

De l'atome d'hydrogène aux galaxies

Filière PC

I La raie H1 à 21 cm

I.A- Étude classique de l'atome d'hydrogène

Q 1. Force électrostatique s'exerçant sur l'électron :

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

Q 2. $\vec{F}$ est une force conservative ; l'énergie potentielle E_p associée est telle que :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = -\frac{dE_p(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \frac{dE_p(r)}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}} ; \quad \left(\lim_{r \rightarrow \infty} E_p(r) = 0 \right)$$

Q 3. Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} \text{ est une constante vectorielle : le mouvement de l'électron est plan}$$

Q 4. On repère la position de l'électron par ces coordonnées polaires (r, θ) dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}$. L'énergie de l'électron :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{avec } \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \text{ dans la base polaire } (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta). \\ &= \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{et } L = \|\vec{L}\| = m_e r^2 \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2} m_e \left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m_e^2 r^2} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + E_{P \text{ eff}}(r) \quad \text{avec } \boxed{E_{P \text{ eff}}(r) = \frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}} \end{aligned}$$

Q 5.

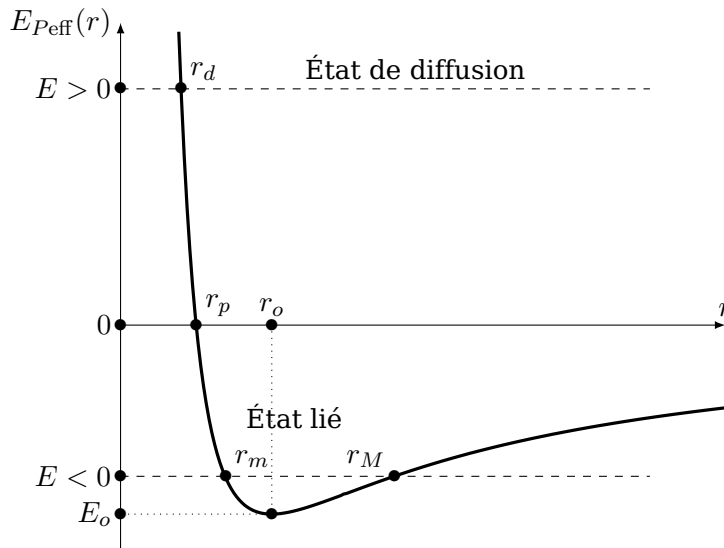


Figure 1 – La représentation graphique de $E_{P\text{eff}}(r)$ dans le cas où $L \neq 0$

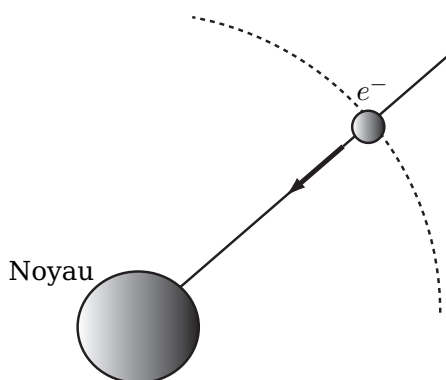
- Pour $E > 0$, le mouvement est limité à $r > r_d$ qui peut prendre une valeur infini : il s'agit d'un mouvement révolutif (état libre ou état de diffusion) et la trajectoire est une branche d'hyperbole de foyer O ;
- Pour $E = 0$, le mouvement est limité à $r > r_p$: il s'agit d'un état limite entre les mouvements non bornés et bornés (états liés) et la trajectoire est une parabole de foyer O ;
- Pour $E_o < E < 0$, le mouvement est limité à $r_m < r < r_M$: il s'agit d'un mouvement lié (mouvement oscillatoire entre r_m et r_M) et la trajectoire est une ellipse de foyer O ;
- Pour $E = E_o$, le mouvement est limité à $r = r_o$: il s'agit d'un mouvement circulaire de centre O .

Q 6. L'orbite circulaire est possible pour $L \neq 0$ et $E = E_o = E_{P\text{eff}}(r_o)$ avec r_o la position correspondante au minimum de $E_{P\text{eff}}(r)$:

$$\left(\frac{dE_{P\text{eff}}(r)}{dr} \right)_{r=r_o} = 0 \Leftrightarrow r_o = \frac{4\pi\epsilon_o L^2}{m_e e^2}$$

$$E = E_o = \frac{L^2}{2m_e r_o^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r_o} = \boxed{-\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_o^2 L^2}}$$

Q 7. Si $L = 0$, la trajectoire de l'électron est rectiligne (se dirige vers le noyau).



