux étudiants.
 Contacter Simon.laurette@prepas.org par toute
 erreur.
 S. LAURETTE
 A / Conduction dans les métaux

Le milieu conducteur d'un fusible est constitué par un fil métallique de forme cylindrique orienté suivant l'axe Bx , de section constante S , de longueur $L = 3,0$ cm et de conductivité σ . Une différence de potentiel constante $U = V_A - V_B$ est appliquée entre ses extrémités B ($x = 0$) et A ($x = L$).

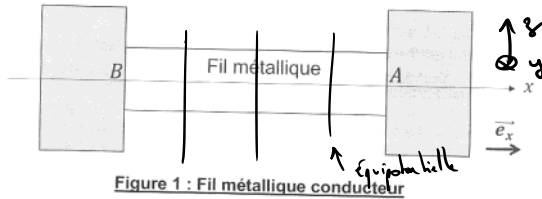


Figure 1 : Fil métallique conducteur

- A1. On considère un point M dans le fil métallique. On suppose les équipotentielle planes et perpendiculaires à l'axe Bx . Quelles sont les dépendances du potentiel électrique V en M ? Résoudre l'équation de Poisson dans le conducteur.

Equipotentielle $\perp Bx \Rightarrow V$ ne dépend ni de y ni de z
 $\Rightarrow V = V(x)$

Equation de Poisson : $\Delta V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$

Dans le conducteur : $\rho = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$
 $\downarrow \text{1D}$
 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = A \Rightarrow V(x) = Ax + B$

$\begin{cases} \text{en } x=0 & V = V_B = B \\ \text{en } x=L & V = V_A = AL + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = V_B \\ A = \frac{V_A - V_B}{L} = \frac{U}{L} \end{cases}$

$\Rightarrow V(x) = \frac{U}{L}x + V_B$

- A2. En déduire la direction du champ électrostatique $\vec{E}$ et son expression en M en fonction de U et L .

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{U}{L} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} = -\frac{U}{L} \vec{e}_1 = \vec{E}$
 $\Rightarrow$ pointé par $\vec{e}_x$

- A3. Quel est l'ordre de grandeur de la différence de potentiel U_{secteur} imposée aux bornes d'un récepteur électrique domestique ? Si on impose cette différence de potentiel aux bornes du fusible que devrait-il se passer ? Selon vous, dans une utilisation normale, à quelle différence de potentiel est soumis le fusible ? Dans le cas où on impose U_{secteur} à ses bornes, donner un ordre de grandeur du champ électrique dans le fusible.

- $U_{\text{secteur}} \approx 230\text{V}$

- Si on met un fusible sur le secteur
 $\Rightarrow$ $\approx$ court-circuit $\Rightarrow$ situation que l'on souhaite éviter
 $\Rightarrow$ Il faut que le fusible rompe et ouvre le circuit.
- en situation normale, fusible = résistance

$$U = RI = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} \times I$$

avec $L = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
 $\sigma = 5 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ (plomb)
 $S \approx (0,1 \text{ mm})^2 = 10^{-8} \text{ m}^2$
 $I \approx 10 \text{ A}$

estimation, s'écrit à partir d'ordres de grandeur de diamètres donnés plus loin.

$$\Rightarrow U = \frac{3 \cdot 10^{-2} \times 10}{5 \cdot 10^6 \times 10^{-8}} \approx 5 \text{ V pour un courant de } 10 \text{ A}$$

$$\Rightarrow 0,5 \text{ V par } 1 \text{ A}$$

- pour $U = U_{\text{secteur}}$

$$\|E\| = \frac{U}{L} = \frac{230 \text{ V}}{3 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \approx \frac{3 \cdot 10^2 \text{ V}}{3 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \approx 10^4 \text{ V/m}$$

Un métal est modélisé par un réseau cristallin d'ions positifs fixes dans lequel des électrons de conduction, de charge $(-e)$ et de masse m_e , se déplacent librement. La densité volumique d'électrons de conduction dans le métal est notée n .

A4. Calculer, à l'aide des données, la densité volumique d'électrons de conduction n_{Al} dans l'aluminium.

1 atome Al libère $3e^-$ de conduction

Soit n_{ion} la densité volumique d'ions Aluminium dans le métal

$$\Rightarrow n_{\text{Al}} = 3 n_{\text{ion}}$$

$$\text{or } n_{\text{ion}} = \frac{\mu_{\text{Al}}}{m_{\text{Al}} \text{ atome Al}} = \frac{\mu_{\text{Al}}}{M_{\text{Al}} / N_A}$$

$$\Rightarrow n_{\text{Al}} = 3 \frac{\mu_{\text{Al}} N_A}{M_{\text{Al}}}$$

$$\text{Al: } n_{\text{Al}} = 3 \cdot \frac{26989 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} \times 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{27 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

$$n_{\text{Al}} = 1,81 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

A5. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un électron libre entre deux chocs successifs dans le référentiel supposé galiléen R du laboratoire. On précisera pourquoi l'action de la pesanteur peut être négligée. On choisira un ordre de grandeur usuel pour la valeur du champ électrique, $E = 10 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

système {électron}; référentiel inerte galiléen

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = m_e \vec{g} - e \vec{E}$$

$$\text{or } \frac{m_e g}{e E} \approx \frac{10^{-30} \times 10}{10^{-19} \times 10} \ll 1$$

$$\text{or } \frac{m_e g}{e E} \neq \frac{10^{-30} \times 10}{10^{-19} \times 10} \ll 1$$

$\Rightarrow$ l'action de la pesanteur peut être négligée

$$\Rightarrow m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \frac{e\vec{E}}{m_e} t$$

A6. Expliquer pourquoi la vitesse $\vec{v}_0$ ne contribue fondamentalement pas à la vitesse moyenne des électrons.

