

CORRECTION PHYSIQUE-CHIMIE 1 CENTRALE 2018

Correction proposée par :

EL FILALI SAID

LYDEX/BENGUERIR

I Analyse expérimentale des vibrations du verre

I.A- Analyse quantitative de l'enregistrement

Q.1 Signification de la présence de modes propres dans le signal enregistré :

Le signal étant périodique non sinusoïdal donc riche en harmonique.

Nomenclature :

- Premier pic : le fondamental.
- Les autres pics : Harmonique d'ordre n

Q.2 La fréquence du signal enregistré (Le fondamental) :

$$f = f_1 \approx 545 \text{ Hz}$$

Q.3 La vitesse de propagation : On estime la vitesse de propagation à partir du retard $\Delta t = 0,75 \text{ s}$ entre les deux faces opposées du verre (séparées par le diamètre d)

$$v = \frac{d}{\Delta t} \xrightarrow{\text{A.N}} v = 0,16 \text{ m s}^{-1}$$

Q.4 Les fréquences des différents modes propres :

Fondamental	$f_1 \approx 545 \text{ Hz}$
Harmonique d'ordre 2	$f_2 \approx 1090 \text{ Hz}$
Harmonique d'ordre 3	$f_3 \approx 1640 \text{ Hz}$
Harmonique d'ordre 4	$f_4 \approx 2180 \text{ Hz}$

► La relation

$$f_n = n f = n f_1$$

Q.5 Caractéristique de la courbe de réponse du microphone :

- La linéarité
- Le gain est compatible avec le gain d'un filtre passe haut pour des fréquences inférieures à 10 kHz.
- Le gain est constant dans la gamme des fréquences audibles.

Q.6 Autres informations :

- L'amplitude des harmoniques diminue lorsque l'ordre augmente.
- L'amplitude des harmoniques tend vers 0.
- Le spectre renferme toutes les fréquences.
- Le spectre de fréquence n'est pas modifié lorsque le temps augmente.

I.B - Estimation du facteur de qualité Q

Q.7 L'équation différentielle :

La R.F.D dans le référentiel galiléen donne : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$

La projection suivant l'axe Ox horizontal donne (avec $\dot{x} = v$)

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \implies \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On pose :

► $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

► $\frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_o}{Q} \implies Q = \frac{1}{\alpha} \sqrt{km}$

On obtient la relation donnée :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

Q.8 Signification physique de :

► ω_o : la pulsation propre de l'oscillateur exprimée en rad s^{-1} .

► Q : Le facteur de qualité sans unité.

Q.9 L'expression approchée de la solution :

Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle est : $r^2 + \frac{\omega_o}{Q}r + \omega_o^2 = 0$

Le discriminant : $\Delta = \left(\frac{\omega_o}{Q}\right)^2 - 4\omega_o^2 \implies \Delta = \omega_o^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$

L'amortissement étant faible donc α faible et Q grand et par conséquent $\Delta < 0$

Les solutions du polynôme sont

$$r_{1/2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_o}{Q} \pm j2\omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right)$$

Il en résulte que :

$$x(t) = e^{-\frac{\omega_o}{2Q}t} [A \cos \Omega t + B \sin \Omega t]$$

Avec $\Omega = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$: La pseudo pulsation.