I.B- Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

Q 8. $L = mvr = n\hbar$. Le TRC appliqué à l'électron ; avec $\vec{v} = v\vec{u}_\theta$:

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = m_e \left(\frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta - \frac{v^2}{r} \vec{u}_r \right) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r^3} \vec{r}$$

$$\Rightarrow m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r^2} \Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o} = \frac{m_e^2 v^2 r^2}{m_e r} = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e r} \quad \text{ou} \quad \boxed{r = \frac{4\pi\epsilon_o \hbar^2}{m_e e^2} n^2} \quad (\text{les orbites sont quantifiées}).$$

Remarque : On pourra utiliser le résultat de la question Q 6., en remplaçant L par $n\hbar$ ($r_o = r_n$) !
Pour la première orbite de Bohr :

$$\boxed{a_o = \frac{4\pi\epsilon_o \hbar^2}{m_e e^2} = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m}}$$

Q 9. Niveaux d'énergie :

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_o r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_o a_o} \times \frac{1}{n^2} \quad (\text{les niveaux d'énergie sont quantifiés}).$$

L'énergie de l'état fondamental :

$$\boxed{E_o = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_o a_o} = -13,60 \text{ eV}}$$

Q 10.

$$\frac{3}{2}kT = E_o \Rightarrow T = \frac{2E_o}{3k} = 1,051 \times 10^5 \text{ K}$$

Q 11. L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est susceptible d'absorber ou d'émettre un rayonnement de longueur d'onde comprise entre $\lambda_{\infty,1}$ et $\lambda_{2,1}$ telles que :

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= E_o \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}E_o = \frac{hc}{\lambda_{2,1}} \Rightarrow \lambda_{2,1} = \frac{4hc}{3E_o} \simeq 91,4 \times 10^{-7} \text{ cm} \\ E_{\infty} - E_1 &= E_o = \frac{hc}{\lambda_{\infty,1}} \Rightarrow \lambda_{\infty,1} = \frac{hc}{E_o} \simeq 1,22 \times 10^{-5} \text{ cm} \end{aligned}$$

La valeur de $\lambda_o = 21 \text{ cm}$ est en dehors de ce domaine : le modèle de Bohr ne permet, donc, pas de comprendre l'origine de la transition.

I.C- La structure hyperfine de l'atome d'hydrogène

Q 12.

$$\begin{aligned} \vec{M}_o &= I_e \vec{S} = I_e \pi r^2 \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad I_e = \frac{q_e}{T_e} = -e \frac{v}{2\pi r} \\ &= -\frac{evr}{2} \vec{u}_z = -\frac{m_e evr}{2m_e} \vec{u}_z \\ &= -\frac{e}{2m_e} \vec{L} = \gamma_o \vec{L} \end{aligned}$$

Q 13.

$$\gamma_o = -\frac{e}{2m_e} : \text{Rapport gyromagnétique de l'électron}$$

Q 14.

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{3(\vec{M}_p \cdot \vec{u}) \vec{u} - \vec{M}_p}{r^3} \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi r^3} g_p \frac{e}{2m_p} \left(3(\vec{S}_p \cdot \vec{u}) \vec{u} - \vec{S}_p \right) \end{aligned}$$

On admet que le moment magnétique de spin du proton est orthogonal au plan de l'orbite :

$$\vec{S}_p \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_o g_p e}{8\pi m_p r^3} \vec{S}_p$$

En supposant que l'électron est sur l'orbite fondamentale du modèle de Bohr :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_o g_p e}{8\pi m_p a_o^3} \vec{S}_p$$

Q 15. À l'état fondamental, l'énergie potentielle magnétique d'interaction entre $\vec{M}_e$ et $\vec{B}$:

$$U_e = -\vec{M}_e \cdot \vec{B} = \frac{\mu_o g_p e}{8\pi m_p a_o^3} \vec{M}_e \cdot \vec{S}_p = -\frac{\mu_o g_p g_s e^2}{16\pi m_p m_e a_o^3} \vec{S}_e \cdot \vec{S}_p$$

On considère, $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire orthogonal au plan de l'orbite et la propriété de spin de l'électron (ou de proton) :

$$\vec{S}_e = \pm \frac{\hbar}{2} \vec{u}_z \quad \text{ou} \quad \vec{S}_p = \pm \frac{\hbar}{2} \vec{u}_z$$

Supposons que $\vec{S}_p = +\frac{\hbar}{2} \vec{u}_z$:

- si $\vec{S}_e = +\frac{\hbar}{2}\vec{u}_z$ (spins parallèles $\uparrow\uparrow$), il en résulte un sous-niveau d'énergie : $E_l = U_{e\uparrow\uparrow}(a_o)$
- si $\vec{S}_e = -\frac{\hbar}{2}\vec{u}_z$ (spins anti-parallèles $\uparrow\downarrow$), il en résulte un sous-niveau d'énergie : $E_u = U_{e\uparrow\downarrow}(a_o)$
- Soit : $\Delta E = E_u - E_l$ ou $E_u = E_l + \Delta E$

Q 16.

$$E_u = +\frac{\mu_o g_p g_S e^2}{16\pi m_p m_e a_o^3} \frac{\hbar^2}{4} \quad \text{et} \quad E_l = -\frac{\mu_o g_p g_S e^2}{16\pi m_p m_e a_o^3} \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow \boxed{\Delta E = \frac{\mu_o g_p g_S e^2 \hbar^2}{32\pi m_p m_e a_o^3}}$$

Q 17. Pour que l'électron décrive l'orbite fondamentale Bohr, il faut que $L \neq 0$ (Cf. Q 6.). Si non sa trajectoire sera rectiligne.