$\vec{v}_0$ étant de direction et norme aléatoires, on a donc $\langle \vec{v}_0 \rangle = \vec{0}$, toutes les directions étant équiprobables.

A7. Exprimer la vitesse moyenne selon l'axe Bx notée $\langle v_x \rangle$ en fonction de e , m_e , τ et de U et L .

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{e}{m_e} \frac{U}{L} t \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \langle \vec{v}(t) \rangle = \underbrace{\langle \vec{v}_0 \rangle}_{\vec{0}} + \frac{e}{m_e} \frac{U}{L} \underbrace{\langle t \rangle}_{\tau} \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \langle v_x \rangle = \frac{e\tau}{m_e L} U$$

A8. En déduire que la conductivité du matériau conducteur s'écrit $\sigma = n \frac{e^2}{m_e} \tau$. On précisera l'unité classiquement utilisée pour cette grandeur.

$$\Rightarrow \vec{j} = -n e \langle \vec{v} \rangle = - \frac{n e^2 \tau}{m_e} \frac{U}{L} \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \underbrace{\frac{n e^2 \tau}{m_e}}_{\sigma} \vec{E} \quad (\text{loi d'Ohm local})$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{n e^2 \tau}{m_e}$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}$$

$$\Rightarrow [\sigma] = \left[\frac{1}{R} \right] \times \frac{1}{L}$$

σ s'exprime en $S \cdot m^{-1}$

A9. Calculer la durée moyenne entre deux collision τ_{Al} lorsque le conducteur est l'aluminium.

$$\tau_R = \frac{m_e}{e^2} \times \frac{\sigma_R}{n_R} \quad \text{AN} \quad \tau_R \approx 7,43 \cdot 10^{-15} s$$

Le libre parcours moyen est la distance moyenne parcourue par un électron entre deux chocs.

A10. Calculer un ordre de grandeur de $\langle v_x \rangle$ pour un fusible composé d'un fil d'aluminium. On choisira un ordre de grandeur usuel pour la valeur du champ électrique. Commenter en comparant à la vitesse d'agitation thermique.

$$\langle v_x \rangle = \frac{e\tau U}{m_e} = \frac{e\tau E}{m_e} = 1,3 \cdot 10^{-2} m/s$$

comparant à la vitesse d'agitation thermique.

$$\langle v_x \rangle = \frac{e\tau U}{m_e l} = \frac{e\tau}{m_e} E = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

ou $\frac{1}{2} m_e v^{*2} = \frac{3}{2} k_B T$ (gaz d'électrons à gaz parfait)
 ↑ vitesse d'agitation thermique

$$\Rightarrow v^* = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m_e}} = \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \cdot 10^{-13} \times 300}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 0,12 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \langle v_x \rangle \ll v^*$$

La vitesse associée à la conduction est $\ll$ à la vitesse d'agitation thermique des électrons. Toutefois $\langle \vec{v}^* \rangle = 0$ car direction aléatoire.
 $\Rightarrow$ c'est bien $\langle v_x \rangle$ qui est responsable du mouvement d'ensemble des électrons et donc du courant électrique.

A11. En déduire un ordre de grandeur du libre parcours moyen d'un électron dans le fil d'aluminium d'un fusible. Quelle critique peut-on faire au modèle de Drude ?

Entre deux chocs $\vec{v} = \underbrace{\vec{v}_0}_{\# v^*} - \underbrace{\frac{e\tau}{m_e} \vec{E}}_{\# \langle v_x \rangle}$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\| \simeq v^*$$

$$\Rightarrow l = \tau \times v^* = 7,43 \cdot 10^{-15} \text{ s} \times 0,12 \cdot 10^6 \text{ m/s} \simeq 1 \text{ nm}$$

$l \gg 1 \text{ \AA}$ $\Rightarrow l \gg$ distances interatomiques
 ↑ d'ordre 10 nm

↓
 limite du modèle de Drude
 ↓

besoin d'une description quantique de la conduction ou au contraire mieux modéliser le phénomène.

Toutefois, le modèle de Drude permet de démentir la loi d'Ohm locale et donne une bonne première approche à la conduction métallique.

On constate expérimentalement que la mobilité et donc le temps de relaxation τ dépendent de la température. Pour la suite, on négligera les variations de conductivité avec la température.

On considère le fil métallique comme une résistance électrique. Il est parcouru par un courant d'intensité I constante.

A12. Déterminer l'expression de la résistance électrique de ce dipôle R en fonction de σ , S et L .

$$U = E \times L$$

$$I = j \times S$$

$$\downarrow j = \sigma E$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{E L}{\sigma E S} = \frac{L}{\sigma S} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} = R$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{E L}{j S} = \frac{E L}{\sigma E S} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} = R$$

A13. Donner l'expression de la puissance électrique reçue par ce dipôle. Expliquer l'origine de cette puissance.

$$P = U \cdot I = \int E \cdot j S = \int E \cdot V = \iiint j \cdot \vec{E} \cdot d\vec{\tau} = P$$

$P = RI^2$

volume fusible

Cette puissance vient de la puissance de la force de Lorentz sur les porteurs de charge qui, en RP, se transforme en effet Joule par "frottements" de électrons avec le réseau cristallin

On considère que la température ne dépend que de la position et du temps $T = T(x, t)$.