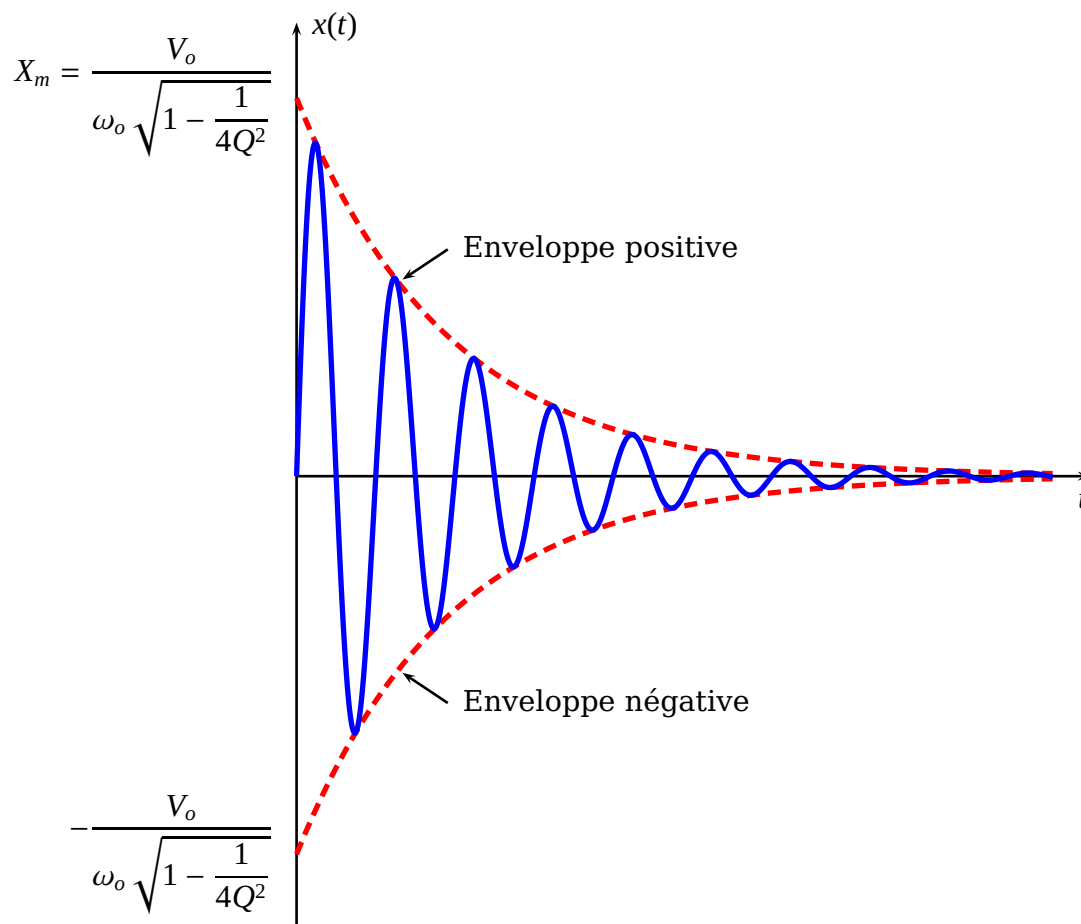
Les conditions initiales :

► $x(t=0) = 0 \implies A = 0$

► $\dot{x}(t=0) = V_o \implies B = \frac{V_o}{\Omega}$ D'où :

$$x(t) = \frac{V_o}{\omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} e^{-\frac{\omega_o}{2Q}t} \sin\left[\left(\omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right)t\right]$$

L'allure de $x(t)$



Q.10 ≥ Puisque l'amplitude décroît exponentiellement alors la modélisation par un frottement fluide.

Q.11 ≥ Ordre de grandeur du facteur de qualité Q :

- Pour le premier maximum on a :

$$X_1 = x(t = 1s) = X_m \exp\left(-\frac{\omega_o}{2Q} t_1\right) = 4$$

- Pour le deuxième maximum on a :

$$X_2 = x(t = 2s) = X_m \exp\left(-\frac{\omega_o}{2Q} t_2\right) = 2,1$$

$$\text{Donc : } \frac{X_2}{X_1} = \exp\left(\frac{\omega_o}{2Q}(t_2 - t_1)\right) \Rightarrow \ln \frac{4}{3} = \frac{\pi f_o}{Q}$$

$$Q = \frac{\pi f_o}{\ln \frac{4}{3}} \xrightarrow{\text{A.N}} Q = 2656$$

Q.12 ≥ Le temps nécessaire pour mettre le système en régime sinusoïdal forcé est supérieur à $\Delta t = 5\tau$ avec $\tau = 1/\alpha = \frac{2Q}{\omega_o}$.

$$\Delta t = \frac{5\pi f_o}{Q} \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta t \simeq 3,22 \text{ s}$$

II Étude de la résonance en amplitude du verre en régime sinusoïdal forcé

II.A- Approche théorique

Q.13 Nomenclature :

