

Composition de Physique - U - PSI 2017

Les ondes gravitationnelles et leur détection

Ce document est diffusable aux élèves. Pour toute remarque, me contacter à l'adresse venturi.marc@free.fr

I. Étude d'une source d'ondes gravitationnelles

Étude d'un système binaire de deux trous noirs en rotation

Q1. La force de gravitation a pour expression : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G_N \frac{m_1 m_2}{\|\vec{M}_1 \vec{M}_2\|^2} \vec{u}_r$.

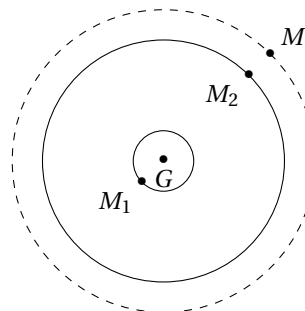
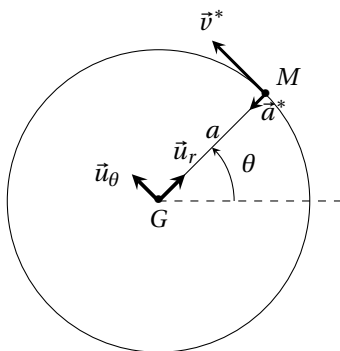
Q2. Il découle de la définition du barycentre et de linéarité de la dérivation que : $\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$.

Q3. Par définition du moment cinétique et par additivité de celui-ci, il vient : $\vec{L}_G = m_1 \vec{G} \vec{M}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 \vec{G} \vec{M}_2 \wedge \vec{v}_2$. Sa dérivée temporelle est nulle car $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{G} \vec{M}_1 \wedge \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{G} \vec{M}_2 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et, d'après le principe de l'action et de la réaction, $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$, il vient $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_2 \vec{M}_1 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$ par colinéarité des deux vecteurs du produit vectoriel. La conséquence de cette conservation est la planéité du mouvement des deux trous noirs, le plan étant le plan passant par G et orthogonal à $\vec{L}_G$. En effet, $\forall t, \vec{G} \vec{M}_1 \cdot \vec{L}_G = \vec{0}$ car $\vec{L}_G$ est par construction orthogonal à $\vec{G} \vec{M}_1$, directement dans le premier terme et indirectement dans le second terme, en remarquant que $\vec{G} \vec{M}_2$ est colinéaire à $\vec{G} \vec{M}_1$ (la définition de G implique $m_1 \vec{G} \vec{M}_1 + m_2 \vec{G} \vec{M}_2 = \vec{0}$). Il en est de même pour $\vec{G} \vec{M}_2$.

Q4. La loi de Newton implique $\frac{d^2 \vec{O} \vec{M}_1}{dt^2} = -\frac{1}{m_1} \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\frac{d^2 \vec{O} \vec{M}_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$. La différence des deux équations mène à $\frac{d^2 \vec{M}_2 \vec{M}_1}{dt^2} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ soit, puisque $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$, $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$.

Q5. Les principales propriétés du mouvement d'un point matériel dans un champ à force centrale conservative sont :
 — le mouvement est plan ; le plan du mouvement contient le centre du champ de force ; il est orthogonal au vecteur moment cinétique.
 — le mouvement est soumis à la loi des aires, conséquence de la conservation du moment cinétique : $r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$;
 — le mouvement respecte la conservation de l'énergie mécanique $E^* = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + E_p(r)$ où $\vec{f} = -\vec{\text{grad}} E_p$.

Q6. $\vec{r} = a \vec{u}_r$, $\vec{v}^* = a \dot{\theta} \vec{u}_\theta$, $\vec{a}^* = -a \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -G_N \frac{m_1 + m_2}{a^2} \vec{u}_r$.



Q7. $\vec{v}^* = \sqrt{G_N \frac{m_1 + m_2}{a}} \vec{u}_\theta$ qui découle de $\vec{a}^* = -G_N \frac{m_1 + m_2}{a^2} \vec{u}_r$. Ainsi, $\|\vec{v}^*\| = \sqrt{G_N \frac{m_1 + m_2}{a}}$. C'est la troisième loi de Kepler.

Q8. Pour $O = G$, la relation (1) implique $m_1 \vec{GM}_1 + m_2 \vec{GM}_2 = \vec{0}$, puis, comme $\vec{GM}_2 = \vec{GM}_1 + \vec{M}_1 \vec{M}_2$ et $\vec{M}_1 \vec{M}_2 = \vec{GM}$, il vient $(m_1 + m_2) \vec{GM}_1 + m_2 \vec{GM} = \vec{0}$ d'où $\vec{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{GM}$ qui a pour norme constante (donc mouvement circulaire)

$$a_1 = a \frac{m_2}{m_1 + m_2} = a \frac{\mu}{m_1}. \text{ On fait de même pour } a_2 \text{ avec } \vec{GM}_1 = \vec{GM}_2 + \vec{M}_2 \vec{M}_1.$$

Émission des ondes gravitationnelles

Q9. $[I_{ij}] = \text{M} \cdot \text{L}^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^2$: c'est la dimension d'un moment d'inertie.

$$\begin{cases} I_{11} = (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) \cos^2 \Omega t = \mu a^2 \cos^2 \Omega t \\ I_{22} = (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) \sin^2 \Omega t = \mu a^2 \sin^2 \Omega t \\ I_{12} = (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) \sin \Omega t \cos \Omega t = \mu a^2 \cos \Omega t \sin \Omega t = I_{21} \end{cases}$$

Q10. On obtient le résultat par une double dérivation et la formule $2 \sin x \cos x = \sin 2x$:

$$\frac{d^2 I_{11}}{dt^2} = -\mu a^2 \Omega \frac{d}{dt} \sin(2\Omega t) = -2\mu a^2 \Omega^2 \cos 2\Omega t.$$

t est ensuite remplacé par $t - \frac{R}{c}$. On utilise la formule $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ pour exprimer les termes $h_{12} = h_{21}$. Il s'agit

d'une onde plane progressive harmonique. La fréquence de l'onde est $f_{OG} = \frac{\Omega}{\pi}$.

Q11. On calcule des valeurs intermédiaires : $R_S = 1,779 \times 10^5 \text{ m}$, la vitesse relative $v^* = 1,061 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On en déduit

la vitesse angulaire $\Omega = \frac{v^*}{a} = 149,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ puis $f_{OG} = 47,5 \text{ Hz}$. Le rapport des vitesses demandé est $\frac{v^*}{c} = 0,35$, la

vitesse peut être considérée relativiste. L'amplitude des ondes reçues sur Terre est $h = 8,97 \times 10^{-22} \approx 10^{-21}$.