Q 18. Si $L = 0$, le mouvement de l'électron est rectiligne et dirigé vers le noyau, sa probabilité de présence au voisinage du centre sera, donc, importante.

Si $L \neq 0$, le mouvement de l'électron est circulaire avec quantification de l'énergie, la distance la plus probable est a_o : loin du noyau à l'échelle atomique.

Q 19. Fréquence ν_o et longueur d'onde λ_o :

$$\Delta E = h\nu_o \Rightarrow \nu_o = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{8}{3} \frac{g_S g_p}{h} \frac{m_e}{m_p} \left(\frac{e\hbar}{2m_e} \right)^2 \frac{1}{a_o^3} \simeq 1420 \times 10^6 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \boxed{\lambda_o = \frac{c}{\nu_o} \simeq 0,21 \text{ m}}$$

Cette raie se situe dans le domaine des ondes radio !

II Étude de l'émission et de l'absorption entre les deux niveaux hyperfins

II.A- Bilan radiatif de la raie HI

Q 20.

- ◊ émission spontanée : transition atomique du niveau d'énergie supérieur (E_u) au niveau inférieur (E_l). Cette transition s'accompagne par émission d'un photon d'énergie $h\nu = E_u - E_l$.
- ◊ émission stimulée : processus au cours duquel l'atome qui se trouve dans un état excité entre en interaction avec le rayonnement incident, il se désexcite en émettant un rayonnement de même direction et de même polarisation que le rayonnement incident.
- ◊ absorption : transition dû à l'absorption du rayonnement par l'atome, ses électrons passent du niveau d'énergie inférieur (niveau fondamental) au niveau d'énergie supérieur (niveau excité).

Q 21. On suppose que le phénomène de l'émission spontanée se produit seul, l'évolution des populations n_u est régit par l'équation :

$$\frac{dn_u}{dt} = -A_{ul}n_u \Rightarrow n_u(t) = n_u(t=0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_u}\right)$$

τ_u est la durée de vie de l'état excité :

$$\boxed{\tau_u = \frac{1}{A_{ul}} \simeq 3,51 \times 10^{14} \text{ s} \simeq 11 \text{ million d'années !!}}$$

Q 22. à cause de la proportion importante en hydrogène atomique 89% !!

Q 23. $g_u = 3, g_l = 1, T = 100 \text{ K}$

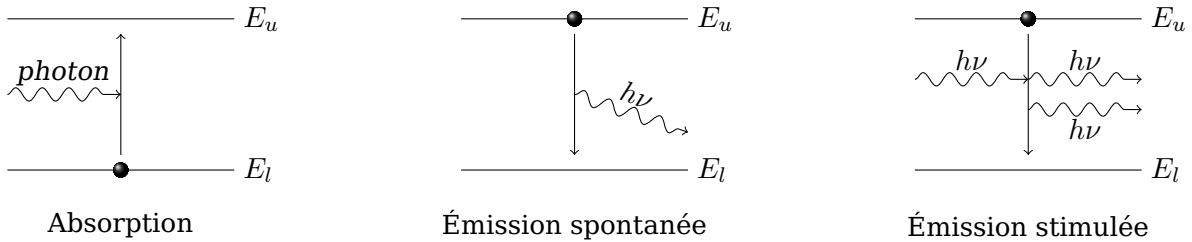
$$\begin{aligned} n_H &= n_u + n_l \quad \text{avec} \quad \frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{E_u - E_l}{kT}\right) = 3 \exp\left(-\frac{h\nu_o}{kT}\right) \\ &= n_l \left(1 + \frac{n_u}{n_l}\right) \\ &= n_l \left(1 + 3 \exp\left(-\frac{h\nu_o}{kT}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\frac{h\nu_o}{kT} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \times 1420 \times 10^6}{1,38 \times 10^{-23} \times 100} \simeq 6,8 \times 10^{-5} \ll 1 \Rightarrow \exp\left(-\frac{h\nu_o}{kT}\right) \simeq 1$$