B1. Rappeler la loi de Fourier. Préciser sa signification physique ainsi que celle de chacun de ses termes. Donner les unités de chaque terme.

$$\vec{j} = -\lambda \text{grad}(T)$$

vecteur densité de courant thermique en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

conductivité thermique du matériau en $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

température en Kelvin

Traduit le phénomène de transfert thermique spontané des zones de températures les plus élevées vers celles de températures les plus faibles au sein d'un matériau (diffusion thermique)

B2. Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température peut s'écrire sous la forme

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\sigma S^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Considérons une portion du fusible comprise entre x et $x+dx$



premier pp entre t et $t+dt$

$$dU = \delta Q + \delta W$$

isochore

$$\text{Donc } c \, dT = \delta Q(x) - \delta Q(x+dx) + \delta Q_{\text{joule}}$$

$$\mu S c \, \frac{dT}{dt} = [\phi(x) - \phi(x+dx)] dt + \frac{1}{\sigma} \frac{dx}{S} I^2 dt$$

$T(t+dt) - T(t)$

$$\mu S dx c \, \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt + \frac{I^2}{\sigma} \frac{dx}{S} dt$$

Résistance SR
située entre x et $x+dx$

$$\mu S \frac{\partial T}{\partial t} dx = - \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{I^2}{\sigma S} dx$$

Résistance SR
située entre x et $x+dx$

$$\phi = \int S = - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} S$$

$$\mu S c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{I^2}{\sigma S}$$

$$\Rightarrow \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\sigma S^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

B3. Établir le profil de température dans le fil métallique en régime stationnaire. Tracer l'allure de ce profil.

$$RP \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = - \frac{I^2}{\lambda \sigma S^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{I^2}{2 \lambda \sigma S^2} x + A$$

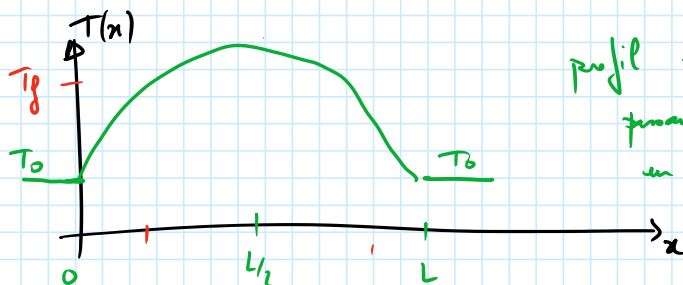
$$\Rightarrow T(x) = - \frac{I^2}{2 \lambda \sigma S^2} x^2 + A x + B$$

$$a \quad T(0) = T(L) = T_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = T_0 \\ - \frac{I^2}{2 \lambda \sigma S^2} L^2 + A L + B = T_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{I^2}{2 \lambda \sigma S^2} L$$

$$\Rightarrow T(x) = - \frac{I^2}{2 \lambda \sigma S^2} x^2 + \frac{I^2}{2 \lambda \sigma S^2} L x + T_0$$



profil parabolique
passant par un maximum
en $L/2$

La température de fusion du métal est notée T_f .

B4. Donner la position x_{fusion} du fil métallique où débute la fusion du métal lorsque le courant atteint l'intensité maximale I_{max} supportée par le fusible.

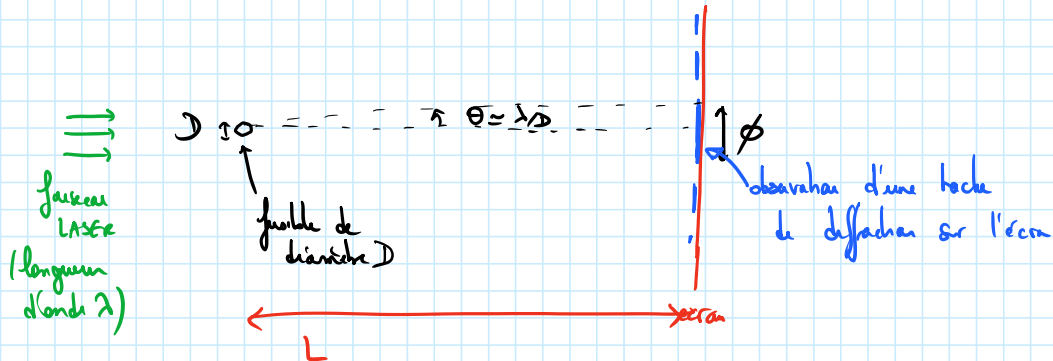
Le point qui chauffe le plus et qui risque d'atteindre
TP en premier est $x_{fusion} = L/2$

Pour différents instruments électriques (multimètres, GBF, ...) on dispose au laboratoire d'un ensemble de fusibles dont les valeurs d'intensité maximale supportée sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

Pour différents instruments électriques (multimètres, GBF, ...) on dispose au laboratoire d'un ensemble de fusibles dont les valeurs d'intensités maximales admissibles varient. On cherche à déterminer au laboratoire le diamètre D du fil métallique constituant chaque fusible, de l'ordre du micromètre. On mesure la longueur des fusibles : $L = 3,0$ cm.

B5. Proposer une méthode optique permettant de déterminer avec du matériel usuel de laboratoire le diamètre des fils métalliques des différents fusibles. Une description rigoureuse du principe de la méthode est attendue.