Forme de l'onde gravitationnelle et évolution du système binaire

Q12. L'énergie potentielle de deux astres sphériques distant de a est : $E_p = -G_N \frac{m_1 m_2}{a}$. On obtient le résultat de

l'énoncé en remarquant que $m_1 m_2 = \mu M_{\text{tot}}$. L'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$. Les vitesses sont : $\vec{v}_1 = \frac{d\vec{GM}_1}{dt} =$

$-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}^*$ et $\vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}^*$. Ainsi, $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{m_1 + m_2} v^{*2} + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1^2}{m_1 + m_2} v^{*2} = \frac{1}{2} \mu v^{*2} = \frac{1}{2} \mu a^2 \Omega^2$. On obtient

alors le résultat $E^* = \frac{1}{2} \mu a^2 \Omega^2 - G_N \frac{\mu M_{\text{tot}}}{a}$. D'après l'expression de v^* , $\Omega^2 = G_N \frac{M_{\text{tot}}}{a^3}$ d'où $\frac{1}{2} \mu a^2 \Omega^2 = G_N \frac{\mu M_{\text{tot}}}{2a}$. Alors,

$$E^* = -G_N \frac{\mu M_{\text{tot}}}{2a}.$$

Q13. À la seconde expression de $|E^*|$, on applique la fonction logarithme puis on dérive par rapport au temps :

$\ln |E^*| = -\ln a + \text{cte}$ d'où $\frac{1}{E^*} \frac{dE^*}{dt} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dt}$. On sait que $\mu a^2 \Omega^2 = G_N \frac{\mu M_{\text{tot}}}{a}$ d'où $E^* = -\frac{1}{2} \mu a^2 \Omega^2$. La dérivée du logarithme

de $|E^*|$ est $\frac{1}{E^*} \frac{dE^*}{dt} = 2 \frac{da}{adt} + 2 \frac{d\Omega}{\Omega dt}$ d'où $\frac{1}{E^*} \frac{dE^*}{dt} = 2 \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ puis le résultat de l'énoncé.

Comme $E^* < 0$ et que l'énergie mécanique diminue au cours du temps, tous les membres des relations précédentes sont positifs. Il en résulte que la distance a entre les astres diminue et que la vitesse angulaire augmente.

Q14. On calcule $\text{Tr}(I) = I_{11} + I_{22} = \mu a^2$ puis $Q = \mu a^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \Omega t - \frac{1}{2} & \cos \Omega t \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \sin \Omega t & \sin^2 \Omega t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mu a^2 \begin{pmatrix} \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t \\ \sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t \end{pmatrix}$.

La dérivée troisième est $\frac{d^3 Q}{dt^3} = 4\mu a^2 \Omega^3 \begin{pmatrix} \sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t \\ -\cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t \end{pmatrix}$. Le carré de chaque terme de la matrice sans dimension a pour moyenne $\frac{1}{2}$ d'où :

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\langle \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right)^2 \right\rangle = 32\mu^2 a^4 \Omega^6 = 32G_N^3 \frac{\mu^2 M_{\text{tot}}^3}{a^5},$$

car $\Omega^2 = G_N \frac{M_{\text{tot}}}{a^3}$. La définition (8) de la puissance $\mathcal{P}$ mène au résultat proposé.

Q15. Le bilan d'énergie mécanique s'écrit $\frac{dE^*}{dt} = -\mathcal{P}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{dE^*}{dt} &= -\mathcal{P} \\ G_N \frac{\mu M_{\text{tot}}}{2} \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} &= -\frac{32}{5} \frac{G_N^4 \mu^2 M_{\text{tot}}^3}{c^5 a^5} \\ a^3 \frac{da}{dt} &= -\frac{64}{5} \frac{G_N^3 \mu M_{\text{tot}}^2}{c^5} \\ \frac{a^4}{4} - \frac{a_0^4}{4} &= -\frac{64}{5} \frac{G_N^3 \mu M_{\text{tot}}^2}{c^5} t, \end{aligned}$$

d'où $a(t) = a_0 \left(1 - \frac{256}{5} \frac{G_N^3 \mu M_{\text{tot}}^2}{c^5} t \right)^{1/4}$. On retrouve le fait que a diminue au cours du temps.

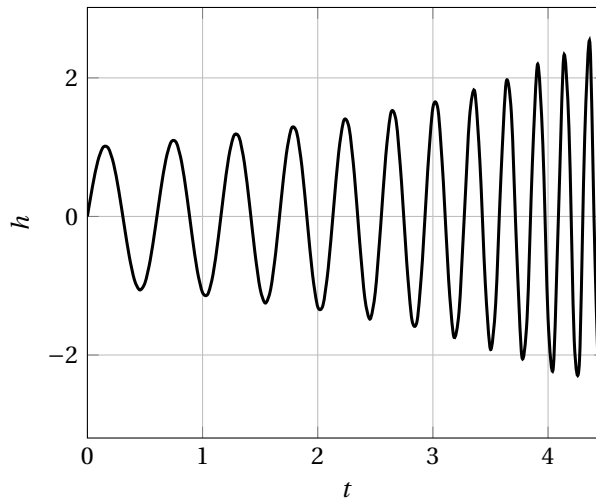
L'amplitude h est proportionnelle à $a^2 \Omega^2 \propto \frac{1}{a}$. Ainsi, l'amplitude des ondes gravitationnelles augmente lors de l'effondrement du système.

Q16. On sait que $\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G_N^3 \mu M_{\text{tot}}^2}{c^5 a^3}$ et $a = \left(\frac{G_N M_{\text{tot}}}{\pi^2 f_{\text{OG}}^2} \right)^{1/3} = \frac{G_N^{1/3} M_{\text{tot}}^{1/3}}{\pi^{2/3}} f_{\text{OG}}^{-2/3}$.