Soit :

$$n_H = n_u + n_l = 4n_l$$

Q 24. Interaction matière rayonnement :



$$\frac{dn_l}{dt} = \left(\frac{dn_l}{dt}\right)_{\text{Absorption}} + \left(\frac{dn_l}{dt}\right)_{\text{Emission spontanée}} + \left(\frac{dn_l}{dt}\right)_{\text{Emission stimulée}} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \left(\frac{dn_l}{dt}\right)_{\text{Absorption}} = -n_l u_\nu B_{lu} \\ \left(\frac{dn_l}{dt}\right)_{\text{Emission spontanée}} = +n_u A_{ul} \\ \left(\frac{dn_l}{dt}\right)_{\text{Emission stimulée}} = +n_u u_\nu B_{ul} \end{cases}$$

Soit :

$$\frac{dn_l}{dt} = -n_l u_\nu B_{lu} + n_u A_{ul} + n_u u_\nu B_{ul}$$

Q 25.

$$\frac{dn_l}{dt} = \left(\frac{dn}{dt}\right)$$

Q 26. Dans ce cas, on remplace u_ν par $\int_0^\infty u_\nu \Phi(\nu) d\nu$; soit :

$$\begin{aligned} \frac{dn_l}{dt} &= -n_l B_{lu} \int_0^\infty u_\nu \Phi(\nu) d\nu + n_u A_{ul} + n_u B_{ul} \int_0^\infty u_\nu \Phi(\nu) d\nu \\ (-n_l B_{lu} + n_u B_{ul}) \int_0^\infty u_\nu \Phi(\nu) d\nu &= \frac{dn_l}{dt} - n_u A_{ul} \\ &= \left(\frac{dn_l}{dt} - n_u A_{ul}\right) \int_0^\infty \Phi(\nu) d\nu \quad ; \quad \left(\int_0^\infty \Phi(\nu) d\nu = 1\right) \\ \int_0^\infty \Phi(\nu) \frac{dn_l}{dt} d\nu &= \int_0^\infty (-n_l u_\nu B_{lu} \Phi(\nu) + n_u A_{ul} \Phi(\nu) + n_u u_\nu B_{ul} \Phi(\nu)) d\nu \end{aligned}$$

$$\text{Soit :} \quad \frac{dn_\nu}{dt} = -n_l u_\nu B_{lu} \Phi(\nu) + n_u A_{ul} \Phi(\nu) + n_u u_\nu B_{ul} \Phi(\nu)$$

$$\text{avec} \quad \frac{dn_\nu}{dt} = \Phi(\nu) \frac{dn_l}{dt} \quad \text{ou} \quad \int_0^\infty \frac{dn_\nu}{dt} d\nu = \frac{dn_l}{dt}$$

Q 27. A l'équilibre thermique : $\frac{dn_\nu}{dt} = 0$, soit :

$$-n_l u_\nu B_{lu} + n_u A_{ul} + n_u u_\nu B_{ul} = 0 \Rightarrow u_\nu = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}}$$

Q 28. La densité spectrale de l'énergie :

$$u_\nu(\nu_o) = \frac{8\pi h \nu_o^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_o}{kT}\right) - 1} \quad \text{avec} \quad u_\nu(\nu_o) = \frac{A_{ul}}{B_{ul}} \frac{1}{\frac{n_l}{n_u} \frac{B_{lu}}{B_{ul}} - 1}$$

Par identification des deux expressions de la densité spectrale de l'énergie :

$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi h \nu_o^3}{c^3} \quad \text{et} \quad \exp\left(\frac{h\nu_o}{kT}\right) = \frac{n_l}{n_u} \frac{B_{lu}}{B_{ul}} \quad \text{ou} \quad \frac{n_u}{n_l} = \frac{B_{lu}}{B_{ul}} \exp\left(-\frac{h\nu_o}{kT}\right)$$

d'où :

$$g_u B_{ul} = g_l B_{lu} \quad \text{et} \quad B_{ul} = \frac{c^3}{8\pi h \nu_o^3} A_{ul}$$

II.B- Intensité spécifique de la raie HI émise par un nuage d'hydrogène atomique

Q 29. Vecteur de Poynting :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_o}$$

Q 30. On considère, par exemple, une onde plane progressive qui se propage suivant l'axe des x . La structure de l'onde est :

$$\vec{E} = \vec{E}_o \cos(\omega t - kx) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_o \cos(\omega t - kx) \quad \text{avec} \quad E_o = c B_o$$

◦ La densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique :

$$u = \left\langle \frac{\varepsilon_o \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_o} \right\rangle_t = \frac{\varepsilon_o E_o^2}{2}$$

◦ Le vecteur de Poynting :

$$\vec{R} = E_o B_o \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x \Rightarrow \langle \vec{R} \rangle_t = \frac{E_o^2}{2\mu_o c} \vec{u}_x$$

◦ La puissance surfacique moyenne ou intensité :

$$I = \frac{dP}{dS} = \left\| \langle \vec{R} \rangle_t \right\| = \frac{\varepsilon_o E_o^2}{2} \frac{1}{\mu_o \varepsilon_o c} = \frac{\varepsilon_o E_o^2}{2} c = uc$$