Par diffraction



$$\theta = \frac{\lambda}{D} = \frac{\phi}{2L}$$

$$\Rightarrow D = 2L \frac{\lambda}{\phi}$$

Les différents fusibles sont composés du même type de métal. Les mesures pour chacun de l'intensité maximale en fonction de leur diamètre sont effectuées pour $T_0 = 293$ K et résumées dans le tableau suivant :

I_{max} (A)	0,8	1,0	2,0	2,5	4,0	5,0	6,3
D (μm)	57	64	100	114	145	160	188

B6. En explicitant votre méthode, déterminer l'élément chimique le plus probable constituant le fil métallique du fusible. Cette question demande de l'autonomie et sera évaluée en conséquence.

Il y a rupture du fusible si

$$T(L/2) = T_f$$

$$\Rightarrow -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2} \frac{L^2}{4} + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2} L \cdot \frac{L}{2} + T_0 = T_f$$

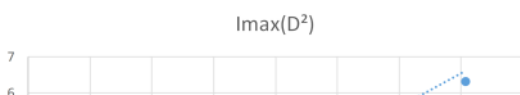
$$\Rightarrow \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2} \frac{L^2}{4} = T_f - T_0$$

$$\Rightarrow I^2 = \frac{8\lambda\sigma}{L^2} (T_f - T_0) \cdot S^2 \quad \text{avec } S = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{\frac{8\lambda\sigma}{L^2} (T_f - T_0)} S$$

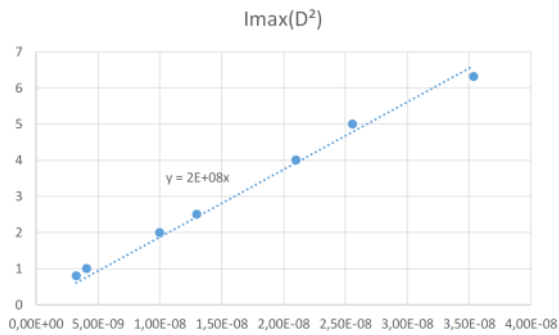
$$\Rightarrow I = \sqrt{\frac{8\lambda\sigma}{L^2} (T_f - T_0)} + \frac{\pi}{4} D^2$$

Tracer I en fonction de D^2



On obtient bien une droite

$$I = \sqrt{\frac{8\lambda\sigma}{L^2} (T_f - T_0)} + \frac{\pi}{4} D^2$$



On obtient bien une droite

$$\text{avec } \sqrt{\frac{8\lambda\sigma}{L^2} (T_f - T_0)} \frac{\pi}{4} = 2 \cdot 10^8 \text{ A/m}^2$$

$$\text{Calculer } \sqrt{\frac{8\lambda\sigma}{L^2} (T_f - T_0)} \frac{\pi}{4} \text{ par}$$

les bons métaux proposés dans les données.

On trouve : plomb : $1,7 \cdot 10^7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$
 argent : $3,7 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$
aluminium : $1,8 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$

On peut montrer que la température du fil métallique ne dépend que de la position x si Bi le nombre de Biot (sans dimension) est tel que

$$Bi = \frac{hD}{\lambda} \ll 1,$$

avec :

- D le diamètre du fil métallique ;
- h le coefficient de transfert convectif qui est de l'ordre de grandeur de 10 (unités S.I. « de base ») ;
- λ la conductivité thermique du fil métallique.

C1. Justifier que le nombre de Biot est sans dimension. Comme le nombre de Reynolds, ce nombre sans dimension permet de comparer deux grandeurs physiques, lesquelles ?

$$Bi = \frac{hD}{\lambda} \quad \text{or} \quad [\vec{q}] = [-\lambda \text{grad}(T)] = [\lambda] \frac{[T]}{L}$$

$$[\vec{j}] = [h(T - T_0)] = [h] [T]$$

$$\Rightarrow \frac{[\lambda]}{L} = [h]$$

$$\Rightarrow [\lambda] = [h] \cdot L = [hD]$$

$\Rightarrow Bi$ est sans dimension

En ordre de grandeur $\text{diffusion horizontale} = \|\lambda \text{grad}(T)\| \# \frac{\lambda(T - T_0)}{D}$

$\text{convection latérale} \# h(T - T_0)$

$$Bi = \frac{\text{flux latéral}}{\text{diff horizontale}}$$

compare le flux thermique au sein du matériau (horizontal par diffusion) avec celui latéral (conduction-convection) avec l'air

C2. Justifier que l'on se trouve ici dans le cas $Bi \ll 1$.

$$Bi = \frac{hD}{\lambda} \# \frac{10 \times 100 \cdot 10^{-6}}{100} \ll 1$$

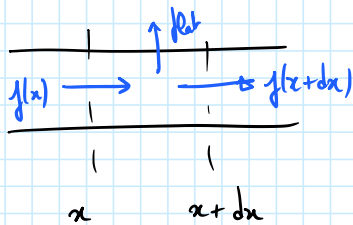
avec $D \neq \log m$
 $\lambda \neq 100 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$

On supposera cette condition vérifiée dans tout ce qui suit. La température ne dépend que de la position x et du temps $t : T(x, t)$. On se place en régime stationnaire.

On pose $k = \frac{4h}{\lambda D}$ et $T_1 = \frac{16I^2}{\sigma \lambda k^2 \pi^2 D^4}$.

