

Deux problèmes indépendants

Problème n° 1 – Modélisation et applications d'un transducteur électroacoustique - Physique

I Étude du transducteur électroacoustique

1. L'énergie électromécanique du système S est donnée par $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{Q^2}{2C(x)}$. Par définition de la capacité d'un condensateur, on a $Q = C(x)\psi$. L'intensité du courant est reliée à la charge par la relation $i = \frac{dQ}{dt}$. Quand à la capacité d'un condensateur plan, elle est rappelée par l'énoncé : $C(x) = \frac{\epsilon_0 S}{a+x(t)}$. On peut noter que l'énergie stockée dans le condensateur peut encore s'exprimer en fonction de la tension par $\frac{1}{2}C(x)\psi^2$. On effectuera le choix de la variable en fonction des conditions d'utilisation du condensateur. Pour la question suivante, il est d'ailleurs plus intéressant de travailler avec la tension ψ car l'énoncé privilégie cette variable.

2. La dérivée de l'énergie du système par rapport au temps représente le transfert de puissance entre le système et l'extérieur car il n'y a pas de termes de création à l'intérieur du système. Les puissances en jeu sont d'une part mécanique pour la force F à savoir $F\dot{x}$ et d'autre part électrique ψi fournie par le générateur. On a donc $\frac{dE}{dt} = F\dot{x} + \psi i$.

3. On a $\frac{dE}{dt} = m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} + \frac{1}{2}\frac{dC}{dt}\psi^2 + C\psi\frac{d\psi}{dt} = F\dot{x} + \psi\frac{d(C\psi)}{dt} = F\dot{x} + \frac{dC}{dt}\psi^2 + C\psi\frac{d\psi}{dt}$. On peut simplifier cette équation et faire apparaître $\dot{x}$ en facteur en écrivant $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx}\dot{x}$. On obtient alors facilement l'équation demandée par l'énoncé : $m\ddot{x} + kx - \frac{1}{2}\psi^2\frac{dC}{dx} = F$. Dans l'équation précédente, on a la force $-kx$ qui apparaît et exprime l'élasticité du système, le troisième terme représente la force électrostatique attractive $\frac{1}{2}\psi^2\frac{dC}{dx}$ qui s'exerce entre l'armature de charge $+Q$ et celle de charge $-Q$. Cette force est bien dirigée dans sens contraire de l'axe Ox car $\frac{dC}{dx} < 0$.

Étude statique

4. Le rapport A_0 compare en quelque sorte la force attractive entre les deux armatures du condensateur à la distance a sous la tension ψ_0 et la force que le ressort exercerait si son élongation était a , c'est-à-dire la force maximale possible du ressort puisque cela voudrait dire que les deux armatures sont en contact. La force du ressort est $F_r = ka$. La force électrostatique est $\frac{1}{2}\psi_0^2\frac{dC}{dx}\Big|_{x=0}$. Or, $C(x) = \frac{\epsilon_0 S}{a+x}$, donc $\frac{dC}{dx} = -\frac{\epsilon_0 S}{(a+x)^2}$. L'intensité de la force électrostatique est, pour $x = 0$, $F_{elec} = \frac{1}{2}\psi_0^2\frac{\epsilon_0 S}{a^2}$. On a donc $\frac{F_{elec}}{F_r} = A_0$.

5. À l'équilibre, la force exercée par le ressort est $-kx = -kaX$. La force électrostatique est $-\frac{1}{2}\psi_0^2\frac{\epsilon_0 S}{(a+x)^2} = -\frac{1}{2}\psi_0^2\frac{\epsilon_0 S}{a^2(1+X)^2}$. La condition d'équilibre est $kaX + \frac{1}{2}\psi_0^2\frac{\epsilon_0 S}{a^2(1+X)^2} = 0$. On a donc bien une relation du type $X = A_0 G(X)$ avec $G(X) = -\frac{1}{(1+X)^2}$.

6. Sur le graphique proposé, on peut voir la droite d'équation $y_1 = X$ et aussi l'hyperbole $y_2 = -\frac{A_0}{(1+X)^2}$. Si l'on se place en $X = 0$, on peut lire l'ordonnée $y_2 \simeq -0,1$. Cela permet de déterminer $A_0 = 0,1$. Pour qu'il y ait une solution et donc une position d'équilibre, il faut qu'il y ait une intersection entre y_1 et y_2 .

Cela signifie que si l'hyperbole est trop basse, il n'y aura plus d'intersection. Sur le graphique proposé, on peut voir un fuseau d'épaisseur environ 0,1. Par conséquent, avec $A_0 = 0,2$, on peut être certain que l'hyperbole se trouvera en-dessous de la droite. La réponse se situe donc entre les deux. Si on effectue une recherche avec un outil de calcul, on se rapprochera plutôt de 0,15. La calculatrice étant interdite, on se contentera de la réponse $A_0^* = 0,2$. Nous allons étudier la question de la stabilité en considérant l'équilibre $X_{eq} = -0,6$. Si on se déplace un peu de cet équilibre avec $X < -0,6$, on constate que l'intensité de la force électrostatique devient plus grande que l'intensité de la force exercée par le ressort. Comme cette force est attractive, X va encore diminuer. La position d'équilibre $X_{eq} = -0,6$ est donc instable. Au contraire, la position d'équilibre $X_{eq} = -0,15$ est stable.

Étude dynamique

7. L'équation différentielle de départ est $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{m} \frac{\psi^2}{(a+x)^2} = \frac{F}{m}$. On pose $X = \frac{x}{a}$ et $X = X_0 + U$ avec $U = \frac{u}{a}$. L'équation différentielle devient alors $\ddot{X} + \omega_0^2 X + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{ma^3} \frac{\psi^2}{(1+X)^2} = \frac{F}{ma}$. Il faut faire évoluer le terme $\frac{\psi^2}{(1+X)^2}$ en ne gardant que l'ordre le plus bas. Par exemple, on écrira que $\psi^2 = \psi_0^2 + 2\psi_0\varphi$ en oubliant le terme φ^2 . De la même façon, $\frac{1}{(1+X)^2} = \frac{1}{(1+X_0+U)^2}$. Nous devons donc gérer le terme $\frac{\psi^2}{(1+X_0+U)^2} = \frac{\psi_0^2 + 2\psi_0\varphi}{(1+X_0+U)^2}$. φ étant déjà du premier ordre, on écrira que $\frac{2\psi_0\varphi}{(1+X_0+U)^2} \simeq \frac{2\psi_0\varphi}{(1+X_0)^2}$. Pour l'autre terme, il faut garder l'influence de U à l'ordre le plus bas. On a $\frac{\psi_0^2}{(1+X_0+U)^2} = \frac{\psi_0^2}{(1+X_0)^2} \frac{1}{(1+\frac{U}{1+X_0})^2}$. Or, un développement limité de la fraction suivante permet d'écrire $\frac{1}{(1+\frac{U}{1+X_0})^2} = 1 - 2\frac{U}{1+X_0}$. À partir des deux calculs approchés que nous venons d'effectuer, on trouve bien l'équation différentielle $\ddot{U} + \omega_0^2(1 - \alpha)U = \frac{F}{ma} - B\varphi$ avec les expressions des coefficients α et B prévus par l'énoncé.

