

Autour des centres aquatiques

I Utiliser une source d'énergie gratuite

I.A Étude d'une pompe à chaleur idéale

- Q 1.** L'efficacité est le rapport de la puissance (ou énergie) utile sur la puissance (ou énergie) consommée. Pour le système étudié $W > 0$, $Q_c < 0$ et $Q_f > 0$, ainsi $\eta = -\frac{Q_c}{W}$.
- Q 2.** On applique le premier et le second principe à la pompe à chaleur dans son ensemble, d'où les deux relations $0 = W + Q_f + Q_c$ et $0 = S_e + S_c = \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c}$ car les transformations sont supposées réversibles. Nous en déduisons alors que $W = -Q_f - Q_c$ et que $Q_f = -\frac{T_f}{T_c}Q_c$. Finalement $\eta = \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$.
- Q 3.** $\eta = \frac{273 + 44}{31} = 10,2$.

I.B Étude de la pompe à chaleur du centre aquatique

- Q 4.** Voir cours. Pour montrer $\Delta(h + e_p + e_c) = w + q$.
- Q 5.** $1 \rightarrow 2$: Compression adiabatique réversible donc isentropique dans le compresseur.
 $2 \rightarrow 5$: refroidissement isobare puis condensation dans le condenseur en contact avec la source chaude.
 $5 \rightarrow 6$: détente adiabatique dans le détendeur (sans parties mobiles) donc évolution isenthalpique.
 $6 \rightarrow 1$: évaporation du fluide dans l'évaporateur en contact avec la source froide, donc évolution isobare.
- Q 6.** Cette étape permet d'avoir de la vapeur sèche et donc d'éviter d'endommager le compresseur avec du fluide.
- Q 7.** Cette étape permet de sur-refroidir le fluide et d'augmenter le rendement de la machine.
- Q 8.** On nous donne $\dot{Q}_f$, or $\dot{Q}_f = D_m q_f = D_m(h_1 - h_6)$ par application du premier principe à l'évaporateur. D'après le graphique $h_1 = 405 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $h_6 = 270 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, d'où $D_m = \frac{\dot{Q}_f}{h_1 - h_6} = \frac{60}{135} = 0,44 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Q 9.** Pour déterminer q_c et w , nous appliquons le premier principe au condenseur et au compresseur, d'où $q_c = h_5 - h_2$ et $w = h_2 - h_1$, ainsi $\eta = \frac{h_2 - h_5}{h_2 - h_1} = \frac{435 - 270}{435 - 405} = 5,5$.
- Q 10.** $\eta_r = -\frac{D_m q_c}{P} = 3,9$. Ce rendement prend en compte les pertes mécaniques dans le compresseur mais suppose encore les transformations réversibles dans la PAC...

I.C Dimensionnement simplifié de l'échangeur du collecteur

I.C.1 Détermination de $T(x)$ dans un module

- Q 11.** Nous appliquons le premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement entre x et $x + dx$, ainsi $D_{m_0} \Delta h = p_{th} dx$. Or $\Delta h = c_e(T(x + dx) - T(x))$, d'où $D_{m_0} c_e \frac{dT}{dx} + \alpha T(x) = \alpha T_e$. Finalement nous obtenons l'équation différentielle d'ordre 1
- $$\frac{dT}{dx} + \frac{\alpha}{D_{m_0} c_e} T(x) = \frac{\alpha}{D_{m_0} c_e} T_e.$$
- Q 12.** Les solutions de l'équation différentielle sont donc bien de la forme $T(x) = T_e + A e^{-x/\ell_c}$ avec $\ell_c = \frac{D_{m_0} c_e}{\alpha}$. On détermine A à l'aide de la condition limite $T(x=0) = T_i$, d'où $A = T_i - T_e$.
- Q 13.** ℓ_c est une longueur caractéristique au bout de laquelle l'écart à la température extérieure est environ 3 fois plus faible qu'en $x = 0$. Il faut quelques ℓ_c pour considérer que le fluide est à la même température que l'eau extérieure.