Q 31. Relation entre u_ν , ν et n_ν :

$$u_\nu = n_\nu h \nu$$

Q 32.

$$\begin{aligned}
\frac{dI_\nu}{dz} &= \frac{c}{4\pi} \frac{du_\nu}{dz} = \frac{h\nu}{4\pi} \frac{dn_\nu}{dt} \quad ; \quad u_\nu = n_\nu h\nu \\
&= \frac{h\nu}{4\pi} [n_u A_{ul} \Phi(\nu) - n_l u_\nu B_{lu} \Phi(\nu) + n_u u_\nu B_{ul} \Phi(\nu)] \\
&= \frac{h\nu}{4\pi} n_u A_{ul} \Phi(\nu) + \frac{h\nu}{4\pi} [-n_l u_\nu B_{lu} \Phi(\nu) + n_u u_\nu B_{ul} \Phi(\nu)] \\
&= \frac{h\nu}{4\pi} n_u A_{ul} \Phi(\nu) + \frac{h\nu}{4\pi} u_\nu \Phi(\nu) [-n_l B_{lu} + n_u B_{ul}] \\
&= \frac{h\nu}{4\pi} n_u A_{ul} \Phi(\nu) + \frac{h\nu}{4\pi} u_\nu \Phi(\nu) n_l \left[-B_{lu} + \frac{n_u}{n_l} B_{ul} \right] \quad ; \quad \frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_o}{kT}\right) \\
&= \frac{h\nu}{4\pi} n_u A_{ul} \Phi(\nu) + \frac{h\nu}{4\pi} u_\nu \Phi(\nu) n_l \left[-B_{lu} + B_{ul} \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_o}{kT}\right) \right] \\
&= \frac{h\nu}{4\pi} n_u A_{ul} \Phi(\nu) + \frac{h\nu}{4\pi} u_\nu \Phi(\nu) n_l B_{ul} \left[-\frac{B_{lu}}{B_{ul}} + \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_o}{kT}\right) \right] \quad ; \quad g_u B_{ul} = g_l B_{lu} \\
&= \frac{h\nu}{4\pi} n_u A_{ul} \Phi(\nu) + \frac{h\nu}{4\pi} u_\nu \Phi(\nu) n_l B_{ul} \left[-\frac{g_u}{g_l} + \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_o}{kT}\right) \right] \\
&= \frac{h\nu}{4\pi} n_u A_{ul} \Phi(\nu) + \frac{h\nu}{4\pi} u_\nu \Phi(\nu) n_l B_{ul} \frac{g_u}{g_l} \left[-1 + \exp\left(-\frac{h\nu_o}{kT}\right) \right] \quad ; \quad B_{ul} = \frac{c^3}{8\pi h\nu_o^3} A_{ul} \\
&= \frac{h\nu}{4\pi} n_u A_{ul} \Phi(\nu) - \frac{h\nu I_\nu}{c} \Phi(\nu) n_l A_{ul} \frac{c^3}{8\pi h\nu_o^3} \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_o}{kT}\right) \right] \\
&= j_\nu - \kappa_\nu I_\nu
\end{aligned}$$

Donc :
$$dI_\nu = j_\nu dz - \kappa_\nu I_\nu dz \quad \text{avec} \quad \begin{cases} j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} n_u \Phi(\nu) \\ \kappa_\nu = \frac{c^2 \nu}{8\pi \nu_o^3} \Phi(\nu) A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu_o}{kT}\right) \right) \end{cases}$$

Q 33. L'équation différentielle précédente s'écrit :

$$\frac{dI_\nu}{dz} + \kappa_\nu I_\nu = j_\nu$$

Solution :

$$I_\nu(z) = K \exp(-\kappa_\nu z) + \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} (1 - \exp(-\kappa_\nu z)) \quad \text{car} \quad I_\nu(z=0) = 0$$

A la sortie du nuage :

$$I_\nu(z=L) = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} (1 - \exp(-\kappa_\nu L))$$

Q 34.

Pour les nuages d'hydrogène
du milieu interstellaire :

$$\begin{cases} \frac{g_u}{g_l} \simeq 3 \\ n_l = \frac{n_H}{4} \\ \frac{h\nu_o}{kT} \ll 1 \end{cases} \quad \text{Cf. plus haut !}$$

Soit :

$$\kappa_\nu = \frac{c^2 \nu}{8\pi \nu_o^3} \Phi(\nu) A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu_o}{kT}\right) \right) \simeq \frac{c^2 \nu}{8\pi \nu_o^3} \Phi(\nu) A_{ul} \frac{n_H}{4} 3 \frac{h\nu_o}{kT} = \frac{3c^2 h\nu}{32\pi kT \nu_o^2} \Phi(\nu) A_{ul} n_H$$

Q 35.