8. Si on veut pouvoir linéariser, il faut la condition $|U(t)| \ll X_0$, il faut donc une polarisation grâce à ψ_0 afin que la position d'équilibre ne soit pas nulle, c'est-à-dire que $X_0 \neq 0$, et permette de vérifier la relation d'ordre forte précédente.

Étude du fonctionnement en émetteur

9. La force de frottement fluide s'écrit $F(t) = -\rho_a c S \dot{x}$, le terme dans l'équation différentielle est donc $\frac{F}{ma} = -\frac{\rho_a c S \dot{x}}{ma} = -\frac{\rho_a c S}{m} \dot{U}$. L'équation différentielle devient donc : $\ddot{U} + \frac{\rho_a c S}{m} \dot{U} + \omega_0^2(1 - \alpha)U = -B\varphi_0 \cos \omega t$. C'est le terme en $\dot{U}$ qui fait perdre de l'énergie à l'oscillateur, c'est justement cette énergie qui est transmise à l'onde ultrasonore.

10. Cette impédance diverge en $\Omega = 1$, cela ne peut pas convenir, cela signifie que l'on a négligé le terme d'amortissement. Cela n'est pas raisonnable au moins autour de la pulsation propre de l'oscillateur. L'approximation n'est pas légitime pour $\Omega \simeq 1$.

11. On a $\Im(Z_e) = -\frac{1}{C(x_0)\omega_0} \frac{\Omega^2 - (1-\alpha)}{\Omega(\Omega^2 - 1)}$. Le graphique est fourni à la figure 1. On peut distinguer 3 domaines qui permettent de décrypter le comportement de l'émetteur. Pour $\Omega \in [0; \sqrt{1-\alpha}]$, on a un comportement de type condensateur puisque $Z = \frac{1}{jC\omega} = -j\frac{1}{C\omega}$. Il en est de même pour $\Omega > 1$. Entre les deux, on pourrait plutôt penser à un comportement de type bobine puisque la partie imaginaire est positive et croissante avec ω . Il n'est pas possible d'affirmer que les modèles sont exacts car il n'y a pas de linéarité en ω pour le comportement de type bobine.

12. Il faut voir que pour $\Omega \rightarrow \infty$, on a un système équivalent à un condensateur. Il faut nécessairement que l'un des deux condensateurs proposés soit en série avec le reste du montage équivalent. Si on met la bobine en série avec ce condensateur, on ne pourra plus avoir d'impédance qui s'annule en haute fréquence. La solution est donc de mettre la bobine en parallèle d'un condensateur, le tout en série avec le second condensateur. L'impédance équivalente est donc $Z = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{jL\omega}{1-LC_2\omega^2}$. Cette expression est adaptée puisque si l'on réduit au même dénominateur, on obtient : $Z = \frac{1-L(C_1+C_2)\omega^2}{jC_1\omega(1-LC_2\omega^2)}$.

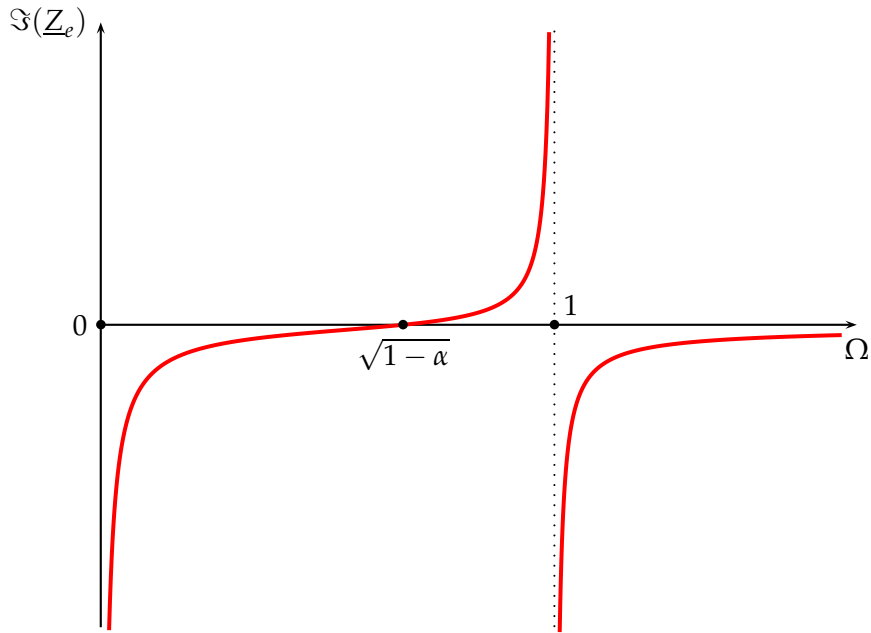


FIGURE 1 – Impédance du transducteur en émetteur

Étude du fonctionnement en récepteur

13. Le plus simple est de reprendre le bilan de puissance sachant que $i = 0$ et que, par conséquent, la charge est constante, charge que nous noterons Q_0 . on a tout d'abord $Q_0 = C\psi = \frac{\varepsilon_0 S}{a+x_0+u(t)}(\psi_0 + \varphi(t))$. On en déduit que $(a + x_0 + u(t))Q_0 = \varepsilon_0 S\psi_0 + \varepsilon_0 S\varphi(t)$. Cela permet d'écrire que $U(t)Q_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{a}\varphi(t)$. Le bilan en puissance donne $m\ddot{x} + kx\dot{x} + \dot{x}\frac{d}{du}(\frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 S}(a + x_0 + u)) = F\dot{x}$ car $i = 0$. On est passé dans l'équation précédente de $\frac{d}{dx}$ à $\frac{d}{du}$ car ces deux dérivées sont égales. L'équation différentielle du mouvement est donc $m\ddot{x} + kx + \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 S} = F$. Avec $x = x_0 + aU$ et $\ddot{x} = a\ddot{U}$, on obtient une forme différente de l'équation précédente : $ma\ddot{U} + kx_0 + kauU + \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 S} = F$. À l'équilibre, on a $kx_0 + \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 S} = 0$. L'équation différentielle du mouvement du transducteur en récepteur est donc : $\ddot{U} + \omega_0^2 U = \frac{F_0}{ma} \cos \omega t$. Cela nous permet de remonter à l'équation différentielle pour les variations de tension car $U(t) = \frac{\varepsilon_0 S}{aQ_0}\varphi(t)$ et $\ddot{U}(t) = \frac{\varepsilon_0 S}{aQ_0}\ddot{\varphi}(t)$. Avec $\frac{Q_0}{\varepsilon_0 S} = \frac{\psi_0}{a+x_0}$, on peut aboutir à l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(t)$: $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{F_0 \psi_0}{m(a+x_0)} \cos \omega t$.

14. ψ_0 sert à fixer la position d'équilibre mais aussi la valeur de l'amplitude des variations de la tension.

Épilogue

15. Dans le cas du récepteur, on a une force de type ressort à laquelle se superpose une force électrostatique constante de la forme $\frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 S}$. Elle n'a pas d'influence au contraire de la première partie où elle intervenait dans l'équation du mouvement de façon complexe (et que l'on a linéarisé).