On en déduit $-\frac{2}{3} \frac{G_N^{1/3} M_{\text{tot}}^{1/3}}{\pi^{2/3}} f_{\text{OG}}^{-5/3} \frac{df_{\text{OG}}}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G_N^3 \mu M_{\text{tot}}^2}{c^5 a^3}$ soit $\frac{df_{\text{OG}}}{dt} = \frac{96}{5} \frac{G_N^{8/3} \mu M_{\text{tot}}^{5/3} \pi^{2/3}}{c^5} \frac{\pi^2 f_{\text{OG}}^2}{G_N M_{\text{tot}}} f_{\text{OG}}^{5/3}$ d'où le résultat :

$$\frac{df_{\text{OG}}}{dt} = \frac{96}{5} \frac{G_N^{5/3} \mu M_{\text{tot}}^{2/3} \pi^{8/3}}{c^5} f_{\text{OG}}^{11/3}.$$

La fréquence augmente comme la fonction $\frac{1}{(1 - \alpha t)^{3/8}}$: elle tend vers $+\infty$ quand $a \rightarrow 0$. L'amplitude des ondes augmente en même temps. Le graphe attendu est tracé ci-après (l'échelle de temps est arbitraire).



Peu de temps avant la collision des deux astres, il faut remettre en cause :

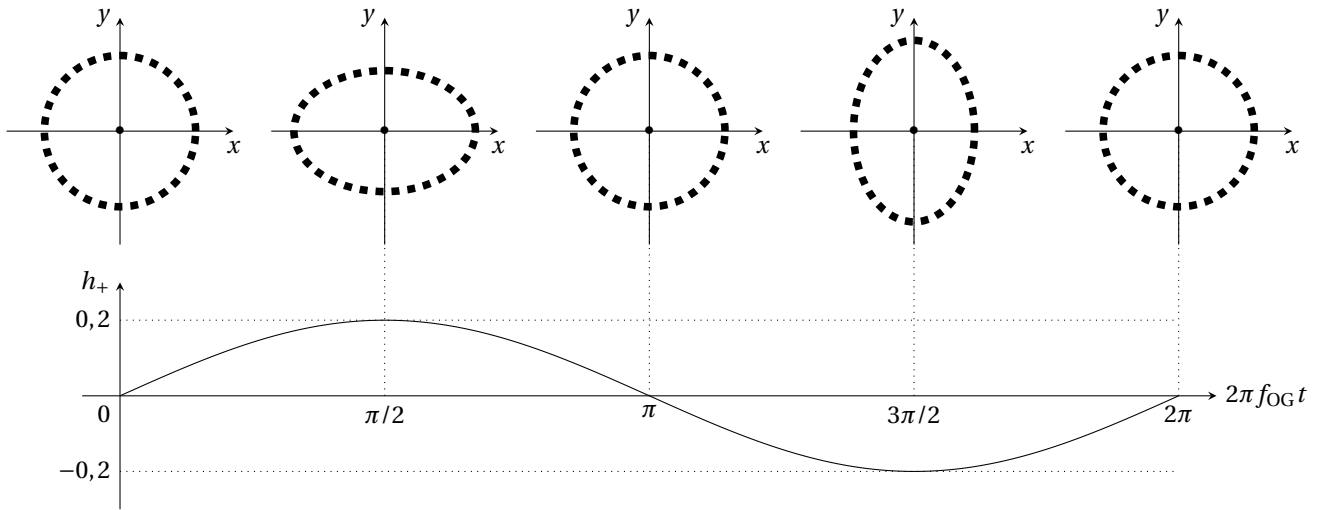
- la force d'attraction entre les astres qui cessent d'être sphériques ;
- les lois newtoniennes du mouvement car les vitesses deviennent relativistes ;
- la perte d'énergie mécanique qui n'est plus uniquement due au rayonnement gravitationnel.

Effet des ondes gravitationnelles sur la matière

Q17. L'intégration double par rapport au temps de l'équation (15) aboutit à $\vec{\xi} = \frac{1}{2} h \cdot \vec{r}_0$. La matrice h appliquée au vecteur $\vec{r}_0$ donne : $h \cdot \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} h_+ x_0 + h_\times y_0 \\ h_\times x_0 + h_+ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Puisque $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$, on en déduit les expressions annoncées.

Les variations relatives de longueur sont de l'ordre de 10^{-21} , donc non décelables dans la vie quotidienne.

Q18. Les relations sont $\delta x = h_+ x_0$ et $\delta y = -h_+ y_0$ d'où les schémas suivants (la valeur $h_+ = 0,2$ est arbitraire) :



L'onde gravitationnelle h_+ modifie les longueurs en opposition de phase sur les axes x et y .

Q19. La lumière met une durée $\frac{2L_0}{c}$ pour parcourir dans le vide (hypothèse) la distance aller-retour $2L_0$. Cette durée doit rester faible devant la période de l'onde gravitationnelle, soit $\frac{2L_0}{c} \ll \frac{1}{f_{OG}}$, d'où, pour $f_{OG} \approx 50 \text{ Hz}$, $L_0 \ll 3 \times 10^3 \text{ km}$, ce qui n'est pas trop contraignant. La variation absolue de L_0 due à l'onde gravitationnelle vaut alors $3 \times 10^{-15} \text{ m}$, c'est à dire la taille du noyau d'un atome ! Il paraît difficile de concilier le temps de parcours qui doit rester faible avec une distance à parcourir suffisamment grande pour rendre les variations de distance détectables.

Q20. La variation relative de dx étant $\frac{1}{2} h_+$, la distance est $dx \left(1 + \frac{1}{2} h_+ \right)$. Alors, si l'indice est noté n , la durée de parcours est $d\tau_x = \frac{n}{c} \left(1 + \frac{1}{2} h_+ \right) dx$. La durée totale s'écrit alors $\tau_x = \int_0^{2L_1^0} d\tau_x = \frac{2n}{c} \left(1 + \frac{1}{2} h_+ \right) L_1^0$.

Q21. Sur l'axe y , la variation relative est $-h_+$ d'où l'expression $\tau_y = \frac{2n}{c} \left(1 - \frac{1}{2} h_+ \right) L_2^0$. La différence $\tau_x - \tau_y$ est celle de l'énoncé.

Le passage d'une onde gravitationnelle est détectée par interférences des deux faisceaux lasers qui se sont propagés respectivement sur x et sur y . Cette méthode permet de détecter des écarts de longueur ou de durée ($\delta L = c(\tau_x - \tau_y)$) de l'ordre d'une fraction de longueur d'onde (ou de période) de l'onde laser.