C3. Montrer que la température vérifie l'équation

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - k^2(T - T_0 - T_1) = 0.$$



système $\int$ métal entre x et $x+dx$

1^{er} pp entre t et $t+dt$, en RP

RP $\downarrow$ $dU = \delta Q$
 $0 = \delta Q(x) - \delta Q(x+dx) - \delta Q_{\text{lat}} + \delta Q_{\text{pile}}$

$$0 = [f(x) - f(x+dx)]S - \pi D dx h(T - T_0) + \frac{dx}{\sigma S} I^2$$

$$\Rightarrow - \frac{\partial f}{\partial x} S dx - \pi D dx h(T - T_0) + \frac{dx}{\sigma S} I^2 = 0$$

$$\text{ou } f = - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \pi D h(T - T_0) + \frac{I^2}{\sigma S} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\pi D h}{\lambda S} (T - T_0) + \frac{I^2}{\sigma \pi D h S} = 0$$

$$\text{ou } S = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow * \frac{\pi D h}{\lambda S} = \frac{4h}{\lambda D} = k^2$$

$$* \frac{1}{\sigma \pi D h S} = \frac{1}{\sigma \pi \frac{D^3}{4} h} = \frac{16}{\sigma \lambda h \pi D^4} T_1 D^4$$

$$= \frac{16}{\sigma \lambda k^2 \pi D^4} = \frac{T_1}{I^2}$$

et $T = T(x)$ en RP

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} - k^2(T - T_0 - T_1) = 0}$$

C4. Résoudre l'équation différentielle en tenant compte des conditions aux limites.

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - k^2 T = -k^2(T_0 + T_1)$$

$\hookrightarrow T^{\text{part}} = T_0 + T_1$ solution particulière

$\hookrightarrow$ équation homogène associée $T^{\text{hom}} = A e^{kx} + B e^{-kx}$

$$\Rightarrow T = T_0 + T_1 + A e^{-kx} + B e^{kx}$$

$$\text{or } \begin{cases} T(0) = T_0 \\ T(L) = T_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_0 + T_1 + A + B = T_0 \\ T_0 + T_1 + Ae^{-kL} + Be^{kL} = T_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -T_1 \\ A(e^{-kL} - 1) + B(e^{kL} - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{e^{kL} - 1}{1 - e^{-kL}} + 1 \right) B = -T_1 \\ A = \frac{e^{kL} - 1}{1 - e^{-kL}} B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{-T_1 (1 - e^{-kL})}{e^{kL} - e^{-kL}} = \frac{-T_1}{2\sinh(kL)} (1 - e^{-kL}) \\ A = \frac{-T_1 (e^{kL} - 1)}{2\sinh(kL)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = T_0 + T_1 - \frac{T_1}{2\sinh(kL)} \left[(e^{kL} - 1)e^{-kx} + (1 - e^{-kL})e^{kx} \right]$$

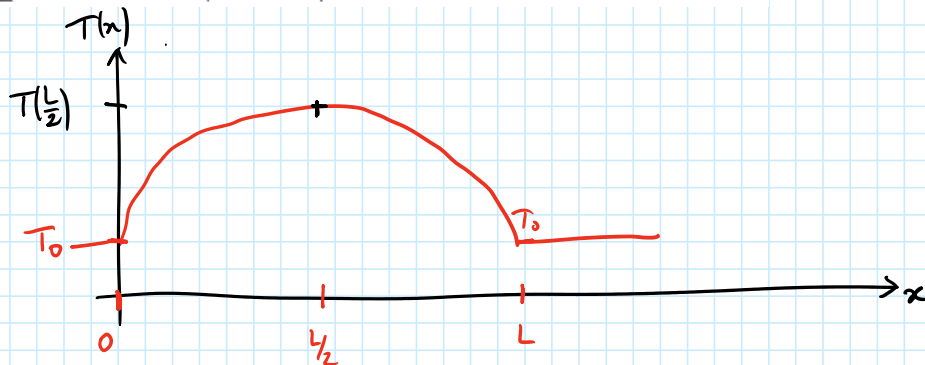
$$= T_0 + T_1 - \frac{T_1}{2\sinh(kL)} \left[\underbrace{e^{k(L-x)} - e^{-k(L-x)}}_{2\sinh(k(L-x))} + \underbrace{e^{kx} - e^{-kx}}_{2\sinh(kx)} \right]$$

$$T = T_0 + T_1 \left[1 - \frac{\sinh(k(L-x)) + \sinh(kx)}{\sinh(kL)} \right]$$

On montre que T peut s'écrire sous la forme : $T(x) = T_0 + T_1 \left(1 - \frac{\cosh\left(k\left(x - \frac{L}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\frac{kL}{2}\right)} \right)$.

$$T\left(\frac{L}{2}\right) = T_0 + T_1 \left(1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{kL}{2}\right)} \right)$$

C5. Tracer l'allure du profil de température.

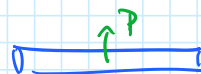


C6. Quel(s) mode(s) de transfert thermique manque(nt)-il(s) à cette étude ?

Les transferts thermiques par rayonnement ont été négligés.