I.C.2 Détermination de la longueur totale L de l'échangeur

- Q 14.** Par application du premier principe à l'eau du circuit 1 dans l'évaporateur, nous avons $D_{m_1} \Delta h = -\dot{Q}_f$ (car l'ensemble de l'évaporateur étant calorifugé, la puissance thermique reçue par un fluide est égale à la puissance thermique cédée par l'autre fluide). Par ailleurs $\Delta h = c_e(T_{S_1} - T_{E_1})$, ainsi $D_{m_1} = \frac{\dot{Q}_f}{c_e(T_{E_1} - T_{S_1})} = 7,2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q 15. L'association étant en parallèle le débit se répartit équitablement dans chaque module, d'où $D_{m_0} = \frac{D_{m_1}}{N_m}$.

Q 16. Nous avons vu que $T(x) = T_e + (T_i - T_e)e^{-x/\ell_c}$, or $T(4L_0) = T_f$, d'où $L_0 = \frac{\ell_c}{4} \ln \left(\frac{T_e - T_i}{T_e - T_f} \right)$.

Par ailleurs $L = N_m L_0$, d'où $L = \frac{N_m \ell_c}{4} \ln \left(\frac{T_e - T_i}{T_e - T_f} \right)$.

Q 17. En utilisant les questions précédentes, nous avons $L = \frac{D_{m_1} \ell_c}{4\alpha} \ln \left(\frac{T_e - T_i}{T_e - T_f} \right) = 102 \text{ m}$, ce qui n'est pas très long...

Q 18. En cas d'avarie sur le dispositif, il est plus simple d'avoir des plus petits modules que l'on peut remplacer qu'un seul très grand.

II Éviter les pertes

Q 19. $R_{th,c} = \frac{e}{\lambda S}$. J'ai un 2 car j'ai l'impression qu'il y a deux couvertures l'une sur l'autre...

Q 20. $R_{th,n} = \frac{1}{hS}$.

Q 21. — Sans protection : perte par convection : $E_{conv} = Pt = \frac{t(T_e - T_a)}{R_{th,n}}$. On nous signale que le bassin est vidé pendant 2 semaines dans l'année, ainsi $t = (52 - 2) \cdot 7 \cdot 24 \cdot 3600$. Et finalement $E_{conv} = 2,3 \times 10^4 \text{ GJ}$. Par ailleurs cette énergie ne représente que 30% des pertes totales, d'où $E_p = \frac{E_{conv}}{0,3} = 7,7 \times 10^4 \text{ GJ}$.

— Avec protection la nuit : Nous avons le même type de perte que précédemment mais uniquement sur la durée d'ouverture. En admettant 52 semaines par an : $t = (52 - 2) \cdot (14 \cdot 5 + 10 \cdot 2) \cdot 3600$ et ainsi $E'_{conv} = 1,2 \times 10^4 \text{ GJ}$, d'où $E'_{jour} = \frac{E'_{conv}}{0,3} = 4,1 \times 10^4 \text{ GJ}$.

Reste à regarder la perte d'énergie lorsque la couverture est en place : $E'_{nuit} = \frac{t(T_a - T_e)}{R_{th,c}}$ (on néglige ici la résistance thermique associée aux transferts convectifs entre l'air et la couverture) avec $t = (50 - 2) \cdot (7 \cdot 24 - 14 \cdot 5 - 10 \cdot 2) \cdot 3600$, d'où $E'_{nuit} = 5,0 \times 10^2 \text{ GJ}$ (Avec la température moyenne minimale puisque c'est la nuit...)

Finalement $E'_p = E'_{jour} + E'_{nuit} \approx 4,1 \times 10^4 \text{ GJ}$.