- $\underline{X}$: Amplitude complexe.
- $|\underline{X}| = X$: Amplitude réelle de la fonction $x(t)$.
- $\arg(\underline{X}) = \varphi$: Phase à l'origine de $x(t)$

Q.14 L'expression du module :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{x} + \omega_o^2 x = A_o \cos(\omega t + \Phi) \Rightarrow \underline{X}(-\omega^2 + j\omega\frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2) = A_o e^{j\Phi}$$

Donc

$$\underline{X} = \frac{A_o e^{j\Phi}}{\omega_o^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_o}{Q}}$$

Il en résulte que

$$X = |\underline{X}| = \frac{A_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_o}{Q}\right)^2}}$$

Q.15 Numéro de graphe :

Puisque : $\lim_{\omega \rightarrow 0} X = \frac{A_o}{\omega_o^2} \neq 0$ $\lim_{\omega \rightarrow \infty} X = 0$ alors

Seul le graphe 2 qui est compatible

Q.16 On a une résonance d'amplitude si :

$$\frac{dX}{d\omega} = 0 \Rightarrow 4\omega(\omega_o^2 - \omega^2 - \frac{\omega_o^2}{2Q^2}) = 0$$

► $\omega = 0$ solution non acceptable physiquement puisque la force excitatrice se réduit à une force constante (non sinusoïdale)

► $\omega^2 = \omega_o^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$

► Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ pas de résonance .

► Si $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ résonance en $\omega = 0$ non physique .

► Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = Q_o$ alors $\omega = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \omega_r$.

Q.17 La pulsation de résonance est

$$\omega_r = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Q.18 Pour $Q \gg Q_0$ alors

$$\omega_r = \omega_0$$

Q.19 L'expression de $X_r = X(\omega_r)$

$$X_r = \frac{A_0 Q}{\omega_0}$$

Q.20 Les pulsations de coupures sont solution de

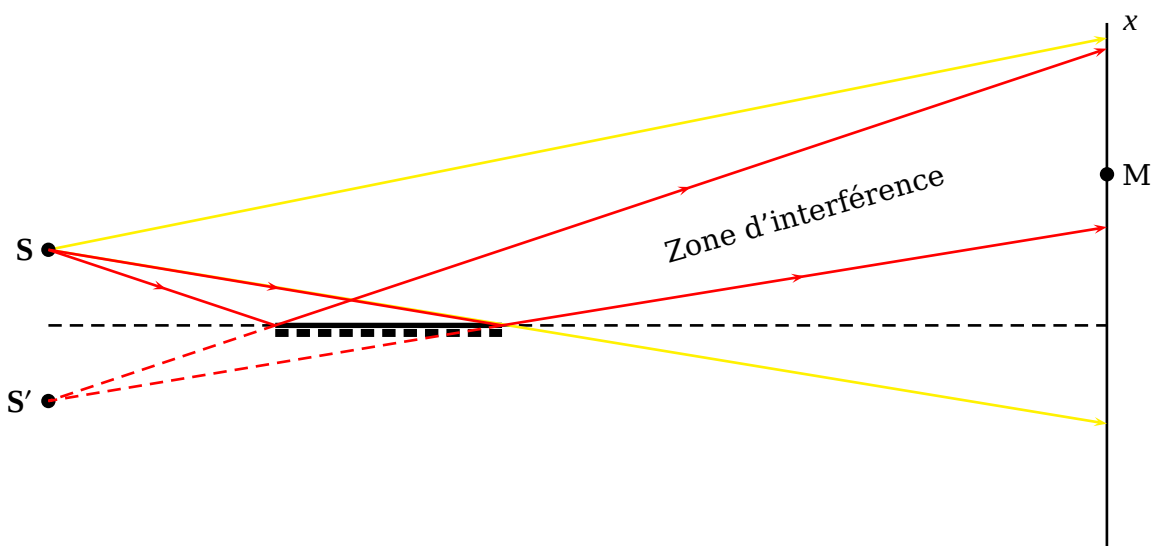
$$X(\omega_c) = \frac{X_r}{\sqrt{2}}$$

La relation

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

II.B - Tracé expérimental

Q.21 La figure d'interférence :