D1. Déterminer l'expression de la puissance cédée par convection de la part du fil métallique à l'air extérieur.

$$P = h (T(t) - T_0) * \underbrace{\pi D L}_{\text{surface latérale}}$$



D2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la température est $\frac{dT}{dx} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_2}{\tau}$ où T_2 et τ sont des constantes dont on précisera l'expression.

système $\downarrow$ fil immergé à la température T_f
premier ppc entre t et $t+dt$

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$dU = \delta Q_{\text{Joule}} - P dt$$

$$mc dT = (RI^2 - P) dt$$

$$\text{avec } m = \mu \frac{\pi D^2}{4} L$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4L}{\sigma \pi D^2}$$

$$\Rightarrow \mu \frac{\pi D^2}{4} L c \frac{dT}{dt} + h(T-T_0) \pi D L = \frac{4L}{\sigma \pi D^2} I^2$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{4h}{\mu D c} (T-T_0) = \frac{16}{\sigma \pi D^4 c \mu} I^2$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{4h}{\mu D c} T = \frac{16}{\sigma \pi D^4 c \mu} I^2 + \frac{4h}{\mu D c} T_0$$

$$\tau = \frac{\mu D c}{4h}$$

$$T_2 = \frac{4I^2}{\sigma \pi D^3 h} + T_0$$

D3. Le fusible risque-t-il de fondre ? Montrer que l'on peut négliger les « pertes » par convection.
 On prendra $h = 10$ (unités S.I.) et $T_0 = 293$ K.

La température maximale atteinte est $T = T(\infty) = T_2$

$$\text{On trouve } T(\infty) = 4,1 \cdot 10^5 \text{ K}$$

$\Rightarrow$ Le fusible va fondre car $T(\infty) \gg T_f$

T_f étant $\ll T(\infty)$, le régime permanent sera loin d'être atteint
 $\hookrightarrow$ or le RP correspond au moment où les pertes par convection égalisent la puissance Joule

Avant le RP : $P_{\text{Joule}} \gg P_{\text{convection}}$

$\Rightarrow$ ici, on peut donc négliger les pertes par convection car le RP est loin d'être atteint.

Dans la suite, on négligera les transferts thermiques par convection.

D4. Évaluer la date t_1 de l'instant où débute la fusion.

le premier ppc s'écrit alors :

$$mc \frac{dT}{dt} = RI^2$$

$$\mu \pi D^2 c dT = \frac{16}{\sigma \pi D^3} I^2 dt$$

$$mc \frac{dT}{dt} = R I^2$$

$$\mu \frac{\pi D^2}{4} \rho \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\sigma} \frac{4}{\pi D^2} I^2$$

$$\Rightarrow \int_{T_0}^{T_F} dT = \frac{16}{\pi^2 D^4 \mu c \sigma} I^2 \int_0^{t_1} dt$$

$$t_1 = (T_F - T_0) * \frac{\pi^2 D^4 \mu c \sigma}{16 I^2} \quad \underline{AN} \quad \underline{t_1 = 6ms}$$

D5. Calculer l'expression du temps nécessaire à la fusion complète du fusible. Commenter cette valeur. De quel type (FF, F, T, TT) est le fusible ?

La durée Δt du changement d'état est telle que

$$R I^2 \Delta t = m * \Delta h_{\text{fusion}} \Delta L$$

$$\frac{4}{\sigma \pi D^2} I^2 \Delta t = \mu \frac{\pi D^2}{4} \Delta h_{\text{fusion}} \Delta L$$

$$\Delta t = \frac{\mu \sigma \pi^2 D^4}{16 I^2} \Delta h_{\text{fusion}} \quad \underline{AN} \quad \underline{\Delta t = 4ms}$$

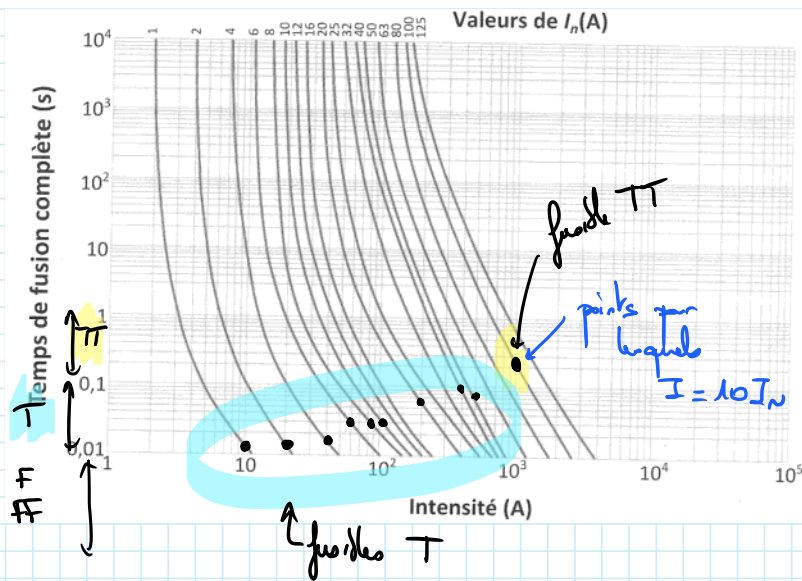
L'instant t_2 auquel le fusible sera entièrement fondu est

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 10ms$$

$\Rightarrow$ F ou T

↳ en réalité, on peut questionner la modélisation utilisée. La fusion de l'impédance du fusible n'est a priori pas nécessaire à la rupture du courant $\Rightarrow$ on a probablement surestimé le temps nécessaire à la rupture ici

D6. Commenter la figure 4 qui donne le temps de fusion complète de différents fusibles en fonction de l'intensité qui les parcourt. Discuter en particulier les formes asymptotiques des courbes, et les types (FF, F, T, TT) des fusibles.