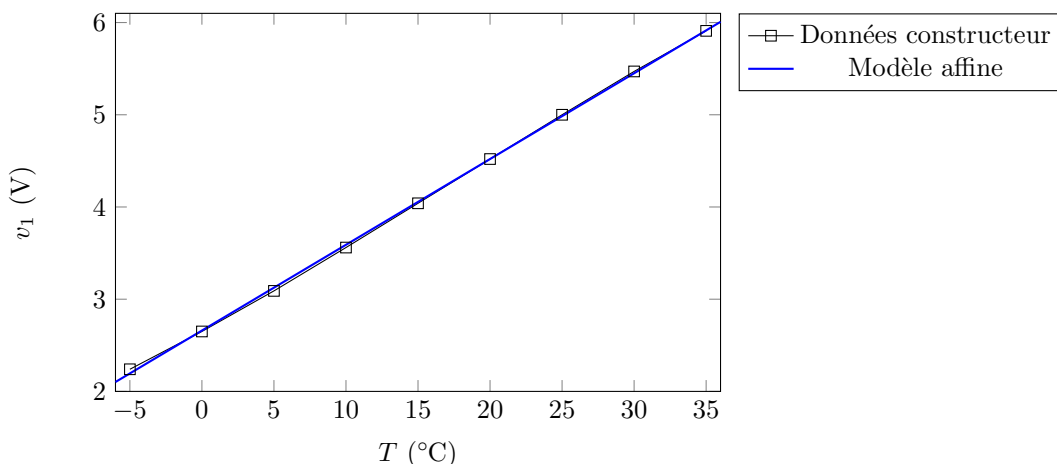
Les économies d'énergie sont donc d'environ 47%, ce qui est supérieur à ce qui est annoncé par le délégataire... Nous avons en effet complètement négligé l'évaporation de l'eau au cours de la nuit. Si l'on estime les pertes dues à l'évaporation de nuit de la même manière que dans le cas sans couverture (et avec la température minimale) nous obtenons une énergie de $1,8 \times 10^4 \text{ GJ}$, ainsi $E''_p = 5,9 \times 10^4 \text{ GJ}$ ce qui correspond à une économie de 23% et donc bien dans l'estimation du document.

III Réguler la température de l'air

III.A Étude d'un capteur de température

Q 22. Par un pont diviseur de tension dans le bloc 1 nous obtenons que $v_1 = \frac{R_0}{R_0 + R(T)} V_0$.

Q 23. La régression linéaire permet d'obtenir $a = 2,66 \text{ V} \pm 3$ et $b = 93,0 \text{ mV} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} \pm 1.6$.



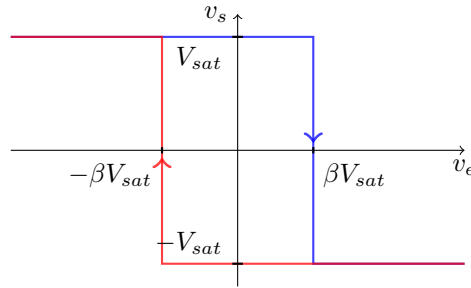
III.B Étude du bloc 2

III.B.1

Q 24. L'ALI est bouclé uniquement sur l'entrée non inverseuse. Il fonctionne donc automatiquement en régime saturé. Nous devons étudier les deux cas de figure :

- Saturation haute : $v_s = +V_{sat}$, ainsi $V_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$. L'ALI reste en saturation haute tant que $V_+ > v_e$. Il y a donc basculement de la saturation haute vers la saturation basse lorsque v_e devient supérieur à βV_{sat} avec $\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$.
- Saturation basse : $v_s = -V_{sat}$, ainsi $V_+ = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$. L'ALI reste en saturation basse tant que $V_+ < v_e$. Il y a donc basculement de la saturation basse vers la saturation haute lorsque v_e devient inférieure à $-\beta V_{sat}$.