II. Détection des ondes gravitationnelles : les barres résonnantes

Principe d'une barre résonnante

Q22. L'expression de la pulsation du mode fondamental est $\omega_0 = \frac{\pi v_s}{L} = 5,7 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q23. L'équation (18) s'écrit, en notation complexe : $-\omega^2 \underline{\xi} + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \underline{\xi} + \omega_0^2 \underline{\xi} = -\frac{2L}{\pi^2} \omega^2 \underline{h}_+$ d'où la fonction de transfert

$$\underline{G}(\omega) = \frac{2L}{\pi^2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - j \frac{\omega \omega_0}{Q}}. \text{ Il s'agit d'une fonction de transfert d'un filtre passe-haut du second ordre.}$$

Q24. Le carré du module de la fonction de transfert est $|\underline{G}(\omega)|^2 = \frac{4L^2}{\pi^4} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2 \omega^2}}$. Sa valeur maximale est

atteinte au voisinage de $\omega = \omega_0$ pour Q élevé d'où $G_{\max} = \frac{2LQ}{\pi^2}$.

Q25. Interprétation du diagramme :

- la zone rectiligne aux basses fréquences correspond à une droite d'équation $G_{\text{dB}} = 20 \log \left(\frac{2L}{\pi^2} \right) - 40 \log \omega_0 + 40 \log \omega$, de pente 40 dB/décade;
- dans cette zone, la phase vaut π ou 180° puisque $\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{G} < 0$;
- la zone rectiligne aux hautes fréquences correspond à une droite horizontale d'équation $G_{\text{dB}} = 20 \log \left(\frac{2L}{\pi^2} \right)$;
- la phase y est voisine de 0 car $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \underline{G} > 0$;
- la région où $\omega \sim \omega_0 \sim 5500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ montre une résonance. Le gain y est grand car Q est élevé ($\sim 10^7$), la phase voisine de 90° .

Q26. Après l'impulsion, le régime d'oscillations est libre, le second membre de l'équation différentielle est nul. Le facteur de qualité étant très élevé, le mouvement est celui d'un oscillateur très peu amorti, donc proche de celui d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 .

On prend $h \approx 10^{-21}$. Pour $\omega_0 \tau = \frac{5500}{47,5} \approx 1,2 \times 10^2$, l'amplitude maximale des oscillations est : $\xi_{\max} = \frac{4L}{\pi} \times 10^{-21} \approx 5 \times 10^{-20} \text{ m}$ ce qui reste extrêmement faible par rapport aux mesures possibles.

Système oscillant à deux masses

Q27. La fréquence de résonance d'un système masse-ressort est donnée par $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ d'où la relation cherchée

$$\frac{k_t}{m_t} = \frac{K_b}{M_b}.$$

Q28. L'énergie mécanique d'un système masse-ressort est $E_m = \frac{1}{2} k \xi_{\max}^2$ d'où la relation entre les amplitudes maximales des deux oscillateurs $k_t (\xi_t^{\max})^2 = K_b (\xi_b^{\max})^2$ qui implique $m_t (\xi_t^{\max})^2 = M_b (\xi_b^{\max})^2$ qui fournit la relation donnée dans la question. On en déduit un ordre de grandeur de l'amplitude $\xi_t^{\max}$: $\xi_t^{\max} \approx 10^{-18} \text{ m}$. On gagne un facteur 100.

Étude d'un transducteur capacitif

Q29. Sans effet de bord, le champ électrique s'écrit
$$\begin{cases} \vec{E}_0(z) = -\frac{q_0}{\pi a^2 \epsilon_0} \vec{u}_z & \text{à l'intérieur;} \\ \vec{E}_0(z) = \vec{0} & \text{à l'extérieur.} \end{cases}$$

Q30. Un potentiel est $V(z) = \frac{q_0}{\pi a^2 \epsilon_0} z$ d'où
$$U(e_0) = \frac{q_0 e_0}{\pi a^2 \epsilon_0}.$$

Q31. La capacité C s'en déduit par $C = \frac{q_0}{U(e_0)}$ d'où
$$C = \epsilon_0 \frac{\pi a^2}{e_0} = 12 \text{ nF}.$$

Q32. On élimine le champ magnétique des deux équations de Maxwell dans le vide $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ pour obtenir $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, puis, comme $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}) - \Delta$ et $\text{div} \vec{E} = 0$ dans le vide, il vient $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$. C'est l'équation de propagation relative au champ électrique d'une onde électromagnétique dans le vide.

En base cartésienne, $\Delta(E \vec{u}_z) = (\Delta E) \vec{u}_z$ d'où ici $\Delta(\vec{E}) = \Delta(E(r)) \cos(\omega t) \vec{u}_z = \left(\frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE(r)}{dr} \right) \cos(\omega t) \vec{u}_z$.

Comme $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E(r) \cos(\omega t) \vec{u}_z$, on obtient l'équation de l'énoncé $\frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE(r)}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} E(r) = 0$.

Q33. D'après le graphe de la fonction $E(r)/E_1$, il faut, pour que le champ électrique soit quasi uniforme dans le condensateur, que $\frac{a\omega}{c} \ll 1$. Par exemple, si $\frac{a\omega}{c} = 1$, le champ chute de 80% entre le centre et la périphérie des armatures.

Si l'on prend comme limite $\frac{a\omega_{\max}}{c} = 0,1$,
$$f_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{2\pi} = 0,1 \frac{c}{2\pi a} = 72 \text{ MHz}.$$

Q34. Les plans contenant Oz sont des plans de symétrie des charges et du champ électrique ainsi que des courants qui circulent selon Oz ou bien radialement dans les armatures. On en déduit que le champ magnétique est orthoradial.

Il y a invariance par translation selon z dans l'espace entre les armatures. Ainsi, $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$.

Le théorème de Stokes appliqué à l'équation de Maxwell-Ampère, $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, permet d'écrire $\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{c^2} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ soit ici $2\pi r B_\theta(r) = -\frac{\pi r^2}{c^2} \omega E \sin(\omega t)$ d'où
$$\vec{B} = -\frac{\omega r}{2c^2} E \sin(\omega t) \vec{u}_\theta.$$

Q35. Le champ électrique s'écrit ici $\vec{E} = \vec{E}_0 + E_1 \cos(\omega t) \vec{u}_z = E_0 \vec{u}_z \left(1 + \frac{\xi_t^{\max}}{e_0} \cos(\omega t) \right)$ avec $E_0 = -\frac{q_0}{\pi a^2 \epsilon_0}$. On en déduit

$$V(z, t) = -E_0 z \left(1 + \frac{\xi_t^{\max}}{e_0} \cos(\omega t) \right).$$
 Pour que cette expression soit acceptable, il faut que la fréquence reste inférieure à une dizaine de MHz.