• pour $I \rightarrow I_m$
 $\Rightarrow$ on voit que $T_f \rightarrow \infty$
 cohérent $\rightarrow$ le fusible ne doit pas fondre en fonctionnement normal

pour $I_n = 14$, on
 a ici $\Delta t \approx 0,01$ s
 $\Rightarrow$ cohérent avec le calcul précédent

E1. Comment en python affecte-t-on les valeurs de S_0 , u , e et L de l'énoncé aux variables $s0$, u , e et L les représentant ? On affectera leurs valeurs en unités S.I. « de base ».

$$S_0 = 0.105 \text{ e-6}$$

$$u = 0.9$$

$$e = 0.105 \text{ e-3}$$

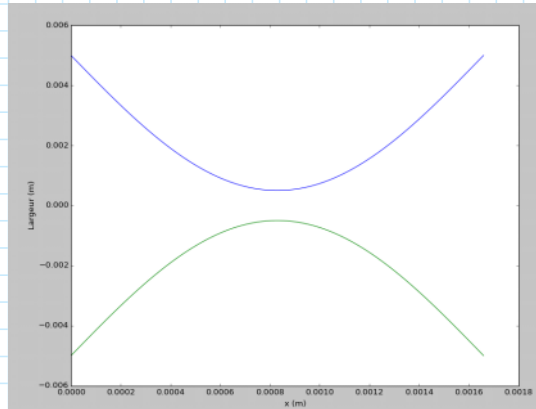
$$L = 1.66 \text{ e-3}$$

E2. Écrire une fonction `section`, ayant pour paramètre x la position sur le fusible, utilisant les variables déjà enregistrées (globales) S_0 , u et L , et qui renvoie la valeur de la section à la position x .

```
def section(x):
    return S0 * (1 - u * np.sin(np.pi * x / L))
```

E3. En vous aidant de l'annexe 3, proposer un script Python permettant de représenter graphiquement les variations de la largeur de l'élément fusible en fonction de la position x . On prendra soin de légender les axes.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 S0=0.105e-5
5 u=0.9
6 e=0.105e-3
7 L=1.66e-3
8
9 def section(x):
10     return S0*(1-u*np.sin(np.pi*x/L))
11
12 x=np.linspace(0,L,100)
13 largeur_haut=section(x)/(2*e)
14 largeur_bas=-largeur_haut
15
16 plt.plot(x,largeur_haut, x,largeur_bas)
17 plt.xlabel("x (m)")
18 plt.ylabel("Largeur (m)")
19 plt.show()
20
```



NB: il semble qu'il y ait une erreur dans la figure 7, où la largeur du fusible semble deux fois trop grande.

E4. Donner l'expression de la position x_i en fonction de i , n et L .

largeur du fossé semble deux fois trop grande.

E4. Donner l'expression de la position x_i en fonction de i , n et L .

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_{n-1} &= L \end{aligned} \Rightarrow x_i = i \times \frac{L}{n-1}$$

E5. Écrire une fonction `primesurs`, ayant pour paramètre la position x et qui renvoie la valeur de $\frac{S'(x)}{S(x)}$.

$$\begin{aligned} S(x) &= S_0 \left(1 - u \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) \\ \Rightarrow S'(x) &= S_0 \left(-u \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) \end{aligned}$$

```
def primesurs(x):
    return -(S0*u*np.pi/L*np.cos(np.pi/L*x))/section(x)
```

E6. Expliquer le principe de la méthode d'Euler pour l'intégration numérique d'une équation différentielle non linéaire du type $\frac{dy}{dx} = f(y(x), x)$ avec comme condition initiale $y(x_0) = y_0$.

On représente la fonction y par une suite (y_i) telle que

$$y_i = y(x_i).$$

En effectuant un Δx à l'ordre 1, on peut approximer

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \quad \text{où} \quad \Delta x = x_{i+1} - x_i$$

$$\Rightarrow \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = f(y_i, x_i)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta x * f(y_i, x_i) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \Rightarrow \text{le calcul des valeurs de } y_i \text{ revient donc au calcul des termes d'une suite, définie par une relation de récurrence}$$

E7. En se référant à l'annexe pour la résolution numérique d'une équation du type $\frac{d\vec{u}}{dx} = \vec{f}(\vec{u}(x), x)$, préciser l'expression du vecteur $\vec{u}$ pour le problème étudié ici.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{S'(x)}{S(x)} \frac{dT}{dx} &= -\frac{\alpha}{[S(x)]^2} \\ \text{Posons } \vec{u} &= \begin{bmatrix} T(x) \\ \frac{dT}{dx}(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dT}{dx} \\ \frac{d^2 T}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dT}{dx} \\ -\frac{\alpha}{[S(x)]^2} - \frac{S'(x)}{S(x)} \frac{dT}{dx} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dx} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ -\frac{\alpha}{[S(x)]^2} - \frac{S'(x)}{S(x)} u_1 \end{bmatrix} = \vec{f}(\vec{u}(x), x) \end{aligned}$$

E8. En utilisant les notations de l'annexe réécrire dans le cadre du problème la fonction F qui renvoie la dérivée seconde de la température pour la position x . On fera attention aux

- E8.** En utilisant les notations de l'annexe réécrire dans le cadre du problème la fonction F qui renvoie la dérivée seconde de la température pour la position x . On fera attention aux arguments attendus. La grandeur α est supposée déjà enregistrée dans une variable `alpha` et accessible aux différentes fonctions en tant que variable globale.

$$F(u_0, u_1, x) = -\frac{\alpha}{[S(x)]^2} - \frac{S'(x)}{S(x)} u_1$$

⇒

```
def F(u0,u1,x):
    return -alpha/(section(x))**2-sprimesurs(x)*u1
```

- E9.** En se référant au programme utilisé en annexe, créer la liste L_T attendue par le problème en l'enregistrant dans une variable `listeT`. On calculera $n = 1000$ valeurs de la température entre 0 et $L = 1,66$ mm et on prendra comme conditions aux limites $T(0) = T_0 = 293$ K et $\frac{dT}{dx}(x=0) = 0$.