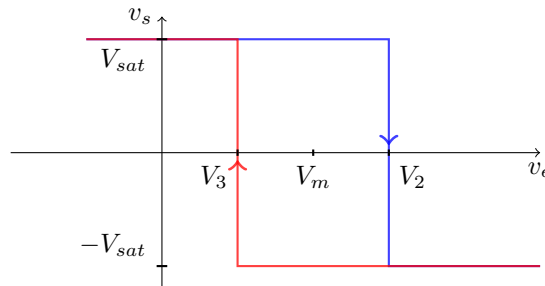
Nous obtenons finalement la caractéristique suivante :



Q 25. Ce montage est un comparateur à hysteresis, qui permet d'allumer ou d'éteindre le chauffage.

III.B.2

Q 26. Dans le cas où $E \neq 0$, V_+ devient $V_+ = (1 - \beta)E \pm \beta V_{sat}$ selon la saturation. Ainsi la tension de basculement de haut vers bas devient $V_2 = (1 - \beta)E + \beta V_{sat}$ et la tension de basculement de bas vers haut devient $V_3 = (1 - \beta)E - \beta V_{sat}$. Le cycle d'hysteresis n'est donc plus centré sur 0, mais sur $V_m = (1 - \beta)V_{sat}$.



Q 27. Voir question précédente.

III.C Étude du dispositif complet

Q 28. Nous avons $v_e = v_1(T)$, et l'écart entre $V_2 - V_m = V_m - V_3$, ainsi si l'on souhaite que le basculement s'effectue de manière symétrique autour d'une valeur de température il est nécessaire que v_1 évolue de manière affine avec la température.

Q 29. On souhaite que $v_1(T_c + \Delta T) = V_2 = (1 - \beta)E(T_c) + \beta V_{sat}$ et que $v_1(T_c) = (1 - \beta)E(T_c)$, ainsi $v_1(T_c + \Delta T) - v_1(T_c) = \beta V_{sat}$, d'où $b\Delta T = \beta V_{sat}$, et enfin $R_2 = R_1 \left(\frac{V_{sat}}{b\Delta T} - 1 \right)$.

Q 30. Lorsque $T_c = 0$, alors $E(T_c) = \alpha_0$ et $v_1(\Delta T) = a + b\Delta T = V_2 = (1 - \beta)\alpha_0 + \beta V_{sat}$. Avec la question précédente on remarque que $\beta = \frac{b\Delta T}{V_{sat}}$, ainsi $\alpha_0 = \frac{aV_{sat}}{V_{sat} - b\Delta T}$.

Q 31. Nous avons $v_1(T_c + \Delta T) = a + b(T_c + \Delta T) = (1 - \beta)E(T_c) + \beta V_{sat}$, or nous venons de voir que $a + b\Delta T = (1 - \beta)\alpha_0 + \beta V_{sat}$, ainsi la première égalité se simplifie et devient $bT_c = (1 - \beta)\alpha T_c$.

$$\text{Finalement } \alpha = \frac{bV_{sat}}{V_{sat} - b\Delta T}.$$

Q 32. $R_2 = 81 \text{ k}\Omega$, $\alpha_0 = 2,64 \text{ V}$ et $\alpha = 93 \times 10^{-3} \text{ V} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$. On remarque que $\alpha_0 \approx a$ et $\alpha \approx b$ car $b\Delta T \ll V_{sat}$ ainsi les expressions précédentes peuvent se simplifier...

IV Des toboggans sous contrôle

- Q 33.** D'après l'énoncé il faut 2,3 tours, c'est à dire $2,3 \times 2\pi$ radian pour descendre de $h = 4$ m, ainsi $\alpha = \frac{h}{2,3 \cdot 2\pi} = 0,27 \text{ m} \cdot \text{rad}^{-1}$.
- Q 34.** Le problème étudié est un problème conservatif car les frottements sont négligés et la réaction du toboggan est toujours orthogonale au mouvement donc ne travaille pas. Ainsi le théorème de l'énergie mécanique conduit à $0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$, d'où $v = \sqrt{2gh}$.
- Q 35.** On utilise cette fois ci le théorème de la puissance mécanique qui nous donne $\frac{dE_m}{dt} = 0$ avec $E_m = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz$. Or θ et z sont reliés par la relation $z = \alpha\theta$, ainsi $E_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{R^2}{\alpha^2} + 1\right)\dot{z}^2 - mgz$. La dérivée par rapport au temps donne alors l'équation du mouvement sur z : $\ddot{z} = \frac{g}{R^2/\alpha^2 + 1}$.
- Par intégration, on obtient $z(t) = \frac{g}{2(R^2/\alpha^2 + 1)}t^2$. Nous avons $z(t_c) = h$, d'où $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{2hR^2}{g\alpha^2}}$.
- Finalement $t_f = t_m + t_c = 12$ s.