16. Pour laisser passer $\varphi(t)$ par rapport à ψ_0 , il faut un filtre passe-haut. On le constitue avec un montage RC comme celui indiqué à la figure 2. Par un simple diviseur de tension, on obtient la fonction de transfert $H = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$.

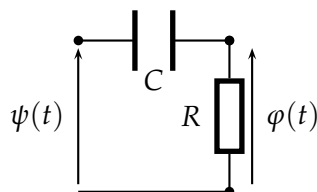


FIGURE 2 – Filtre passe-haut

17. Avec les expressions fournies par l'énoncé, on trouve $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{6\sigma_0}{\rho}}$. Pour travailler en haute fréquence, il faut R petit, de même pour ρ et σ_0 grand.

18. On a $f_0 = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{6\sigma_0}{\rho}}$. On trouve : $f_0 = 6,6 \text{ kHz}$. Cette valeur ne correspond pas à de très hautes fréquences, on reste dans le domaine audible. Souvent les transducteurs utilisés en TP ont une fréquence optimale vers 40 kHz. On est alors clairement dans les ultrasons.

II Quelques applications du transducteur

II.A Caractérisation de l'émission/réception acoustique

19. La divergence angulaire liée à la diffraction est telle que $2\theta_d \simeq \frac{2\lambda}{d}$. Avec l'expression de la longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{f}$, on obtient $2\theta_d = \frac{c}{fR}$. Ici, compte tenu du fait que $R = 5 \text{ mm}$ et $\lambda = 6,8 \text{ mm}$, il n'est pas possible de raisonner avec l'expression approchée précédente. Il faut en revenir à $\sin \theta_d = \frac{\lambda}{2R} = 0,68$. Cela permet de trouver que $\theta_d \simeq 43^\circ$ et par conséquent, on obtient : $2\theta_d \simeq 86^\circ$. Ce résultat vaut aussi pour la réception car il ne faut pas que les ondes reçues soient trop déphasées entre elles sous peine de ne pas obtenir de signal significatif par interférences destructives.

20. On effectue des interférences entre N ondes régulièrement déphasées. L'amplitude totale obtenue est $a_{tot} = a_0(1 + \exp j\varphi + \exp j2\varphi + \dots + \exp j(N-1)\varphi) = a_0 \frac{1 - \exp jN\varphi}{1 - \exp j\varphi}$. En factorisant par l'argument moitié, on obtient la fonction de réseau $a_{tot} = a_0 \frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2}$. Si on s'intéresse à des ondes émises dans la direction d'angle θ par rapport à la normale aux transducteurs, on a une phase $\varphi = \frac{2\pi 2R \sin \theta}{\lambda}$. Un maximum d'émission est obtenu dans les ordres entiers à savoir les entiers tels que $2R \sin \theta = p\lambda$. On peut se placer en $p = 0$ et rechercher la première annulation de la fonction de réseau qui suit l'ordre $p = 0$. En fait, on obtient cette première annulation lorsque $2R \sin \theta = \frac{1}{N}\lambda$. Puisque l'on recherche un angle θ faible, on peut faire l'approximation $2R\theta \simeq \frac{\lambda}{N}$. Cela permet d'obtenir $N = \frac{\lambda}{2R\theta}$. L'application numérique conduit à $N = 40$.

21. On superpose un second déphasage à celui lié à l'orientation des ondes émises. On a maintenant $\varphi = 2\pi g - \frac{2\pi 2R \sin \theta}{\lambda}$. Comme dans la question précédente, on obtient des ondes en interférences constructives lorsque $\varphi = 2\pi p$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Comme on veut un glissement minimal, on choisit $p = 0$. Le maximum s'obtient alors dans la direction $\theta = \beta$. On a donc : $g = \frac{2R \sin \beta}{\lambda}$. L'application numérique conduit à la valeur $g = 0,25$.

II.B Vélométrie ultrasonore

22. La différence de phase entre les deux ondes parvenant en un point M du champ d'interférences est donnée par $\varphi_{12} = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{OM}$. On trouve $\varphi_{12} = \frac{2\pi 2y \sin \beta}{\lambda}$. La différence de marche est donc : $\delta = \frac{2y \sin \beta}{\lambda}$. L'interfrange correspond à $y_{p+1} - y_p = i$ où p et $p+1$ sont des ordres d'interférences successifs. On trouve facilement que $i = \frac{\lambda}{2 \sin \beta}$. On trouve numériquement $i \simeq 2 \text{ cm}$.

23. Nous sommes dans une situation d'interférences de deux ondes cohérentes. L'intensité (au sens du son) résultante est donnée par la formule de FRESNEL : $\mathcal{I} = 2\mathcal{I}_0(1 + \cos \frac{2\pi y}{i})$. Si la particule se déplace à vitesse constante, on a $y = Vt + y_0$. On obtient donc une intensité réfléchie de la forme $\mathcal{I}_{ref} = \kappa 2\mathcal{I}_0(1 + \cos[\frac{2\pi Vt}{i} + \frac{2\pi y_0}{i}])$. La période de modulation du signal réfléchi est donc $T_{mod} = \frac{i}{V} = \frac{c}{2Vf \sin \beta}$.

24. Pour détecter correctement la pulsation $\varepsilon\omega$, il faut soit utiliser un détecteur de crête, montage constitué d'une diode qui récupère la partie positive du signal puis d'un filtre passe-bas RC qui permet de récupérer l'évolution lente de l'amplitude. Pour cela, il faut que le temps caractéristique $\tau = RC$ du circuit soit grand devant la période associée à ω et petit devant celle de $\varepsilon\omega$. On peut aussi penser à multiplier le signal par le signal rapide en $\cos \omega t$. On obtient alors un signal en $\cos^2 \omega t \cos \varepsilon\omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \cos \varepsilon\omega t$. Ce signal va comporter 3 pulsations $\omega(2 \pm \varepsilon)$ qui sont des pulsations élevées par rapport à la pulsation $\varepsilon\omega$ qui est nettement plus faible. En utilisant un filtre passe-bas, on ne récupère que le signal intéressant permettant d'accéder à V . Cette seconde méthode est qualifiée de **détection synchrone**.

25. Il faut plutôt placer les détecteur des ondes réfléchies en face du centre du losange car les deux faisceaux sont enveloppés par une fonction de diffraction qui fait que l'intensité n'est pas réellement donnée par la formule de FRESNEL. Cette fonction de l'intensité est enveloppée par une fonction de diffraction à l'évolution plus lente.

II.C Localisation acoustique d'une cible

Situation angulaire

26. Le maximum est obtenu lorsque tous les signaux sont en phase. Par conséquent, toutes les amplitudes s'additionnent. On a donc $Na_e = 40$ avec $N = 40$, cela signifie que l'amplitude arbitraire des ondes est $a_e = 1$.

27. Le temps de retard entre deux ondes consécutives est donc $\tau_{tot} = \frac{d'}{c}g_i - \tau''$ avec τ'' le temps de décalage lié au fait que les rayons associés aux ondes sont orientés sous l'angle β par rapport à la normale au transducteur. Cette orientation est responsable d'une différence de marche $d' \sin \beta$ et donc d'un temps de décalage $\tau'' = \frac{d' \sin \beta}{c}$. On a donc $\tau_{tot} = \frac{d'}{c}(g_i - \sin \beta)$. La plus petite valeur qui assure des interférences constructives est obtenue pour $\tau_{tot} = 0$. On a donc : $g_i = \sin \beta$.