```
x=np.linspace(0,L,1000)
def fonction_f_vecteur(u,x):
    return [u[1],F(u[1],u[0],x)]
solution=odeint(fonction_f_vecteur,[293,0],x)
listeT=list(solution[:,0])
```

- E10.** Pourquoi cette courbe ne répond pas à notre problème ?

On n'a pas $T(0) = T(L) (= T_0)$

⇒ La condition aux limites en $x=L$ n'est pas vérifiée.

- E11.** Écrire une fonction `Tf(T0,d)` qui prend comme arguments les deux conditions aux limites de la valeur T_0 de la température et de sa dérivée d en $x=0$, et qui renvoie la valeur de la température en $x=L$. Le tableau des valeurs des positions x_i enregistré dans la variable nommée `x` est supposé accessible en tant que variable globale. Cette fonction pourra être utilisée dans la suite du problème.

```
def Tf(T0,d):
    solution=odeint(fonction_f_vecteur,[T0,d],x)
    listeT=list(solution[:,0])
    return listeT[-1]
```

- E12.** Écrire une fonction python `Trouve_derivee(T0, Terr, dmin, dmax)` utilisant la méthode de la dichotomie renvoyant l'estimation de la dérivée de la température en $x=0$ permettant d'avoir une température de T_0 en $x=L$. Cette fonction prend comme paramètre :
- la température T_0 en $x=0$;
 - l'erreur admise $Terr$ sur l'évaluation de l'égalité entre la température en $x=0$ et $x=L$;
 - les variables numériques $dmin$ et $dmax$ entre lesquelles la valeur de la dérivée sera trouvée par dichotomie. On suppose que la valeur de $\frac{dT}{dx}$ recherchée est dans l'intervalle $[dmin ; dmax]$.

Il est à noter que lorsque la dérivée initiale $\frac{dT}{dx}(x=0)$ augmente, la valeur de la température finale $T(x=L)$ aussi.

```
def Trouve_derivee(T0,Terr,dmin,dmax):
    a=dmin
    b=dmax
    d=(a+b)/2
    Tlim=Tf(T0,d)
    while abs(Tlim-T0)>Terr:
        if Tlim>T0:
            b=d
        else : a=d
        d=(a+b)/2
        Tlim=Tf(T0,d)
    return d
```

- E13.** Commenter la courbe obtenue.

- conditions aux limites vérifiées ($T(0) = T(L) = T_0$)
 - $T(x)$ est symétrique par rapport à $L/2$ au max en $x=L/2$
 ⇒ allure rassurante en laquelle on peut avoir confiance

On cherche la valeur de la température maximale observée sur le fusible.

E14. Écrire une fonction `Trouve_max(L)` qui renvoie la valeur maximale atteinte sur le fusible. On n'utilisera pas la fonction `max` de python.

```
def Trouve_max(L):
    maxim=L[0]
    for elt in L:
        if elt>maxim:
            maxim=elt
    return maxim
```

On trace alors la température maximale atteinte par le conducteur en fonction du courant qui le traverse, sans prendre en compte la fusion. Cette température est tracée sur la figure 10.

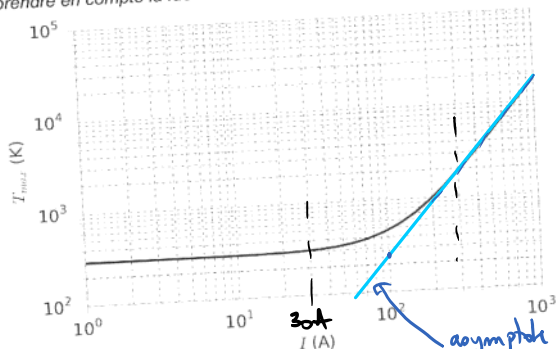


Figure 10 : Température maximale atteinte en fonction du courant

E15. Commenter la courbe obtenue. Préciser la nature des asymptotes à faible et forte intensités. Estimer le courant nominal d'un tel fusible.

si $I < 30A$

$$* T_{max} = cste = 293K$$

$\Rightarrow$ Asymptote horizontale

l'effet Joule dans le fusible est négligeable
 $\Rightarrow$ pas d'échauffement.

si $I > 30A$

* $\log T_{max}$ évolue de manière affine par rapport à $\log I$
pente ≈ 2

cohérent que $T_{max} \propto I^2$ car proportionnel à la puissance dissipée par effet Joule
(cf expression de T_1 dans question C3, proportionnelle à I^2)

choix du courant nominal

La à ce courant, il faut limiter P_{Joule} ($T_{max} \approx 293K$)

↳ mais si on $\uparrow I$ ($\times 10$ par exemple) T_{max} doit augmenter

afin de permettre au fusible de fondre

$\Rightarrow$ $I_n \approx 30A$ semble un bon compromis