$$\kappa_\nu L \simeq 3,6 \times 10^{-2} \ll 1 \Rightarrow 1 - \exp(-\kappa_\nu L) \simeq \kappa_\nu L$$

donc :

$$I_\nu(z = L) \simeq j_\nu L$$

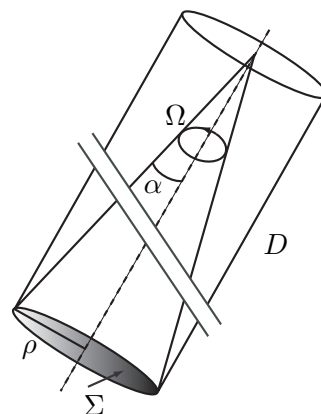
Q 36. La valeur de l'intensité est indépendante de z : par conséquent on la retrouve au niveau du détecteur situé sur terre.

Q 37.

$$\begin{aligned} I_\nu(z = L) \simeq j_\nu L &= \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} \Phi(\nu) n_u L \\ &= \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} \Phi(\nu) \frac{3}{4} n_H L \\ &= \frac{3h\nu}{16\pi} A_{ul} \Phi(\nu) N(H) \end{aligned}$$

Q 38.

$$\begin{aligned} F_\nu &= \int I_\nu d\Omega = \frac{3h\nu}{16\pi} A_{ul} \Phi(\nu) \int N(H) d\Omega \\ &= \frac{3h\nu}{16\pi} A_{ul} \Phi(\nu) N(H) \Omega \\ &= \frac{3h\nu}{16\pi} A_{ul} \Phi(\nu) N(H) \pi \alpha^2 \\ \alpha = \frac{\rho}{D} \Rightarrow F_\nu &= \frac{3h\nu}{16\pi D^2} A_{ul} \Phi(\nu) N(H) \underbrace{\pi \rho^2}_{\substack{\Sigma = \text{unité} \\ N_H}} ; \alpha \ll 1 \\ &= \frac{3h\nu}{16\pi D^2} A_{ul} \Phi(\nu) N_H \end{aligned}$$



Q 39.

$$\int_0^\infty F_\nu d\nu = \int_0^\infty \frac{3h\nu}{16\pi D^2} A_{ul} \Phi(\nu) N_H d\nu = \frac{3h}{16\pi D^2} A_{ul} N_H \int_0^\infty \nu \Phi(\nu) d\nu = \frac{3h\nu_o}{16\pi D^2} A_{ul} N_H$$

II.C- Quelles informations nous apporte la raie HI émise par une galaxie ?

Q 40. On peut adopter l'une ou l'autre de ces échelles car $V_{||}$ est une fonction linéaire de la fréquence ν (Cf. Annexe de l'épreuve).

$$\left| \frac{\Delta V_{||}}{\Delta \nu} \right| = \frac{c}{\nu_o} = \lambda_o \quad (\text{est une constante})$$

Q 41. La loi de Hubble :

$$V_o = H_o D \Rightarrow D = \frac{V_o}{H_o}$$

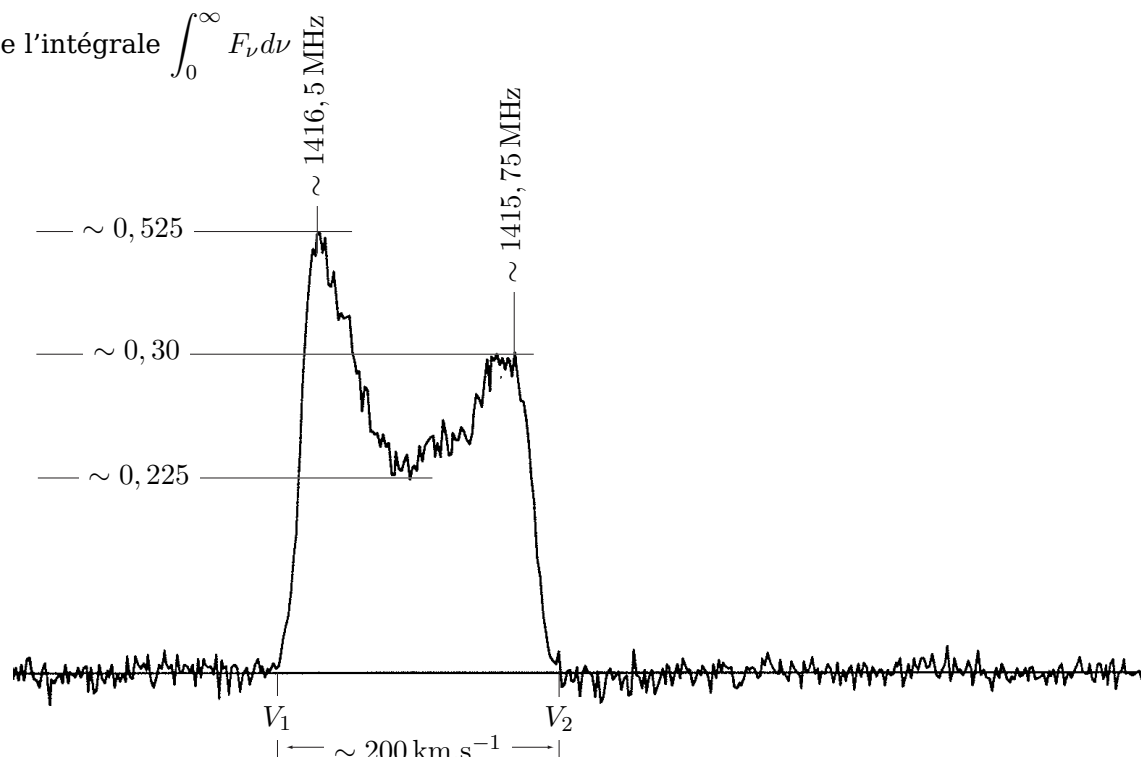
- ◇ La fréquence du rayonnement émis est ν_o et la fréquence du rayonnement perçu est ν
- ◇ Les deux fréquences sont reliée par la relation (Cf. Annexe de l'épreuve) :