28. Sur le graphique proposé, on voit que $g_i = 0,7$. On a donc $\sin \beta = 0,7$, ce qui correspond à $\beta = 45^\circ$.

29. On ne change pas la position du maximum mais il est moins localisé. Le pic principal possède une plus grande largeur. Nous avons vu précédemment que la largeur évoluait en $\frac{1}{N}$, si l'on divise par 2 le nombre N de transducteurs, on va donc doubler la largeur du pic. c'est bien ce que l'on constate puisque $\Delta g \simeq 0,2$ alors qu'avant on avait $\Delta g \simeq 0,1$.

30. On observe un second pic, il s'agit de l'ordre -1 . En effet, jusqu'à présent, on travaillait avec l'ordre 0 pour lequel $\tau'' = 0$.

31. Nous avons montré que $g_i = \sin \beta_c$. En différentiant cette relation, on obtient $dg_i = \cos \beta_c d\beta_c$. Si l'on passe aux incertitudes, on aura $\Delta \beta_c = \frac{\Delta g}{\cos \beta_c}$. L'incertitude $\Delta \beta_c$ sera d'autant plus petite que $\cos \beta_c$ sera grand et donc la valeur optimale correspond à $\beta_c = 0$.

Éloignement

32. Les graphiques de $e_1(t)$, $e_1(t - \tau)$ et de $r_1(t)$ sont représentés à la figure 3. Le signal $e_1(t - \tau)$ correspond à une translation du signal $e_1(t)$ d'une durée τ . On constate qu'il y a alors un chevauchement plus ou moins important des deux signaux que l'on va intégrer ensuite.

33. On peut voir que le produit de $e_1(t - \tau) \times r_1(t)$ sera nul lorsqu'il n'y aura pas chevauchement des deux signaux. L'intégrale va avoir des valeurs non nulles à partir du moment où il y a du chevauchement. Il faut aussi penser que le décalage est tel que les signaux sont en phase, l'intégrale ne portera que sur un signal produit toujours positif alors que si les signaux sont en opposition de phase, on intègre un signal toujours négatif. L'intégrale sera de valeur algébrique minimale pour l'opposition de phase et maximale pour une situation où les deux signaux sont en phase. On recherche la situation de la plus grande valeur de l'intégrale car à ce moment τ récupère le décalage temporel lié à la propagation aller et retour. On peut donc déterminer la distance D_c puisque l'on a $\tau = \frac{2D_c}{c}$.

34. Lorsque l'onde ultrasonore se propage, elle correspond à des variations de pression et des petits déplacements des couches d'air. La cible est immobile. Lorsque l'onde arrive sur la cible, le déplacement de la couche d'air au contact de la cible n'est pas possible, on a un nœud de déplacement. Cela n'est possible que si l'amplitude du déplacement associé à l'onde réfléchie est opposée de celle associée à l'onde incidente. On a donc un changement de signe qui peut être perçu par un détecteur sensible au déplacement.

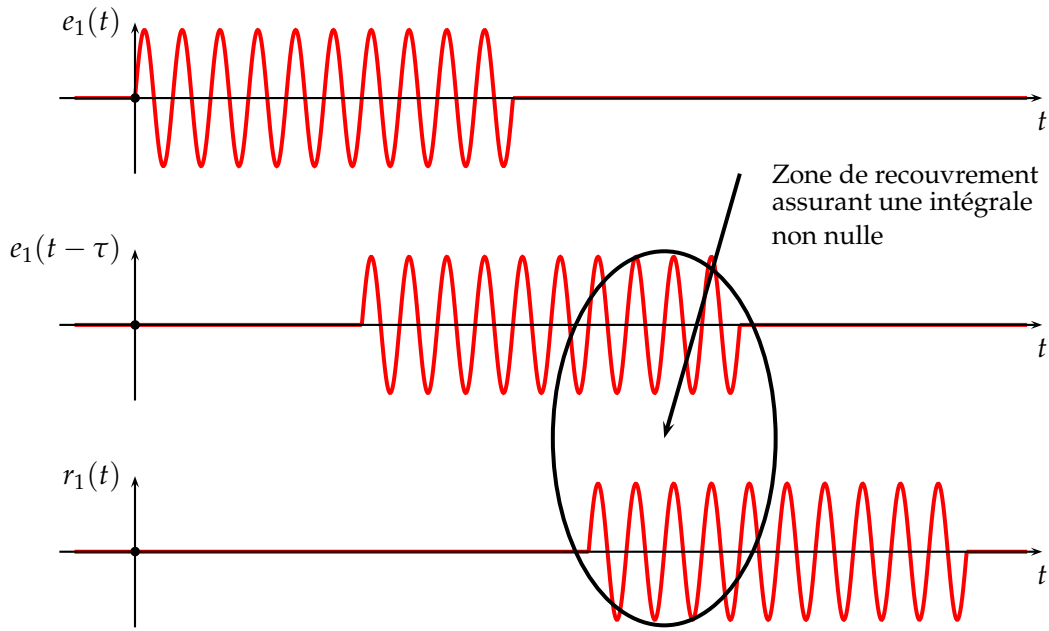


FIGURE 3 – Signal émis et signal réfléchi

Problème n° 2 – Étude d’une tour de très grande hauteur - SI

I Étude des déplacements de la tour sous chargements extérieurs

I.A Première approche de dimensionnement : calcul du déplacement latéral de la tour modélisée par un système à 1 degré de liberté

1. On applique le théorème du moment cinétique au solide constitué par la masse M_t située au bout de la tige sans masse de longueur H_c , ce qui correspond à un moment d’inertie $M_t H_c^2$. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le système subit les deux couples $-k_r \theta$ et $-c_r \dot{\theta}$ présentés par l’énoncé ainsi que le moment du poids $M_t g H_c \sin \theta$ puisque le bras de levier est $H_c \sin \theta$ et le moment de la force exercée par le vent de bras de levier $H_c \cos \theta$ qui a donc l’expression $W H_c \cos \theta$. L’équation différentielle donnant l’évolution de l’angle θ est donc : $M_t H_c^2 \ddot{\theta} = M_t g H_c \sin \theta - k_r \theta - c_r \dot{\theta} + W H_c \cos \theta$.

2. On linéarise pour les petits angles, on écrit au premier ordre $\sin \theta \simeq \theta$ et $\cos \theta \simeq 1$. On pose alors $M_{ext} = W H_c$ et on obtient l’équation différentielle $\ddot{\theta} + \frac{c_r}{M_t H_c^2} \dot{\theta} + \left(\frac{k_r}{M_t H_c^2} - \frac{g}{H_c} \right) \theta = \frac{M_{ext}}{I}$. On identifie I comme le moment d’inertie de la tour $I = M_t H_c^2$ ainsi que les pulsations $\omega_0 = \frac{1}{H_c} \sqrt{\frac{k_r}{M_t}}$, $\omega_g = \sqrt{\frac{g}{H_c}}$ et, enfin, le coefficient d’amortissement $\xi = \frac{c_r}{2 H_c \sqrt{k_r M_t}}$.