Q.22 La différence de marche :

$$\delta_g = \frac{2\Delta x}{d + \ell} + \frac{\lambda}{2}$$

Q.23 L'expression de l'interfrange i :

On rappelle que : $\Delta x = i$ et $\Delta \delta_g = \lambda$ et comme

$$\delta_g = \frac{2\Delta x}{d + \ell} + \frac{\lambda}{2} \implies i = \frac{\lambda(d + \ell)}{2\Delta}$$

Q.24 Il suffit de remplacer δ par $\Delta - x(t)$ dans l'expression de l'interfrange ce qui donne :

$$i = \frac{\lambda(d + \ell)}{2(\Delta - x(t))}$$

Q.25 L'expression de l'amplitude X :
Sachant que : $-X \leq x(t) \leq X$ alors :

$$i_{\min} = \frac{\lambda(d + \ell)}{2(\Delta + X)} \quad (1)$$

Ainsi :

$$i_{\max} = \frac{\lambda(d + \ell)}{2(\Delta - X)} \quad (2)$$

D'après les relations (1) et (2) on tire :

$$X = \frac{\lambda(d + \ell)}{4} \left[\frac{1}{i_{\min}} - \frac{1}{i_{\max}} \right]$$

Q.26 Puisque le mouvement est très rapide ($f_o = 545 \text{ Hz} \Rightarrow T_o = 1,8 \text{ ms}$) ; l'œil ne peut pas suivre l'évolution de l'interfrange.

Q.27 Immobilité de l'image impose $T = kT_i$ (3) avec $k \in \mathbb{N}^*$
Pendant la période T_i (du stroboscope) on a défilement de k franges :

$$T = kT_i \Rightarrow f_i = k \frac{\omega}{2\pi} \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

Q.28 L'immobilité apparente de la figure d'interférences implique l'immobilité apparente du verre, mais comme le mouvement de verre $x = (f, \Phi)$ alors pour fixer la valeur de x (c'est à dire la valeur de l'interfrange) sur une valeur bien déterminée il faut fixer la valeur de Φ .

Q.29 Application numérique :
On a :

$$i_{\min} = \frac{a}{8} \xrightarrow{\text{A.N}} i_{\min} = 12,5 \text{ } \mu\text{m}$$

Ainsi :

$$i_{\max} = \frac{a}{3,5} \xrightarrow{\text{A.N}} i_{\max} = 28,6 \text{ } \mu\text{m}$$

Et par conséquent

$$X = \frac{\lambda(d + \ell)}{4} \left[\frac{1}{i_{\min}} - \frac{1}{i_{\max}} \right] \xrightarrow{\text{A.N}} X_r = 3,56 \text{ mm}$$

Q.30

- La fréquence de résonance :

$$f_r = 539,6 \text{ Hz}$$

- Les fréquences de coupure (les fréquences correspondent au maximum divisé par $\sqrt{2}$) :

$$f_{c1} = 539,5 \text{ Hz} \quad f_{c2} = 539,7 \text{ Hz}$$

- Le facteur de qualité :