V Une eau traitée par électrolyse

V.A Étude du réseau cristallin NaCl

- Q 36.** Le paramètre de maille est la taille du coté du cube de la maille. D'après le schéma les ions Cl^- et Na^+ sont en contacts donc $a = 2R^+ + 2R^- = 556$ pm.
- J'ai aussi l'impression que les ions Cl^- sont en contacts sur la diagonale du carré, ce qui implique que $a = R^-2\sqrt{2} = 512$ pm... On va donc choisir le a le plus grand.
- Q 37.** Il y a 4 ions Cl^- par maille et 4 ions Na^+ ainsi $\rho = \frac{4(M_{Na} + M_{Cl})}{a^3 N_A} = 2,26 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

V.B Exploitation du diagramme $E - pH$ du chlore

V.B.1 Diagramme du chlore

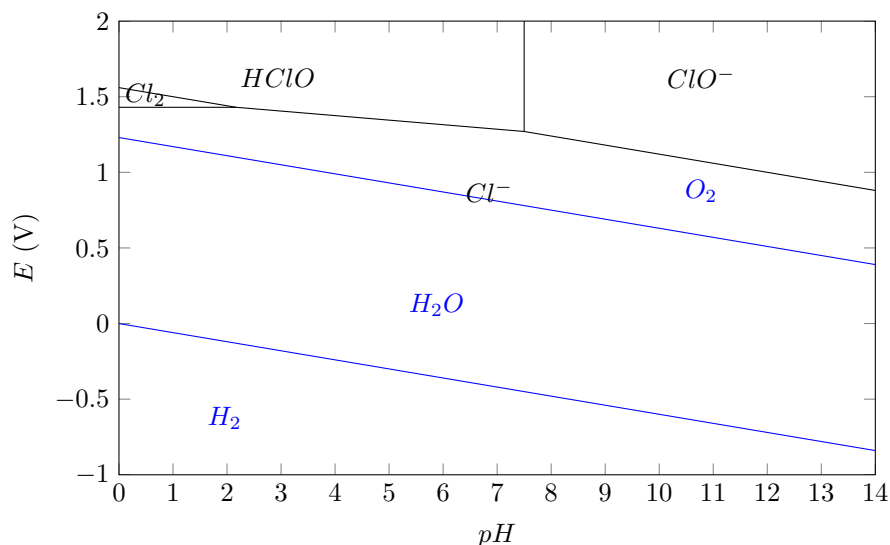
- Q 38.** On calcule le degré d'oxydation de l'atome de chlore dans les différents édifices chimiques, ainsi $no(Cl/Cl^-) = -1$, $no(Cl/Cl_2) = 0$, $no(Cl/HClO) = +I$ et $no(Cl/ClO^-) = +I$. Ainsi Cl^- ayant le plus faible degré d'oxydation doit se situer dans le domaine de potentiel le plus faible c'est à dire A. On remarque ensuite une frontière horizontale entre A et B, ce qui caractérise un échange d'électrons uniquement, donc B : Cl_2 . Enfin les deux dernières espèces ont le même degré d'oxydation, l'espèce acide étant C et l'espèce basique étant D. On en déduit donc que C : $HClO$ et D : ClO^- .
- Q 39.** Par définition $K_a = \frac{[ClO^-][H^+]}{[HClO]}$. Or cette équilibre est atteint sur la frontière verticale, il y a donc égalité des concentrations d'après l'énoncé ainsi $pK_a = pH$. Donc par lecture graphique $pK_a = 7,5$.
- Q 40.** La demi équation rédox du couple B/A est $Cl_2 + 2e^- = 2Cl^-$, ainsi l'équation de la frontière est donnée par $E = E^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{[Cl_2]}{[Cl^-]^2}$. On nous signale qu'il y a égalité des concentrations en éléments sur la frontière $2[Cl_2] = [Cl^-]$ et comme $2[Cl_2] + [Cl^-] = c$, nous avons que $[Cl_2] = c/4$ et $[Cl^-] = c/2$. Finalement $E = E^\circ - 0,03 \log c$.
- Pour déterminer E on peut utiliser les informations sur la frontière entre B et C : $2HClO + 2H^+ + 2e^- = Cl_2 + 2H_2O$, ainsi la pente est de $0,06 \text{ V} \cdot \text{pH}^{-1}$, ainsi $E = 1,56 - 0,06 \cdot 2,17 = 1,43$ V.
- En conclusion $E^\circ = 1,40$ V.
- Q 41.** $HClO + H^+ + 2e^- = Cl^- + H_2O$.
- Q 42.** À partir de la demi-équation électronique on en déduit que la pente est de $-0,03 \text{ V} \cdot \text{pH}^{-1}$. En prolongeant la frontière on remarque qu'elle passe par les points $(2,17;1,43)$ et $(10,5;1,2)$, ce qui confirme une pente de $-0,03$.
- Q 43.** La formule de Nernst pour ce couple donne $E = E^\circ + 0,03 \log \frac{[HClO][H^+]}{[Cl^-]}$. Or il y a égalité des concentrations sur la frontière, ainsi $E = E^\circ - 0,03pH$. En $pH = 2,17$, $E = 1,43$, ainsi $E^\circ = 1,43 + 0,03 \cdot 2,17 = 1,50$ V.