3. À l’équilibre, il n’y a ni vitesse, ni accélération. On en déduit que : $\theta_0 = \frac{M_{ext}}{I(\omega_0^2 - \omega_g^2)}$.

4. Pour déterminer le régime d’amortissement, il faut calculer le coefficient d’amortissement. On trouve $\xi = 2 \times 10^{-2}$ ce qui est relativement faible. Les oscillations seront de type pseudopériodique en s’assurant quand même du signe positif de $\omega_0^2 - \omega_g^2$. C’est bien le cas puisque $\omega_0^2 = 0,27 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ alors que $\omega_g^2 = 0,04 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. On obtient bien un discriminant réduit négatif pour l’équation caractéristique $\Delta' = \omega_g^2 - \omega_0^2(1 - \xi^2) = -\Omega^2$. On a donc les racines : $r = -\xi \omega_0 \pm j \Omega$. La forme de la solution est donc $\theta(t) = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) \exp -\xi \omega_0 t + \theta_0$. À la date $t = 0$, on a $\theta(t = 0) = 0 = A + \theta_0$. On en déduit que $A = -\theta_0$. Pour déterminer B , nous allons utiliser la vitesse initiale nulle $\dot{\theta}(t = 0) = 0$. L’expression de la vitesse est $\dot{\theta}(t) = (\Omega \theta_0 \sin \Omega t + B \Omega \cos \Omega t) \exp -\xi \omega_0 t - \xi \omega_0 (-\theta_0 \cos \Omega t + B \sin \Omega t) \exp -\xi \omega_0 t$. On en déduit, qu’au départ, on a donc la condition $B \Omega + \xi \omega_0 \theta_0 = 0$. Cela permet de déterminer $B = -\frac{\xi \omega_0}{\Omega} \theta_0$.

La forme de la solution de l’équation différentielle est donc : $\theta = \theta_0 [1 - (\cos \Omega t + \frac{\xi \omega_0}{\Omega} \sin \Omega t) \exp -\xi \omega_0 t]$. Cette solution n’est valable que pour les petits angles. Pour déterminer la valeur maximale de l’angle, on doit déterminer l’expression de $\dot{\theta}$ et chercher ses annulations. En reprenant l’expression de θ précédente

et en dérivant ou bien en utilisant l'expression de $\dot{\theta}$ qui nous a permis de déterminer B , on arrive à $\dot{\theta} = \theta_0 \exp -\zeta \omega_0 t [\Omega + \frac{\zeta^2 \omega_0^2}{\Omega}] \sin \Omega t$. La vitesse s'annule à chaque fois que $\Omega t = n\pi$. Comme le terme en $\exp -\zeta \omega_0 t$ décroît au cours du temps, c'est la première annulation de $\sin \Omega t$ qui va conduire à θ_1 . À ce moment-là, $\cos \Omega t = -1$. On a de plus un régime d'amortissement faible vu la valeur de ζ . L'amortissement par $\exp -\zeta \omega_0 t$ est négligeable. On peut conclure que $\theta_1 \simeq 2\theta_0$. Le dépassement de la consigne θ_0 sera important puisqu'il représente presque θ_0 . Si l'amortissement augmente, le dépassement va forcément diminuer. Il serait préférable pour la tour que l'on soit plutôt proche du régime critique que d'un régime pseudo-périodique.

I.B Étude statique non linéaire du comportement de la tour

5. Si l'on fait une approximation linéaire sur l'angle θ_0 , on trouve $\theta_0 = \frac{M_{ext}}{k_r - M_t g H_c} = 5 \times 10^{-3}$ rad. Sans linéarisation, l'équation permettant de déterminer θ_0 est : $\theta_0 = \frac{M_t g H_c}{k_r} \sin \theta_0 + \frac{M_{ext}}{k_r} \cos \theta_0$. On peut procéder à une recherche graphique de la solution, en traçant $y_1 = \theta$ et $y_2 = \frac{M_t g H_c}{k_r} \sin \theta + \frac{M_{ext}}{k_r} \cos \theta$. L'intersection des deux courbes donnera la position d'équilibre. Sur le graphique de la figure 4, on peut voir la représentation des deux courbes. Avec les valeurs numériques fournies par l'énoncé, on peut (c'est quand même plus simple avec une calculatrice...) trouver que l'équation est $\theta_0 = 0,15 \sin \theta_0 + 0,0045 \cos \theta_0$. Sur le graphique de la figure 4, ces valeurs ne sont pas respectées pour pouvoir observer le principe de la détermination de l'angle θ_0 . En réalité comme le facteur de $\cos \theta_0$ est très petit devant le facteur de $\sin \theta_0$, le point d'intersection est très proche de 0 ce qui justifie le fait que l'on ait, au départ, effectué une linéarisation sur l'angle θ .

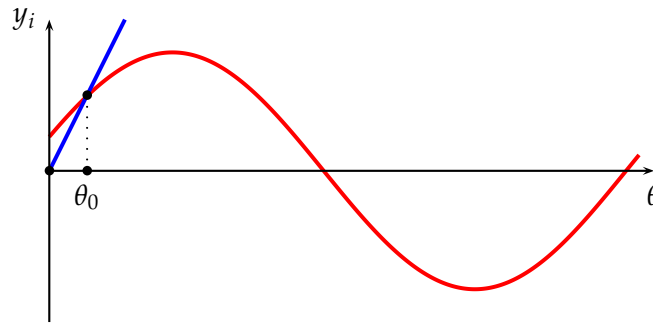


FIGURE 4 – Détermination de la position d'équilibre

6. Si on ne linéarise pas pour trouver l'angle θ_0 , on écrit $k_r \theta = M_t g H_c \sin \theta + M_{ext} \cos \theta$. On propose d'écrire $\theta = \theta_0 + \varepsilon$. On a donc $k_r \theta_0 + k_r \varepsilon = M_t g H_c \sin(\theta_0 + \varepsilon) + M_{ext} \cos(\theta_0 + \varepsilon)$. En utilisant les règles de calcul classiques de la trigonométrie, on arrive à $k_r \theta_0 + k_r \varepsilon = M_t g H_c (\sin \theta_0 \cos \varepsilon + \cos \theta_0 \sin \varepsilon) + M_{ext} (\cos \theta_0 \cos \varepsilon - \sin \theta_0 \sin \varepsilon)$. On poursuit en écrivant que $\cos \varepsilon \simeq 1$ et $\sin \varepsilon \simeq \varepsilon$. L'équation précédente devient donc $k_r \theta_0 + k_r \varepsilon = M_t g H_c \sin \theta_0 + M_t g H_c \cos \theta_0 \varepsilon + M_{ext} \cos \theta_0 - M_{ext} \sin \theta_0 \varepsilon$. θ_0 a été défini pour l'équation différentielle linéarisée et, par conséquent, on doit écrire $\cos \theta_0 \simeq 1$ et $\sin \theta_0 \simeq \theta_0$. Ce qui fait que les termes ne faisant pas intervenir ε s'annulent. On se retrouve avec l'équation $(k_r - M_t g H_c) \varepsilon = -M_{ext} \theta_0 \varepsilon$ qui impose que $\varepsilon = 0$. C'est logique puisque θ_0 est alors la position d'équilibre. Cette question est difficile à comprendre. Soit on linéarise et la position d'équilibre est θ_0 , soit on ne linéarise pas et l'équilibre est donné par $k_r \theta'_0 = M_t g H_c \sin \theta'_0 + M_{ext} \cos \theta'_0$.