$$Q = \frac{f_r}{f_{c2} - f_{c1}} \xrightarrow{\text{A.N}} Q = 2698$$

Comparaison

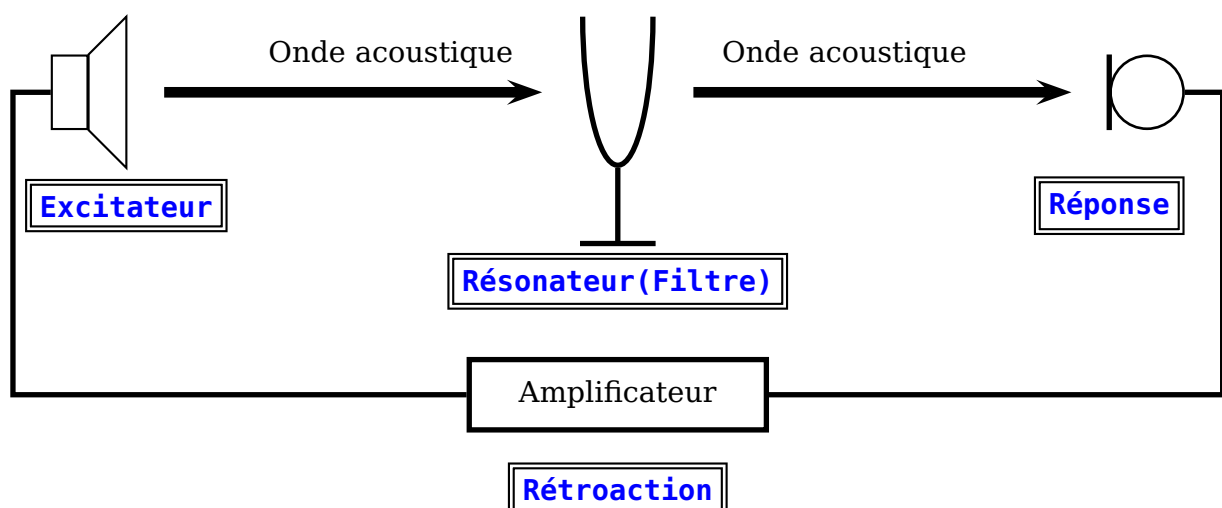
Les deux méthodes donnent presque les mêmes résultats

Q.31 Le générateur disponible n'est pas efficace puisque sa précision 0,5 % très grande (on cherche des fréquences à 0,1 Hz près)

III Mise en résonance du verre par rétroaction : Effet Larsen

III.A- Première analyse de l'effet Larsen

- Q.32** Le rôle de chaque élément et le principe de fonctionnement du montage :



- Q.33** l'onde acoustique est harmonique :

$$s(x, t) = S_o \cos\left[2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \quad \text{avec } x \leq d$$

Q.34 Transmission infiniment rapide donc

$$s(t, x = 0) = s(t, x = d) \implies S_o \cos 2\pi f t = S_o \cos(2\pi f t - 2\pi f \frac{d}{c})$$

Relation valable à chaque instant ce qui donne :

$$2\pi f \frac{d}{c} = 2\pi n \implies d = n \frac{c}{f_n} = n\lambda_n \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Q.35 Comme $d = n\lambda_n \implies d = \frac{nc}{f_n}$.

Il en résulte que :

$$f_n = \frac{nc}{d} \implies K = nc$$

Q.36 On a :

- ▶ $f_1 \simeq 2725$ Hz : la fréquence inférieure.
- ▶ $f_2 \simeq 3250$ Hz : la fréquence supérieure.

Non les caractéristiques du microphone ne jouent pas puisque $\lambda = \frac{c}{f}$ et $d = n\lambda$

Si $f = cte$ alors $\lambda = cte$ donc n change de valeur et par conséquent les points passent vers l'autre hyperbole puisque $f = \frac{nc}{d}$

III.B - Le microphone électrostatique

III.B-.1 Capacité du condensateur au repos

Q.37 La laque P_1 se comporte comme un plan infini ; donc

- ▶ tout plan contenant l'axe Ox est un plan de symétrie :

$$\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_x$$

- ▶ Invariance par translation suivant les axes (direction infinie) Oy et Oz donc

$$E(M) = E(x)$$

Il en résulte que :

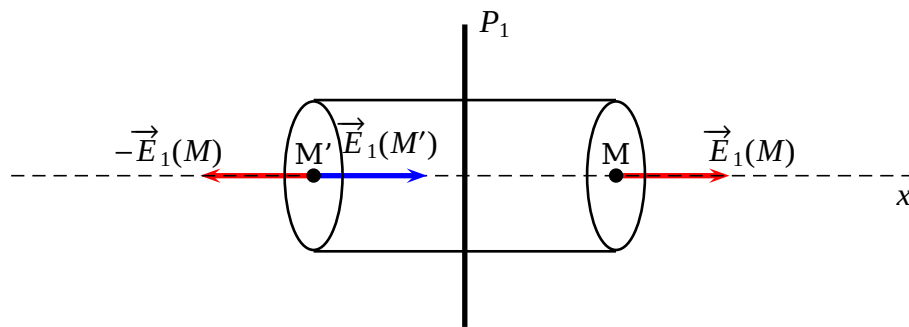
$$\vec{E}(M) = E(x)\vec{e}_x$$

Conclusion : Le champ $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à la plaque $P_1 (\equiv yOz)$