$$\nu \simeq \nu_o \left(1 - \frac{V_o}{c} \right) \Rightarrow V_o = c \left(1 - \frac{\nu}{\nu_o} \right)$$

Soit :

$$D = \frac{c}{H_o} \left(1 - \frac{\nu}{\nu_o} \right) \simeq 11,78 \text{ Mpc}$$

◇ Valeur de l'intégrale $\int_0^\infty F_\nu d\nu$



$$\int_0^\infty F_\nu d\nu \simeq \frac{1}{3} (0,525 + 0,225 + 0,30) \times (1416,5 - 1415,75) \simeq 2,63 \times 10^{-1} \text{ Jy.MHz}$$

Q 42. L'aspect ou la structure de bicoque du spectre HI peut être dû au fait qu'au :

- centre la vitesse $V_{\parallel}$ est minimale (donc fréquence maximale),
- bords la vitesse $V_{\parallel}$ est maximale (donc fréquence minimale), avec une forte densité de l'hydrogène par force centrifuge.

Q 43. La masse d'hydrogène atomique dans la galaxie UGC 11707 :

- Le nombre d'atomes d'hydrogène présents dans le nuage :

$$N_H = \frac{16\pi D^2}{3h\nu_o A_{ul}} \int_0^\infty F_\nu d\nu \simeq 2,28 \times 10^{47} (\text{Mpc})^2 \cdot \text{J}_y \cdot \text{J}^{-1} \simeq 21,77 \times 10^{65}$$

- La masse d'hydrogène atomique :

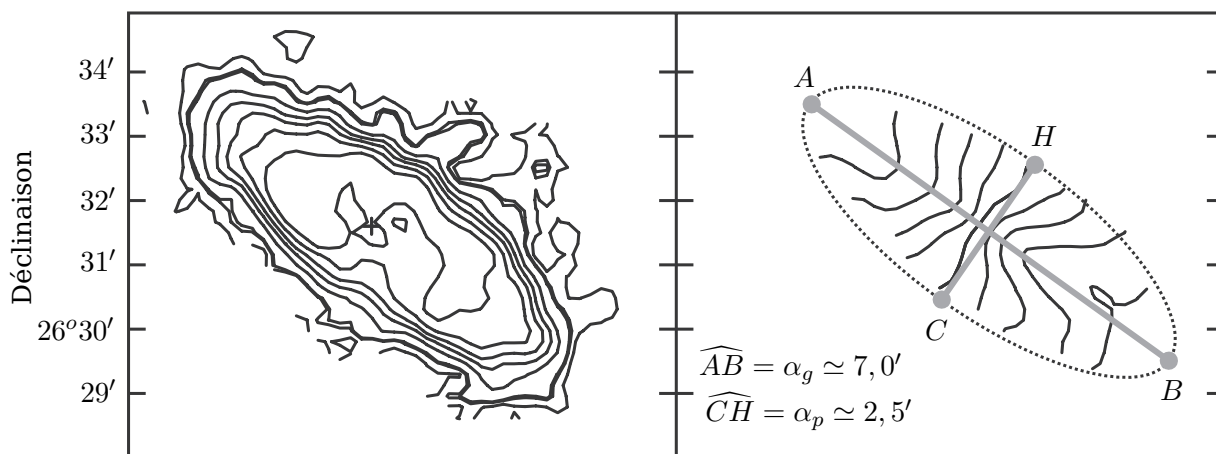
$$m_H = M_H \frac{N_H}{\mathcal{N}_a} \simeq 3,62 \times 10^{39} \text{ kg} \quad \text{sachant que :} \quad \begin{cases} M_H = 1,00 \text{ g.mol}^{-1} \\ \mathcal{N}_a = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \end{cases}$$

- Comparaison avec la masse du soleil :

$$\frac{m_H}{M_\odot} \simeq \frac{3,62 \times 10^{39}}{2,0 \times 10^{30}} = 1,81 \times 10^9 !!$$

$$m_H \simeq 1,81 \times 10^9 \times M_\odot$$

Q 44.