I.C Comportement statique discrétisé de la tour

Calcul du déplacement latéral de la tour modélisée par un système à N degrés de liberté

7. Il y a toujours équilibre de la barre si la somme des moments des forces est nulle. Il faut toutefois faire attention que pour une barre qui n'est pas située à une des deux extrémités, le ressort de torsion k_{i+1} agit sur la différence d'angle entre $\theta_{i+1} - \theta_i$. Il en va de même pour le ressort de torsion de raideur k_i . On a donc l'équation d'équilibre suivante : $W_i h \cos \theta_i + M_i g h \sin \theta_i - k_i (\theta_i - \theta_{i-1}) + k_{i+1} (\theta_{i+1} - \theta_i) = 0$. Ce résultat n'est pas valable pour la première barre au pied de la tour car pour elle $\theta_{i-1} = 0$. Elle n'est

pas non plus valable pour la dernière barre au sommet de la tour car, pour elle, $i = N$ et $k_{N+1} = 0$, en effet il n'y a pas de ressort à l'extrémité. On obtient donc les équations suivantes pour le pied de la tour : $W_1 h \cos \theta_1 + M_1 g h \sin \theta_1 - k_1 \theta_1 + k_2 (\theta_2 - \theta_1) = 0$. Pour le sommet de la tour : $W_N h \cos \theta_N + M_N g h \sin \theta_N - k_N (\theta_N - \theta_{N-1}) = 0$.

8. Si on linéarise l'équation d'équilibre du morceau i de la tour. On obtient $W_i h = k_i (\theta_i - \theta_{i-1}) + k_{i+1} (\theta_i - \theta_{i+1}) - M_i g h \theta_i$. On peut encore la réécrire pour comprendre la formation matricielle que l'on envisage : $-k_{i+1} \theta_{i+1} + (k_i + k_{i+1} - \frac{M_i g h}{N^2}) \theta_i - k_i \theta_{i-1} = W_i \frac{H_c}{N}$. Or, $k_i = N k_r \forall i$, on peut écrire que $\underline{K}$ est une matrice $N \times N$ avec sur la $i^{\text{ème}}$ ligne $(i-2)$ zéros puis le terme $-N k_r$ à la $(i-1)^{\text{ème}}$ place, $(2N k_r - \frac{M_i g H_c}{N^2})$ à la $i^{\text{ème}}$ et enfin le terme $-N k_r$ à la $(i+1)^{\text{ème}}$ place. La ligne se termine par des zéros. Le vecteur $\underline{B}$ possède les composantes suivantes : $W_i \frac{H_c}{N}$. C'est un vecteur colonne de N lignes.

Application au cas $N = 3$

9. Pour une division entre $N = 3$ morceaux de la tour, on a l'équation d'équilibre suivante :

$$\begin{pmatrix} 2Nk_r - \frac{M_1 g H_c}{N^2} & -Nk_r & 0 \\ -Nk_r & 2Nk_r - \frac{M_2 g H_c}{N^2} & -Nk_r \\ 0 & -Nk_r & Nk_r - \frac{M_3 g H_c}{N^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \frac{H_c}{N} \\ W_2 \frac{H_c}{N} \\ W_3 \frac{H_c}{N} \end{pmatrix}$$

Nous devons calculer $W_i = \frac{p_m b}{H_c} \int_{(i-1)\frac{H_c}{N}}^{i\frac{H_c}{N}} z dz = \frac{p_m b H_c}{2N^2} (2i-1)$. À partir de cette expression, on peut faire évoluer l'expression de l'égalité matricielle :

$$3k_r \begin{pmatrix} 2 - \frac{M_1 g H_c}{27k_r} & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{M_2 g H_c}{27k_r} & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \frac{M_3 g H_c}{27k_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \frac{p_m b H_c^2}{54}$$

10. L'énoncé nous invite à faire une approximation que l'on peut vérifier numériquement $\frac{M_i g H_c}{27k_r} = 5,6 \times 10^{-3} \ll 1$. On peut, pour faciliter le traitement matriciel, poser $\varepsilon_i = \theta_i \frac{162k_r}{p_m b H_c^2}$. La relation d'équilibre devient alors :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On obtient un système de trois équations linéaires à trois inconnues : $2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 1$, $-\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 3$ et enfin $-\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 5$. La résolution de ce système est assez aisée, on obtient $\varepsilon_1 = 9$, $\varepsilon_2 = 17$ et $\varepsilon_3 = 23$. À partir de la relation que nous avons posée pour définir ε_i , on trouve $\theta_1 = 5 \times 10^{-4}$ rad, $\theta_2 = 9,4 \times 10^{-4}$ rad et $\theta_3 = 1,3 \times 10^{-3}$ rad. Chacun de ses angles agit sur la longueur $\frac{H_c}{3}$. Le décalage entre le pied de la tour et le sommet est donc la somme des trois décalages : $\ell_{123} = \frac{H_c}{3} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$. On trouve que : $\ell_{123} = 22,7 \text{ cm}$.

II Étude sismique du comportement discrétisé de la tour

11. Le repérage de u_1 et de u_2 doit être effectué par rapport au pied de la tour et non pas comme cela est indiqué par rapport à un bâti. Sinon, c'est ce bâti qui subirait le déplacement lié au séisme. Nous allons travailler dans le référentiel non galiléen attaché au pied de la tour. La force d'inertie d'entraînement qu'il ne faudra pas oublier de prendre en compte est $-M\ddot{u}_g$. Il n'y a pas de force de CORIOLIS car le référentiel non galiléen est en translation par rapport au bâti fixe. Pour le ressort de raideur $2k$, on doit considérer que l'élongation est u_1 , pour l'amortisseur, c'est la vitesse $\dot{u}_1$ qui compte. Par contre, pour le ressort de raideur k , on a une élongation $u_2 - u_1$ et pour l'amortisseur c'est la vitesse relative $\dot{u}_2 - \dot{u}_1$ qui doit être prise pour établir l'expression de la force de frottement. Si l'on applique la relation de la Dynamique à la masse $2M$, on obtient : $2M\ddot{u}_1 = -2ku_1 + k(u_2 - u_1) - 2c\dot{u}_1 + c(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - 2M\ddot{u}_g$. Pour la masse M , le

bilan des forces est plus simple car il n'y a qu'un ressort et un amortisseur à son contact. On a alors $M\ddot{u}_2 = -k(u_2 - u_1) - c(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - M\ddot{u}_g$.