Q36. Pour une épaisseur e_0 , $U(e_0, t) = -E_0 (e_0 + \xi_t^{\max} \cos(\omega t)) = U(e(t))$. La capacité devient

$$C_t = \frac{q_0}{U} \simeq C_0 \left(1 - \frac{\xi_t^{\max}}{e_0} \cos(\omega t) \right).$$

Q37. La charge $q_0 = \epsilon_0 \frac{\pi a^2}{e} U$ est constante d'où
$$\alpha = \frac{q_0}{\epsilon_0 \pi a^2} = \frac{C_t U}{\epsilon_0 \pi a^2} \approx 3 \times 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$
 En considérant α constant, il

vient $\delta U = \alpha \xi_t$. AN : si l'on prend $\xi = 10^{-18} \text{ m} \ll e_0 = 10 \mu\text{m}$, on obtient $\delta U = 3 \times 10^{-11} \text{ V}.$

Filtrage et détection du signal

Q38. Le condensateur C_p permet de filtrer le signal. Il coupe la composante statique (impédance infinie du condensateur) mais laisse passer la composante variable qui contient l'information utile. Toutefois, la composante variable est atténuée.

Q39. (Voir cours.) Le principe de la détection synchrone consiste à multiplier le signal bruité par un signal sinusoïdal de fréquence proche de celle du signal utile. L'effet est de translater ce signal vers les faibles fréquences. Un filtrage passe-bas isole finalement le signal utile.

Q40. Le signal que l'on cherche à extraire du bruit est situé dans un intervalle de fréquences connu. On peut donc engendrer facilement le signal harmonique qui multipliera le signal reçu des barres.

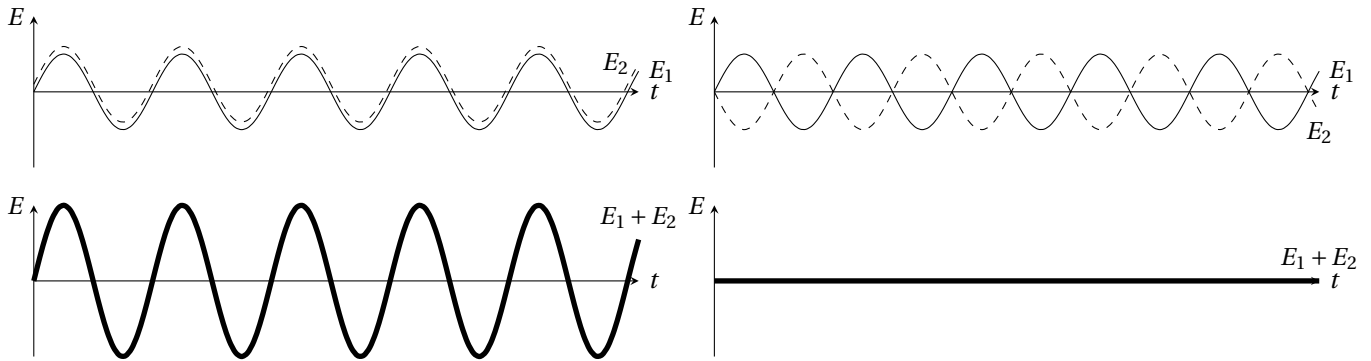
III. Détection des ondes gravitationnelles : détecteur interférométrique

Dispositif de Michelson

Q41. Entre le laser et le détecteur, le faisceau parcourt la distance $L_l + 2L_1 + L_d$ dans le sens de propagation et subit une transmission et une réflexion sur la séparatrice et une réflexion sur le miroir. Ainsi, $\vec{E}_1 = r_1 r_s t_s \vec{E}_0 e^{j(\omega t - nk(L_l + 2L_1 + L_d))}$.

De même, sur le second bras, $\vec{E}_2 = r_2 r_s t_s \vec{E}_0 e^{j(\omega t - nk(L_l + 2L_2 + L_d))}$. La différence des phases des deux ondes est alors $\Delta\phi = 2nk(L_1 - L_2)$.

Q42. Considérons deux ondes déphasées de $\Delta\phi = 2p\pi$ (à gauche), déphasées de $\Delta\phi = (2p + 1)\pi$ (à droite) et, en dessous, leur somme respective :



Le premier cas correspond à des interférences constructives, le second cas à des interférences destructives.

Q43. D'après la question précédente, on peut écrire $\vec{E}_2 = \vec{E}_1 e^{j\Delta\phi}$ d'où $\vec{E} = \vec{E}_1 (1 + e^{j\Delta\phi})$. Alors, puisque $e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x$ et $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$:

$$\|\vec{E}\|^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}^* = \|\vec{E}_1\|^2 (1 + e^{j\Delta\phi})(1 + e^{-j\Delta\phi}) = \|\vec{E}_1\|^2 (2 + 2\cos(\Delta\phi)) = 4\|\vec{E}_1\|^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right).$$

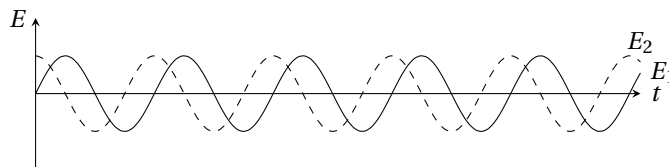
La moyenne temporelle fournit l'intensité cherchée : $I = I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$ où $I_0 = 4\langle\|\vec{E}_1\|^2\rangle_t$.

Q44. Le déphasage a pour expression : $\Delta\phi = 2nk(L_1^0 - L_2^0) + 2nk(\delta L_1 - \delta L_2) = \phi_0 + 2nk\delta x$. On en déduit le résultat de l'énoncé.

Q45. La linéarisation consiste à développer la fonction intensité au premier ordre selon la formule de Taylor : $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$. Ainsi, puisque $nk\delta x = 2\pi \frac{\delta x}{\lambda} \ll \frac{\phi_0}{2}$ et $(\cos^2 x)' = -2\cos x \sin x = -\sin(2x)$:

$$I \approx I_0 \cos^2\left(\frac{\phi_0}{2}\right) - I_0 nk \sin(\phi_0) \delta x.$$

La variation d'intensité est maximale si $\phi_0 = \frac{\pi}{2} + p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. L'interféromètre est réglé, au repos, de telle façon que les deux ondes interfèrent en quadrature, $\Delta\phi = \frac{\pi}{2} + p\pi$.



Q46. Dans un milieu d'indice n , la célérité des ondes est $v_\phi = \frac{c}{n}$ et $\frac{\omega}{k} = c$ d'où $\Delta\phi = nk(2L_1 - 2L_2) = \frac{n\omega}{c}(2L_1 - 2L_2) = \omega(\tau_x - \tau_y)$.