Q.38 Puisque la plaque P_1 est un plan de symétrie pour les points M et M' alors

$$\vec{E}_1(M') = -\vec{E}_1(M)$$

Q.39 Puisque le champ $\vec{E}_1(M)$ ne dépend que de la variable x alors la surface de Gauss est un cylindre d'axe Ox et les surfaces de bases passent par les points M et M' ;



D'après le théorème de Gauss :

- ▶ Le flux total : $\Phi = \oint \vec{E}(M) d\vec{S} = 2E(x)S$
- ▶ La charge intérieure : $Q_{int} = \sigma S$

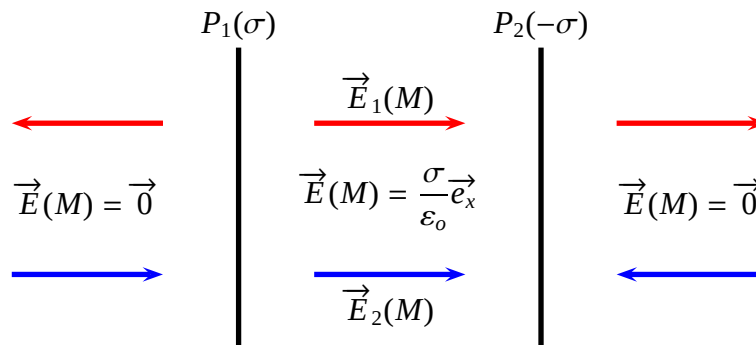
conclusion

$$\vec{E}(M) = \text{signe}(x) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$$

Avec

$$\text{signe}(x) = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Q.40 le champ résultant entre les deux plaques :



Q.41 la capacité du condensateur au repos :

Soit $u_c = V_{P_1} - V_{P_2} = \frac{q}{C_0}$

On rappelle qu'en régime stationnaire $\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V(M) \Rightarrow du_c = -Edx$ par intégration on obtient

$$u_c = V_{P_1} - V_{P_2} = \frac{q}{C_0} = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} \Rightarrow C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

III.B-.2 Réponse du circuit électrique en régime permanent sinusoïdal

Q.42 L'expression de la capacité C_1 :

On a pour la :

- ▶ distance :

$$e \Rightarrow C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

► distance

$$e - x_1 \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 S}{e - x_1}$$

Qu'on peut écrire : $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \left(1 - \frac{x_1}{e}\right)^{-1}$

Avec un DL au voisinage de 0 (puisque $\frac{x_1}{e} \ll 1$) on obtient

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \left(1 + \frac{x_1}{e}\right) \Rightarrow C = C_0 + \frac{C_0 X_1}{e} \cos \omega t$$

Il en résulte que

$$C_1 = \frac{C_0 X_1}{e}$$

Q.43 Montrons l'équation différentielle :

d'après la loi des mailles : $U_o = u_c(t) + u(t)$ (E)

Ainsi

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow i = \frac{dC}{dt} u_c + C \frac{du_c}{dt}$$

D'après l'équation (E) : $\frac{du_c}{dt} = -\frac{du}{dt}$

Il en résulte que

$$u_c = \frac{1}{\frac{dC}{dt}} \left(i - C \frac{du}{dt}\right)$$

Comme $i = \frac{u}{R}$ alors :

$$u_c = \frac{1}{\frac{dC}{dt}} \left(\frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}\right)$$

D'après (E) :

$$U_o - u_c - u = 0 \Rightarrow U_o - u - \frac{1}{\frac{dC}{dt}} \left(\frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}\right) = 0$$

Qu'on peut écrire :

$$\frac{dC}{dt} U_o = u \frac{dC}{dt} + \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} \quad (EE)$$