12. On peut effectivement écrire l'ensemble des deux équations précédentes sous forme d'une relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c & -c \\ -c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_g \\ \ddot{u}_g \end{pmatrix}$$

On peut donc faire le point des matrices demandées et on peut inverser la matrice $\begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ puisque son déterminant est non nul $\text{Det}\underline{\underline{M}} = 2M^2 \neq 0$. On a donc une matrice $\underline{\underline{M}}^{-1}$ aisée à calculer :

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \frac{1}{2M^2} \begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2M} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \end{pmatrix}$$

On peut donc calculer la matrice demandée à savoir $\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}$:

$$\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}} = \frac{k}{M} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{k}{M} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ^* sont données par l'annulation du déterminant de la matrice $\frac{M}{k}\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}} - \lambda^*\underline{\underline{I}}$ où $\underline{\underline{I}}$ est la matrice unitaire. On a donc $(\frac{3}{2} - \lambda^*)(1 - \lambda^*) - \frac{1}{2} = 0$. Cela conduit à l'équation du second degré $\lambda^{*2} - \frac{5}{2}\lambda^* + 1 = 0$. On résout facilement cette équation pour obtenir les valeurs propres suivantes $\lambda_1^* = \frac{1}{2}$ et $\lambda_2^* = 2$ ce qui permet de trouver les valeurs propres du système physique : $\lambda_1 = \frac{k}{2M}$ et $\lambda_2 = \frac{2k}{M}$. Les vecteurs propres doivent vérifier l'équation matricielle suivante :

$$(\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}} - \lambda_i\underline{\underline{I}}) \begin{pmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour la première valeur propre $\lambda_1 = \frac{k}{2M}$, on obtient l'équation :

$$\frac{k}{M} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cela conduit à l'équation $\phi_{11} - \frac{1}{2}\phi_{21} = 0$. On peut donc choisir un vecteur $\underline{\phi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On conduit les mêmes développements pour la seconde valeur propre et on arrive à :

$$\frac{k}{M} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors l'équation $\phi_{12} + \phi_{22} = 0$. On choisira donc $\underline{\phi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Pour normaliser les deux vecteurs propres, il suffit de diviser par leur norme respective. $\underline{\phi}_1$ sera donc divisé par $\sqrt{5}$ et $\underline{\phi}_2$ par $\sqrt{2}$. Cela ne change rien pour la suite.

13. On constate facilement que les valeurs propres de la matrice étudiée ont la dimension d'une pulsation carrée. Par conséquent, ω_1 et ω_2 s'expriment en $\boxed{\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}}$. Les coordonnées des vecteurs propres nous permettent de voir la combinaison linéaire à effectuer pour passer d'un système différentiel couplé à un système de deux variables gérées chacune par une équation différentielle autonome.

14. L'équation différentielle matricielle s'écrit : $\ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{C}}\dot{\underline{U}} + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}\underline{U} = -\ddot{\underline{U}}_g$. Comme les coefficients de $\underline{\underline{K}}$ et $\underline{\underline{C}}$ sont les mêmes si l'on peut dire puisque la dimension de k et de c intervient, on peut voir que les valeurs propres et les vecteurs propres de $\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{C}}$ et de $\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}$ sont les mêmes. Si l'on utilise les variables proposées par l'énoncé, on peut voir que :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Cela nous donne la combinaison linéaire que l'on doit effectuer pour découpler le système : $u_1 = q_1 + q_2$ et $u_2 = 2q_1 - q_2$ ce qui permet d'écrire que $q_1 = \frac{u_1+u_2}{3}$ et $q_2 = \frac{2u_1-u_2}{3}$. On va donc effectuer une combinaison linéaire des deux équations différentielles avec les coefficients des vecteurs propres : si l'on fait $(1) + 2 \times (2)$, on arrive à $2M(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2) + c(\dot{u}_1 + \dot{u}_2) + k(u_1 + u_2) = -4M\ddot{u}_g$. En utilisant la relation qui existe entre q_1 et (u_1, u_2) , on obtient l'équation différentielle $\ddot{q}_1 + \frac{c}{2M}\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = -\frac{2}{3}\ddot{u}_g$. Cela permet d'identifier le coefficient α_1 par rapport à la forme différentielle proposée par l'énoncé : $\alpha_1 = \frac{2}{3}$. On peut aussi identifier

le coefficient de frottement qui est tel que $2\zeta_1\omega_1 = \frac{c}{2M}$. Avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2M}}$, on arrive à $\zeta_1 = \frac{c}{\sqrt{8Mk}}$. On prend maintenant les coefficients du second vecteur propre pour réaliser la combinaison linéaire $(1) - (2)$ des deux équations différentielles couplées de départ. On arrive à $M(2\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2) + 2c(2\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + 2k(2u_1 - u_2) = -M\ddot{u}_g$. Comme on a vu que $3q_2 = 2u_1 - u_2$, on peut conclure sur l'équation différentielle $\ddot{q}_2 + \frac{2c}{M}\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = -\frac{1}{3}\ddot{u}_g$. On a donc : $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ et $2\zeta_2\omega_2 = \frac{2c}{M}$ ce qui permet d'obtenir le coefficient d'amortissement $\zeta_2 = \frac{c}{\sqrt{2kM}}$. On constate que le coefficient d'amortissement n'est pas le même pour les deux modes.

15. On ne considère que le premier mode propre $q_1(t)$. En complexes, on peut donc écrire que $[(\omega_1^2 - \tilde{\omega}^2) + j2\zeta_1\omega_1\tilde{\omega}]q_1 = \frac{2}{3}A_g$. Cela permet de passer à l'expression réelle de $q_1(t)$ puis à celle de $u_2(t)$ puisque s'il n'y a qu'un seul mode de présent, on a $u_2(t) = -q_1(t)$. On obtient finalement :

$$u_2(t) = -\frac{2A_g}{3\sqrt{(\omega_1^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\zeta_1^2\omega_1^2\tilde{\omega}^2}} \sin(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

avec $\varphi = -\arg[(\omega_1^2 - \tilde{\omega}^2) + j2\zeta_1\omega_1\tilde{\omega}]$.

16. On nous suggère de négliger les conséquences de l'amortissement, on peut écrire que $U_{2,max} \simeq \frac{2A_g}{3|\omega_1^2 - \tilde{\omega}^2|}$. On trouve $U_{2,max} = 0,37 \text{ m}$. Cette valeur peut paraître importante mais il ne faut pas oublier que la tour possède une hauteur de 250 m. En valeur relative, cela représente seulement 0,15%.

III Étude du contrôle-commande d'un ascenseur

III.A Étude d'automates simplifiés

Modélisation par un système du premier ordre

17. On a la relation $Z(p) = (Z_c - Z)G\frac{1}{p}$. À partir de cette relation obtenue sur le schéma-bloc proposé, on arrive facilement à la fonction de transfert : $H(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{G}}$. On peut encore appréhender la réponse avec une approche plus traditionnelle utilisée en SI. On a $H(p) = \frac{G/p}{1+G/p} = \frac{1}{1+\frac{p}{G}}$ où on fait apparaître le chaîne directe et la FTBO.

18. Il y a un échelon de HEAVISIDE, on a peut écrire pour $t > 0$ que $Z(p) = \frac{H_c}{1+\frac{p}{G}}$. Si $t \rightarrow \infty$, cela signifie que l'on a $p = 0$. On en déduit que $Z(t \rightarrow \infty) = H_c$. On peut encore écrire que le signal s'écrit dans le domaine de LAPLACE $Z_c(p) = \frac{H_c}{p}$. Comme le système est stable, on peut utiliser le théorème de la valeur finale. On écrit donc que $z_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pZ(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pZ_c(p)H(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p\frac{H_c}{p} \frac{1}{1+\frac{p}{G}} = H_c$.