D'après la relation (17) de la question 21, $\Delta\phi = 2nk(L_1^0 - L_2^0) + 2nk\delta x = \omega\left(\frac{2n(L_1^0 - L_2^0)}{c} + \frac{nh_+(t)2L_0}{c}\right)$. On en déduit $\delta x = h_+(t)L_0$.

Q47. La sensibilité de l'interféromètre est proportionnelle à la longueur des bras. Pour $h_+ = 10^{-21}$ et $L_0 = 3\text{ km}$, $\delta x = 3 \times 10^{-18}\text{ m}$ soit un millième du diamètre d'un noyau d'atome! Comme $\lambda = 1064\text{ nm}$, l'approximation $\delta x \ll \lambda$ est largement vérifiée. La variation du déphasage a pour valeur, pour $n = 1$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\Delta\phi - \phi_0 = 2nk\delta x = 3,5 \times 10^{-11}\text{ rad}$.

Cavité Fabry-Pérot

Q48. Le champ $\vec{E}_0$ est le champ incident $\vec{E}_{\text{inc}}$ réfléchi par la lame : $\vec{E}_0 = r'_1 \vec{E}_{\text{inc}}$. Le champ $\vec{E}_1$ est le champ incident qui a traversé le premier miroir (t'_1), qui s'est propagé entre les deux miroirs (e^{-jnkL_1}), s'est réfléchi sur le miroir parfait (-1), est revenu sur le premier miroir (e^{-jnkL_1}) puis a retraversé le premier miroir (t'_1). Ainsi, $\vec{E}_1 = -\vec{E}_{\text{inc}}(t'_1)^2 e^{-2jnkL_1}$. Entre $\vec{E}_p$ et $\vec{E}_{p-1}$, il y a deux réflexions (une sur chaque miroir) et un aller-retour entre les miroirs d'où $\vec{E}_p = r'_1 e^{-2jnkL_1} \vec{E}_{p-1}$. On en déduit, pour $p > 1$, $\vec{E}_p = -\vec{E}_{\text{inc}}(t'_1)^2 e^{-2jnkL_1} (r'_1 e^{-2jnkL_1})^{p-1}$.

Q49. On calcule la série géométrique et on utilise l'égalité $(r'_1)^2 + (t'_1)^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_1 &= \vec{E}_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} \vec{E}_p \\ &= r'_1 \vec{E}_{\text{inc}} - \vec{E}_{\text{inc}}(t'_1)^2 e^{-2jnkL_1} \sum_{i=0}^{+\infty} (r'_1 e^{-2jnkL_1})^i \\ &= r'_1 \vec{E}_{\text{inc}} - \vec{E}_{\text{inc}}(t'_1)^2 e^{-2jnkL_1} \frac{1}{1 - r'_1 e^{-2jnkL_1}} \\ &= \left[r'_1 - \frac{(1 - (r'_1)^2) e^{-2jnkL_1}}{1 - r'_1 e^{-2jnkL_1}} \right] \vec{E}_{\text{inc}} \\ &= \left[\frac{r'_1 - (r'_1)^2 e^{-jnkL_1} - (1 - (r'_1)^2) e^{-2jnkL_1}}{1 - r'_1 e^{-2jnkL_1}} \right] \vec{E}_{\text{inc}} \\ &= \left[\frac{r'_1 - e^{-2jnkL_1}}{1 - r'_1 e^{-2jnkL_1}} \right] \vec{E}_{\text{inc}} \end{aligned}$$

Q50. Exprimons le carré du module du crochet de l'expression précédente, en utilisant $|z|^2 = zz^*$:

$$|R_1|^2 = \left| \frac{r'_1 - e^{-2jnkL_1}}{1 - r'_1 e^{-2jnkL_1}} \right|^2 = \frac{r'_1 - e^{-2jnkL_1}}{1 - r'_1 e^{-2jnkL_1}} \frac{r'_1 - e^{2jnkL_1}}{1 - r'_1 e^{2jnkL_1}} = \frac{(r'_1)^2 - 2r'_1 \cos(2nkL_1) + 1}{1 - 2r'_1 \cos(2nkL_1) + (r'_1)^2} = 1.$$

On peut aussi factoriser le numérateur par l'exponentielle et remarquer qu'on obtient le rapport de deux complexes conjugués :

$$R_1 = -e^{-2jnkL_1} \frac{1 - r'_1 e^{2jnkL_1}}{1 - r'_1 e^{-2jnkL_1}} \Rightarrow |R_1| = \left| \frac{Z}{Z^*} \right| = 1.$$

Ce résultat signifie qu'il n'y a aucune perte énergétique dans la cavité.

Q51. $L_1 = L_1^0 + \delta L_1$ d'où $e^{-2jnkL_1} = e^{-2jnmkL_1^0 - 2jnk\delta L_1} = e^{-2jnk\delta L_1}$ car $e^{-2jkmL_1^0} = e^{-2jp_1\pi} = 1$. Comme $|2nk\delta L_1| \ll 1$, le développement limité au premier ordre de l'exponentielle est $e^{-2jnk\delta L_1} \approx 1 - 2jnk\delta L_1$. L'expression du coefficient R_1 est ainsi $R_1 \approx \frac{r'_1 - 1 + 2jnk\delta L_1}{1 - r'_1 + 2jnk\delta L_1}$ qui est le résultat donné.

Q52. L'argument de R_1 s'écrit $\text{Arg}[R_1] = \text{Arg}[-1] + \text{Arg}[1 - r'_1 - 2jnk\delta L_1] - \text{Arg}[1 - r'_1 + 2jnk\delta L_1]$. On en déduit $\text{Arg}[R_1] = \pi - 2 \frac{nk\delta L_1}{1 - r'_1} - 2 \frac{nk r'_1 \delta L_1}{1 - r'_1}$, en utilisant $\text{Arg}[x + jy] = \arctan \frac{y}{x} \simeq \frac{y}{x}$ si $|y| \ll x$ et $x > 0$. On obtient donc

$$\text{Arg}[R_1] = \pi - 2 \frac{(1 + r'_1)nk\delta L_1}{1 - r'_1}. \text{ Par différence, } \Delta\phi' = \text{Arg}[R_1] - \text{Arg}[R_2] + \phi_0 = -2 \frac{1 + r'_1}{1 - r'_1} nk\delta x + \phi_0.$$

Q53. On gagne le facteur $\frac{1 + r'_1}{1 - r'_1} = 99 \simeq 100$ soit $\Delta\phi' - \phi_0 \simeq 3,5 \times 10^{-9} \text{ rad}$. Cela reste difficile à mesurer. Le déphasage serait celui d'un interféromètre dont les bras auraient une longueur $L'_0 = 100L_0 = 300 \text{ km}$.