V.B.2 Diagramme de l'eau

- Q 44.** $O_2 + 4H^+ + 4e^- = 2H_2O$, d'où $E = E^\circ - 0,06pH = 1,23 - 0,06pH$ avec les informations de l'énoncé (pression de 1 bar).

Q 45. $H_2O + 2H^+ + 2e^- = H_2 + H_2O$, d'où $E = E^\circ - 0,06pH = -0,06pH$.

Q 46. En superposant ces deux diagrammes, nous remarquons que seul Cl^- peut coexister dans l'eau car toutes les autres espèces ont des domaines disjoints avec celui de l'eau.

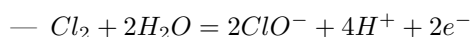
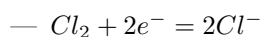


V.C Étude de la cellule d'électrolyse

Q 47. À l'anode il se produit une oxydation, ainsi il se produit du Cl_2 selon la réaction $2Cl^- = Cl_2 + 2e^-$.

À la cathode, il se produit une réduction, donc la formation de H_2 selon la réaction $2H^+ + 2e^- = H_2$.

Q 48. On écrit les deux demi équations électronique qui interviennent ici :



Ainsi en combinant ces deux demi-équations pour éliminer les électrons échangés, nous obtenons, après simplification $Cl_2 + H_2O = Cl^- + ClO^- + 2H^+$.

Q 49. C'est une réaction de dismutation.

Q 50. $m = c_s V_0 = 5 \cdot 150 \cdot 10^3 = 750$ kg.

Q 51. Cherchons la quantité de dichlore formée par seconde $n_{Cl_2} = \frac{\dot{m}_{max}}{2M_{Cl} \cdot 3600}$. Or la formation à l'anode d'une mole de Cl_2 s'accompagne de la libération de 2 moles d'électrons, ainsi $n_e = 2n_{Cl_2}$.

Finalement $i = eN_a n_e = \frac{F \dot{m}_{max}}{3600 M_{Cl}} = 20$ A.

Q 52. $P = UI = 150$ W ce qui n'est pas excessif, sauf si il faut la faire tourner en continu...

FIN DE LA CORRECTION