19. On passe en mode temporel et on écrit l'équation différentielle correspondante $\frac{1}{G}\frac{dz}{dt} + z = H_c$. La solution de cette équation différentielle est triviale : $z(t) = H_c(1 - \exp -Gt)$.

20. Nous avons vu que $z(t \rightarrow \infty) = H_c$. On en déduit que $z_\alpha = (1 - \alpha)H_c = H_c(1 - \exp -G\tau_\alpha)$. Cela permet d'écrire que $\exp -g\tau_\alpha = \alpha$. On a donc : $\tau_\alpha = -\frac{1}{G} \ln \alpha$.

21. On a $v = \frac{dz}{dt} = GH_c \exp -Gt$. La vitesse maximale est obtenue au départ, on a donc $V_0 = GH_c$ d'où la possibilité d'exprimer le coefficient G par : $G = \frac{V_0}{H_c}$. On a donc $\tau_\alpha = -\frac{H_c}{V_0} \ln \alpha$. Avec $\alpha = \frac{1}{1000}$, on en déduit que $\tau_{0,001} = \frac{3H_c \ln 10}{V_0}$.

22. L'application numérique conduit à : $\tau_{0,001} = 345 \text{ s}$ ce qui représente un peu moins de 6 minutes. Il faut dire que la tour fait 250 m de haut et que l'on ne peut pas aller trop vite, pas tellement, pour la vitesse mais pour les accélérations que l'on aurait au départ et à l'arrivée (décélération).

Boucle de rétroaction proportionnelle du second ordre

23. Nous avons maintenant $Z = \frac{1}{Mp^2}(KZ_c - (K + \tilde{K})Z - CpZ)$. On peut en déduire la nouvelle expression de la fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{K + \tilde{K} + Cp + Mp^2}$. On aurait aussi pu écrire $H(p) = \frac{K/Mp^2}{1 + (K + \tilde{K} + Cp)/Mp^2} = \frac{K}{K + \tilde{K} + Cp + Mp^2}$.

24. Dans le domaine de LAPLACE, on a $Z = \frac{KH_c}{K + \tilde{K} + Cp + Mp^2}$. Comme on l'a déjà dit, $t \rightarrow \infty$ correspond à $p = 0$. La position d'arrivée est donc donnée par $z_{t \rightarrow \infty} = \frac{K}{K + \tilde{K}} H_c$. Comme le haut de la tour correspond à $z = H_c$, pour l'atteindre, il faut alors que $\tilde{K} \ll K$. Par contre, on peut penser que la commande de l'étage à atteindre consiste à fixer K au vu du schéma-bloc proposé. On peut à nouveau utiliser le théorème de la valeur finale : $z_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} pZ_c(p)H(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{H_c}{p} \frac{K}{K + \tilde{K} + Cp + Mp^2} = \frac{K}{K + \tilde{K}} H_c$.

25. Lorsque l'on passe dans le domaine temporel, on obtient l'équation différentielle $M \frac{d^2z}{dt^2} + C \frac{dz}{dt} + (K + \tilde{K})z = KH_c$. Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta = C^2 - 4M(K + \tilde{K}) = -\Omega^2 4M^2$ car on va le supposer négatif au vu du graphique proposé ensuite. Les racines de l'équation caractéristique sont donc : $r = -\frac{C}{2M} \pm j\Omega$. La solution de l'équation différentielle est $z(t) = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) \exp -\frac{C}{2M}t + \frac{K}{K + \tilde{K}} H_c$. Comme l'ascenseur part du pied de la tour en $z = 0$ sans vitesse initiale, la recherche de la solution est exactement du même type que celle que nous avons trouvé à la question 4.. La solution est donc :

$$z(t) = \frac{K}{K + \tilde{K}} H_c \left[1 - \left(\cos \Omega t + \frac{C}{2M\Omega} \sin \Omega t \right) \exp -\frac{C}{2M}t \right].$$

26. Il faut chercher les annulations de la vitesse de l'ascenseur, ce qui se produit plusieurs fois puisque l'on a supposé le régime comme étant pseudo-périodique. Le calcul de la dérivée donne assez rapidement $\frac{dz}{dt} = \frac{K}{K + \tilde{K}} H_c \left(\frac{C^2}{4M^2\Omega} + \Omega \right) \sin \Omega t \exp -\frac{C}{2M}t$. Cette expression montre que la vitesse s'annule lorsque $\Omega t_i = i\pi$ avec $i \in \mathbb{N}$. Cela se produit toutes les demi-pseudopériodes. À chaque annulation de la vitesse, on a un pic selon la terminologie de l'énoncé, il serait plus approprié de parler d'extremum. Au moment du maximum ou du minimum, on a nécessairement $\cos \Omega t_i = \pm 1$. L'expression de l'altitude du pic est donnée par :

$$z_i = \frac{K}{K + \tilde{K}} H_c (1 - \cos(i\pi) \exp -i \frac{\pi C}{2M\Omega}).$$

27. Avec la condition d'encadrement proposée, on a $(1 - \alpha) \leq 1 - \cos i\pi \exp -\frac{C}{2M}\tau_\alpha \leq (1 + \alpha)$ ce qui revient à écrire que $-\alpha \leq -\cos i\pi \exp -\frac{C}{2M}\tau_\alpha \leq \alpha$. Comme $\cos i\pi = \pm 1$, on peut donc écrire que $\exp -\frac{C}{2M}\tau_\alpha \leq \alpha$. Comme $\Omega\tau_\alpha = i\pi$, on obtient $\exp -i \frac{\pi C}{2M\Omega} \leq \alpha$. On obtient $-i \frac{\pi C}{2M\Omega} \leq \ln \alpha$. On peut donc conclure avec la relation : $i \geq \frac{2M\Omega}{\pi C} \ln \frac{1}{\alpha}$.

28. On peut être surpris de voir que l'ascenseur effectue un régime pseudo-périodique aussi marqué. En effet, on a réglé K pour aller au 13^{ème} étage (estimation sans doute raisonnable puisque la hauteur atteinte est de 40 m). Il est très étonnant de voir l'ascenseur aller jusqu'au 15^{ème} étage à 47 m de hauteur pour redescendre tranquillement et ouvrir les portes au 13^{ème}. On s'attend plutôt à un réglage de l'ascenseur très près du régime critique pour que le dépassement de la consigne soit le plus faible possible et la durée mise pour atteindre l'état final soit la plus brève possible. Pour répondre au critère portant sur l'évaluation de la durée τ_α , il faut que tous les pics qui suivent celui que l'on retient correspondent à un dépassement inférieur à 4 m puisque l'on cherche $\tau_{0,1}$. Après avoir atteint à 47 m, l'ascenseur descend jusqu'à 39 m ce qui est au-dessus de la cote fixée pour 10% à savoir 36 m. La durée $\tau_{0,1}$ doit donc être évaluée sur le passage à 37 m. Sur le graphique, on lit $\tau_{0,1} = 32 \text{ s}$.