Suspension des miroirs

Q54. Sur l'axe Ox , la projection de la loi de la quantité de mouvement est :

$$M_m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = T_x - \frac{M_m}{\tau} \frac{dx_1}{dt}$$

où T_x est la projection sur Ox de la tension T du câble appliquée au miroir. Le câble a une longueur L_p et sa projection sur Ox est $x_0 - x_1$. On en déduit $T_x = -T \frac{x_1 - x_0}{L_p}$. Par ailleurs, le miroir ne se déplace pas verticalement, ce qui implique que la composante verticale de la tension compense le poids du miroir. Ainsi, $M_m g = T_z$. Mais pour les petits déplacements, $T_z \simeq T$ d'où $T = M_m g$ puis $M_m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -M_m g \frac{x_1 - x_0}{L_p} - \frac{M_m}{\tau} \frac{dx_1}{dt}$. Enfin, $\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx_1}{dt} + \frac{g}{L_p} (x_1 - x_0) = 0$.

Q55. En régime harmonique, l'équation précédente devient $-\omega^2 \underline{x}_1(\omega) + j \frac{\omega}{\tau} \underline{x}_1(\omega) + \frac{g}{L_p} \underline{x}_1(\omega) = \frac{g}{L_p} \underline{x}_0(\omega)$. La fonction de

transfert s'en déduit (on pose $\omega_0^2 = \frac{g}{L_p}$) : $\underline{H} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau}}$.

Q56. Il s'agit d'un système de filtrage passe-bas du second ordre (pente de l'asymptote haute fréquence égale à -40 dB/décade) avec résonance aiguë. On peut calculer le gain à la résonance : $\underline{H}(\omega_0) = -j\omega_0 \tau = 313 j$ d'où $H(\omega_0) = 313$. Pour les fréquences supérieures à 1 Hz , le filtre est passe-bas du second ordre.

Q57. La fréquence est $f_0 = 0,49 \text{ Hz}$. Pour $f = 10 \text{ Hz}$, le gain vaut $H = 0,0025$ d'où $|\underline{x}_1(10 \text{ Hz})| = 2,5 \times 10^{-12} \text{ m}$, loin des variations de 10^{-18} m provoquées par les ondes gravitationnelles.

Q58. On reprend le raisonnement de la question **Q54** pour obtenir $\frac{d^2 x_N}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx_N}{dt} + \frac{g}{L_p} (x_N - x_{N-1}) = 0$. Les fils sont quasiment verticaux, la projection des tensions sur l'axe vertical, qui compensent le poids des systèmes au-dessous, doit être égale à l'opposé du poids du miroir et des $N - i$ masses M_p : $T_i = (M_m + (N - i)M_p)g$. Il y a deux tensions s'appliquant sur chaque pendule, la tension du fil du haut et la tension du fil du bas :

$$M_p \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{M_p}{\tau} \frac{dx_i}{dt} + (M_m + (N - i)M_p) \frac{g}{L_p} (x_{i-1} - x_i) + (M_m + (N - i - 1)M_p) \frac{g}{L_p} (x_{i+1} - x_i).$$

Q59. La notation complexe des amplitudes harmoniques permet d'écrire, pour le miroir : $(-\omega^2 + j \frac{\omega}{\tau} + \omega_0^2) \underline{x}_N = \omega_0^2 \underline{x}_{N-1}$ qui est la relation de l'énoncé après division par ω_0^2 . Pour les masses, après division par $M_p \omega_0^2$, la relation est :

$$\left(\frac{-\omega^2 + j \frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2} + 2 \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i \right) - 1 \right) \underline{x}_i = \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i \right) \underline{x}_{i-1} + \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i - 1 \right) \underline{x}_{i+1},$$

qui est bien la relation de l'énoncé.

Q60. Dans ce régime, $A_i = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2(4 + N - i) - 1 + j \frac{\omega}{\tau}$. La partie réelle est négative, sa valeur absolue grande devant 1, car $\omega^2 \gg \omega_0^2$: $\Re(A_i) \simeq -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$. La partie imaginaire de A_i est $\frac{\omega}{\tau \omega_0^2}$, la partie réelle $-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, leur rapport est donc $-\frac{1}{\tau \omega}$.

Si $\omega \gg \omega_0 = 8 \times 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, comme $\tau = 100 \text{ s}$, il vient $\omega\tau \gg 8$ puis $\frac{1}{\omega\tau} \ll 0,12$. On peut alors négliger la partie imaginaire devant la partie réelle des A_i . On obtient bien $|A_i| \gg 1$.

On peut alors considérer $A_i \simeq A_0$ et l'équation (36) devient :

$$\begin{aligned} A_0 \underline{x}_i &= \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i \right) \underline{x}_{i-1} + \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i - 1 \right) \underline{x}_{i+1} \\ A_0 &= \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i \right) \frac{\underline{x}_{i-1}}{\underline{x}_i} + \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i - 1 \right) \frac{\underline{x}_{i+1}}{\underline{x}_i} \\ A_0 &= \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i \right) \frac{1}{\underline{H}_i} + \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i - 1 \right) \underline{H}_{i+1} \\ \underline{H}_i &= \frac{\frac{M_m}{M_p} + N - i}{A_0 - \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i - 1 \right) \underline{H}_{i+1}}. \end{aligned}$$

Avec l'hypothèse $\underline{H}_{i+1} = \frac{1}{A_0} \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i - 1 \right)$, il vient :

$$\underline{H}_i = \frac{\frac{M_m}{M_p} + N - i}{A_0 - \frac{\left(\frac{M_m}{M_p} + N - i - 1 \right)^2}{A_0}} = \frac{1}{A_0} \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i \right) \frac{1}{1 - \frac{\left(\frac{M_m}{M_p} + N - i - 1 \right)^2}{A_0^2}}.$$

Le dernier quotient est proche de 1 puisque $A_0^2 \gg 1$, ce qui permet d'obtenir la relation cherchée. On justifie l'hypothèse initiale de la récurrence en remarquant que l'équation (36) pour $\underline{x}_N$ s'écrit :

$$\underline{H}_N = \frac{\underline{x}_N}{\underline{x}_{N-1}} = \frac{1}{1 + A_0} \simeq \frac{1}{A_0} \simeq \frac{1}{A_0} \frac{M_m}{M_p},$$

puisque ce dernier rapport vaut 4 et ne modifie pas l'ordre de grandeur.