Q.44 Sachant que $C = C_0 + C_1 \cos \omega t \Rightarrow \frac{dC}{dt} = C_1 \omega \sin \omega t = C_1 \omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

Alors :

$$(EE) \Rightarrow (C_0 + C_1) \frac{du}{dt} + u \left[\frac{1}{R} + C_1 \omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{X_1 C_0 U_o \omega}{e} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Hypothèses simplificatrices :

- $C_1 \ll C_0$
- $RC_1 \omega \ll 1$

Il en résulte que :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC_0} u = \frac{X_1 U_o \omega}{e} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \omega_o = \frac{1}{RC_0} \quad \text{et} \quad A = \frac{X_1 U_o}{e}$$

Q.45 Détermination de l'amplitude U de la tension $u(t)$:

En notation complexe on a :

$$\underline{U}j\omega + \omega_o \underline{U} = \omega A e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \underline{U} = \frac{\omega A}{\omega_o + j\omega} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

On a donc

$$U = \frac{\omega A}{\sqrt{\omega_o^2 + \omega^2}} = \frac{\omega U_o X_1}{e \sqrt{\omega_o^2 + \omega^2}}$$

Q.46 On a :

► Pour $\omega \ll \omega_o$ on a : $G_{dB} = 20 \log U = 20 \log \frac{X_1 U_o}{e} + 20 \log \frac{\omega}{\omega_o}$.

En basses fréquences le gain en décibel est une droite de pente + 20 dB/décade.

► En hautes fréquences $\omega \gg \omega_o \Rightarrow G_{dB} = 20 \log U = 20 \log \frac{X_1 U_o}{e} = cte$

Les résultats sont compatibles avec un filtre passe haut du premier ordre pour des fréquences inférieures à 10 kHz ; ce qui est compatible avec le graphe.

Q.47 Ordre de grandeur de C_o :

On a : $\omega_o = 2\pi f_o = \frac{1}{RC_o}$

Avec f_o la fréquence de coupure (la fréquence correspondante au maximum -3dB), graphiquement on trouve

$$f_o = 50 \text{ Hz}$$

Par conséquent

$$C_o = \frac{1}{2\pi R f_o} \xrightarrow{\text{A.N}} C_o \simeq 318 \text{ nF}$$

Q.48 On pose $\omega_r = 2\pi f_r = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}}$ la pulsation de résonance.

Graphiquement

$$f_r \simeq 2 \times 10^4 \text{ Hz}$$

D'où

$$\sqrt{\frac{k_e}{m_e}} \simeq 12,56 \times 10^4 \text{ rad s}^{-1}$$

Q.49 Puisque $f_r = 20 \text{ kHz}$ supérieure à la borne supérieure audible, donc le microphone utilisé ne peut pas être à l'origine de l'effet Larsen.

III.C - Rôle du haut parleur dans la cavité acoustique

Q.50 Filtre passe bande.

Les fréquences de coupure ($U_{max} = 13,4 \text{ V} \Rightarrow \frac{13,4}{\sqrt{2}} = 9,47 \text{ V}$) sont :

$$f_{c1} = 2,3 \text{ kHz} \quad ; \quad f_{c2} = 3,5 \text{ kHz}$$

Q.51 Comme les fréquences du sifflement sont comprise entre f_{c1} et f_{c2} donc le son est amplifié.

Conclusion : Le haut parleur amplifie les sons qui ont une fréquence comprise les fréquences de coupure.

Q.52 La propriété de l'onde lumineuse dans la cavité laser : Onde stationnaire résultat des conditions aux limites.

Q.53 On a : $d = n \frac{c}{f_n} \Rightarrow f_n = n \frac{c}{d}$

$$f_n = n f_1 \Rightarrow f_n = 2278,7 \text{ Hz}$$

Ordre	8	9	10	11	12	13	14
Fréquence(Hz)	2229	2508	2787	3065	3344	3623	3902

Q.54 Les deux fréquences correspondent aux harmoniques 10 et 11.

Q.55 On a : $d = n \frac{c}{f_n}$ lorsque n augmente et comme $d = cte$ alors n passe à la valeur $n + 1$: donc passe à l'hyperbole suivante.