◦ L'angle d'inclinaison :

$$\cos \alpha = \frac{\alpha_p}{\alpha_g} = \frac{2,5}{7} \simeq 0,36 \quad (\text{Rapport des diamètres angulaires !})$$

◦ La vitesse tangentielle :

$$V_{\parallel} \simeq \frac{\Delta V}{2} = \frac{V_2 - V_1}{2} \simeq \frac{200}{2} \simeq 100 \text{ km.s}^{-1}$$

◦ La vitesse totale :

$$V = \frac{V_{\parallel}}{\sin \alpha} = \frac{V_{\parallel}}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \simeq 1,07 \times 10^2 \text{ km.s}^{-1}$$

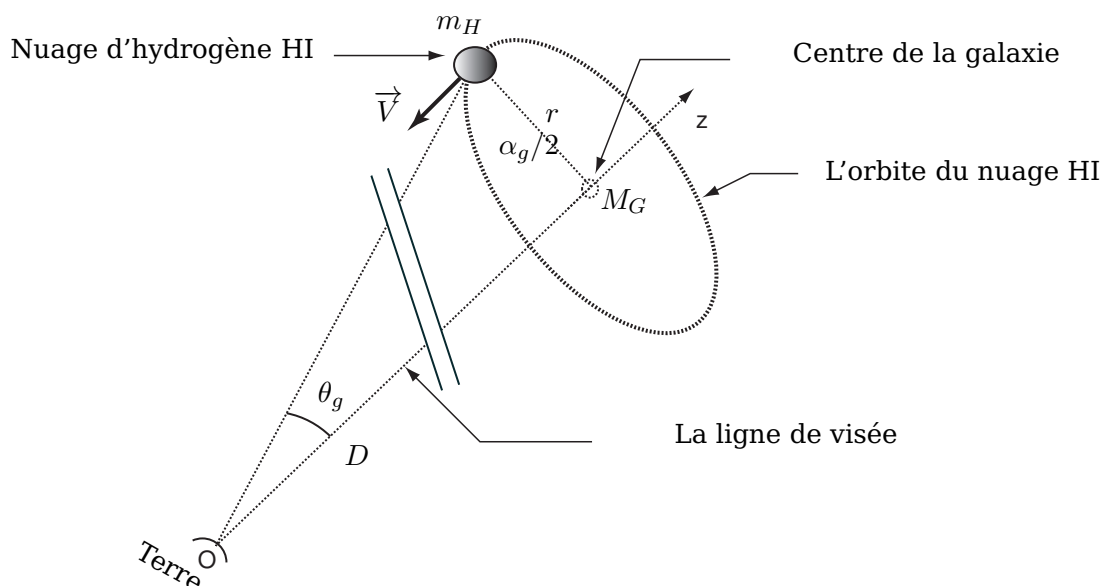
Q 45. La RFD appliquée à un nuage HI, de masse m_H , dans le référentiel lié à la galaxie (de masse M_G) :

$$m_H \left[-\frac{V^2}{r} \frac{\vec{r}}{r} + \frac{dV}{dt} \frac{\vec{V}}{V} \right] = -\frac{GM_G m_H}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Soit :

$$\frac{m_H V^2}{r} = \frac{GM_G m_H}{r^2} \Rightarrow M_G = \frac{V^2 r}{G}$$

L'orbite d'un nuage HI étant supposée circulaire de rayon r .



$$\tan \theta_g \simeq \frac{r}{D} \simeq \frac{\alpha_g}{2} \quad \Rightarrow \quad r \simeq \frac{\alpha_g}{2} D$$

Soit :

$$M_G = \frac{V^2 \alpha_g D}{2G}$$

Applications numériques :

$$\alpha_g \simeq 7,0' \simeq 0,002 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad M_G \simeq 2,02 \times 10^{40} \text{ kg}$$

Comparaison entre m_H et M_G :

$$\frac{m_H}{M_G} \simeq \frac{3,62 \times 10^{39}}{2,02 \times 10^{40}} \simeq 1,79 \times 10^{-1} < 1 \quad \Rightarrow \quad m_H < M_G$$

La masse M_G n'est en réalité que celle à l'intérieur du rayon échantillonné par HI détecté !

Mohamed Afekir (cpgeafek@yahoo.fr)

Mes remerciements à Mr :

Thami Elhalkouj : Lydex Ben Guerir

et à Mr

Azouhri Elhossaine : CPGE Med V Casa
pour la lecture du corrigé