Q61. La fonction de transfert totale est :

$$\underline{H}_{\text{tot}}(\omega) = \prod_{i=N}^1 \underline{H}_i = \frac{1}{A_0} \prod_{i=1}^N \frac{1}{A_0} \left(\frac{M_m}{M_p} + N - i \right) = \frac{1}{A_0^N} \prod_{i=0}^{N-1} \left(\frac{M_m}{M_p} + i \right),$$

la dernière expression étant obtenue par le changement d'indice $i \rightarrow N - i$.

Pour $f = 10 \text{ Hz}$, $A_0 = -400$ et $\frac{1}{A_0^N} = -6,1 \times 10^{-19}$. Le produit vaut $4 \times 5 \times \dots \times 10 = 6,0 \times 10^5$ d'où $|\underline{H}_{\text{tot}}| = 3,7 \times 10^{-13}$.

Pour $|x_0| \approx 10^{-9} \text{ m}$, $|x_N| \approx 10^{-20} \text{ m}$ ce qui paraît suffisant pour que les variations de longueur provoquées par l'onde gravitationnelle soient mesurables.

Nécessité de l'ultra-vide

Q62. L'indice de l'air est de l'ordre de $n \simeq 1,0003$ ($n = 1,000293$ à 0°C). Les sources d'inhomogénéité de l'indice sont principalement :

- la température non uniforme : les sources thermiques locales, les courants de convection thermique ;
- les ondes sonores qui compriment et détendent localement l'air.

Q63. L'équation (26) est $I = I_0 \cos^2 [nk(L_1 - L_2)]$. La différentielle de I par rapport à n , L_1 et L_2 est :

$$dI = -I_0 \sin(2nk(L_1^0 - L_2^0)) [k(L_1 - L_2)dn + nk(dL_1 - dL_2)].$$

On en déduit le résultat grâce au rappel des notations utilisées : $\delta I = -I_0 \sin \phi_0 [kx\delta n + nk\delta x]$.

Q64. On veut détecter δx sans être gêné par δn donc $\frac{\delta n}{n} \ll \frac{\delta x}{x}$. La différence $x = L_1 - L_2$ est de l'ordre de la longueur d'onde ($\phi_0 = \pi/2$) d'où, en prenant $n = 1$, $\delta n_{\max} = \frac{\delta x}{x} = 10^{-12}$.

Q65. On peut raisonner sur la masse volumique ρ d'un gaz parfait : $\rho = \frac{P_0 M_{\text{air}}}{RT_0}$ où $M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ est la masse molaire de l'air. Alors, $\delta n = \alpha \delta \rho = -\alpha \rho_0 \frac{\delta T_0}{T_0}$. D'après la question précédente, $\delta T_{0 \max}/T_0 = 10^{-8}$ soit $\delta T_{0 \max} = 3 \times 10^{-6} \text{ K}$ ce qui est inaccessible sur un volume aussi grand que celui des cavités.

Q66. Si l'indice vaut 1, il n'y a pas de variation possible d'indice.

Q67. $n = 1 + \alpha \frac{PM_{\text{air}}}{RT} = 1 + \alpha \rho_0 \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T}$ d'où $n = 1 + (n_0 - 1) \frac{PT_0}{P_0 T}$.

Q68. $\delta n = -(n_0 - 1) \frac{P}{P_0} \frac{\delta T}{T_0}$. Pour $\delta n = 10^{-12}$ et $n_0 - 1 = 3 \times 10^{-4}$, $P \leq 3 \times 10^{-9} P_0 \frac{T_0}{|\delta T|}$. Pour $\delta T = 1 \text{ mK}$, $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ et $T_0 = 300 \text{ K}$, $P = 90 \text{ Pa}$. Les conditions réelles de l'ultra-vide sont largement suffisantes.

Bruit de grenaille et caractérisation du laser

Q69. $\delta I = \delta I_0 \cos^2 \frac{\phi_0}{2} - I_0 n k \sin \phi_0 \delta x$.

Q70. Il faut que $\delta I_0 \ll 2 I_0 n k \delta x \left| \tan \frac{\phi_0}{2} \right|$. Il faudrait que $\phi_0 = (2m + 1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Q71. Un photon de fréquence ν possède une énergie $h\nu$. Alors, $\mathcal{P}_0 = N \frac{h\nu}{\tau}$. La dérivée logarithmique fournit

$$\frac{\delta \mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_0} = \frac{\delta N}{N} = \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \text{ Ainsi, } \frac{\delta \mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_0} = \sqrt{\frac{h\nu}{\mathcal{P}_0 \tau}}.$$

Q72. $\frac{\delta I_0}{I_0} = \frac{\delta \mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_0}$ d'où $\sqrt{\frac{h\nu}{\mathcal{P}_0 \tau}} \ll 2 n k \delta x \left| \tan \frac{\phi_0}{2} \right|$, soit $\mathcal{P}_0 \gg \frac{h\nu}{4\tau n^2 k^2 (\delta x)^2} \frac{1}{\tan^2 \frac{\phi_0}{2}} = \frac{hc\lambda}{16\pi^2 \tau (\delta x)^2} \frac{1}{\tan^2 \frac{\phi_0}{2}}$.

Pour $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\mathcal{P}_0 \gg 15 \text{ W}$. Le troisième étage d'amplification est nécessaire. Pour $\phi_0 = \pi$, il n'y a pas de condition sur $\mathcal{P}_0$ mais on ne peut détecter la fluctuation δx .

IV. La découverte des ondes gravitationnelles

Q73. On utilise deux détecteurs pour identifier l'onde gravitationnelle : la corrélation des signaux reçus sur les deux détecteurs élimine un faux signal qui serait dû à une perturbation locale.

Q74. L'ordre de grandeur pour h mesuré est celui qui est détectable dans les conditions que l'on a calculées précédemment. De même, les fréquences détectées sont placées dans la bande atténuée des vibrations des miroirs. Les précautions prises contre les différents bruits sont suffisantes pour la détection.

Q75. On détecte le passage d'une onde gravitationnelle grâce à une augmentation de fréquence du signal corrélée à une augmentation de l'amplitude, lorsque ce même signal se reproduit sur un autre interféromètre (Ligo ou Virgo).