

Question 1°) Un thermostat est un système fermé capable de fournir de la chaleur sans travail et sans que sa température ne varie

Question 2°) L'atmosphère (supposée isotherme) est assimilable à un thermostat.

Question 3°) D'après le 1^{er} principe pour un système fermé $dU = \delta W + \delta Q$

Or $\delta W = 0$ pour un thermostat et $dU = C_v dT$ d'où $dT = \frac{\delta Q}{C_v}$

La température du thermostat étant fixe, il faut nécessairement $C_v \rightarrow +\infty$

Question 4°) Loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$

Question 5a/ Bilan enthalpique réalisé sur une portion de barre de longueur dx entre les instants t et $t + dt$

$$dH = \delta Q_x + \delta Q_{x+dx} + \delta Q_{lat} = m C_m dT$$

Or $\delta Q_{lat} = 0$ car la barre est isolée latéralement

m : masse de la tranche $m = \rho A dx$

$$\delta Q_x = j_{th}(x) A dt$$

$$\delta Q_{x+dx} = -j_{th}(x+dx) A dt$$

$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt$ car la température est supposée uniforme dans la portion de barre

Le bilan s'écrit $\rho A dx C_m \frac{\partial T}{\partial t} dt = -A dt \frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx$

D'après la loi de Fourier pour un problème unidimensionnel $\frac{\partial j_{th}}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Au final $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_m} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ équation de la chaleur

Question 5b/ Cette équation est de la forme $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ avec $D = \frac{\lambda}{\rho C_m}$

Question 6°) $D = \frac{\frac{\partial T}{\partial t}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$ donc $[D] = \frac{K \cdot s^{-1}}{K \cdot m^{-2}}$ soit D exprimée en $m^2 \cdot s^{-1}$

Question 7°) $\tau = \frac{L^a}{D^b}$ donc $[\tau] = s = \frac{m^a}{m^{2b} s^{-b}}$ ainsi $\begin{cases} b = 1 \\ a = 2b = 2 \end{cases}$

7b/ Ainsi $\tau = \frac{L^2}{D} = \frac{L^2 \rho C_m}{\lambda}$

- Plus un matériau est bon conducteur thermique, plus vite le régime permanent est atteint
- L , au numérateur : cohérent avec la diffusion de proche en proche
- Le terme ρC_m est logiquement au numérateur, il correspond à l'inertie thermique

7c/ Pour $L = 1 \text{ m}$ on a $\tau = \frac{1^2}{120 \cdot 10^{-6}} = 8330 \text{ s} \approx 139 \text{ min} = \boxed{2 \text{ h } 19 \text{ min}}$

Régime permanent atteint au bout d'une durée conséquente. La diffusion thermique est un phénomène lent.

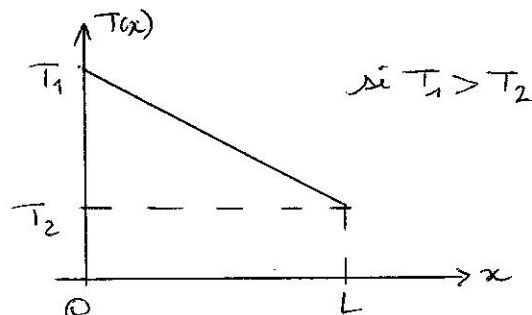
question 8°) En régime permanent, l'équation de la chaleur se réduit à $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$

Soit $T(x)$ de la forme $T(x) = \alpha x + B$

En utilisant les conditions aux limites $T(x=0) = T_1$ on obtient $B = T_1$

et $T(x=L) = T_2$ on obtient $\alpha = \frac{T_2 - T_1}{L}$

Soit $\boxed{T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x}$



question 9°) $\phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = j_{th} \cdot A$

9a/ Or $j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L}$

Ainsi $\phi = \frac{\lambda A}{L} (T_1 - T_2)$ soit $\boxed{T_1 - T_2 = \frac{L}{\lambda A} \phi}$

9b/ De la forme $T_1 - T_2 = R_{th} \phi$ avec $\boxed{R_{th} = \frac{L}{\lambda A}}$

9c/ La conductance thermique, exprimée en $\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$, est une grandeur évaluant la capacité d'un matériau à laisser passer un transfert thermique

question 10°) Document 2 : Le tableau de ce document permet d'établir un classement de 3 matériaux (air/verre/polystyrène) en terme de qualité d'isolation thermique : Le polystyrène est le meilleur isolant.

Le verre est le moins bon

L'air est intermédiaire

Document 3 : Ce tableau confirme le classement précédent (ce qui est attendu car conductance et conductivité thermique sont proportionnelles)

On note également que le cuivre est bien meilleur conducteur thermique que les autres matériaux

question 11°)

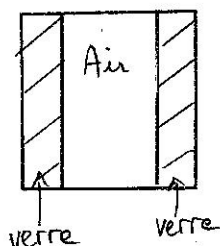


Schéma en coupe d'un double vitrage : de l'air est emprisonné entre 2 vitres

L'air étant moins bon conducteur thermique que le verre, ce dispositif permet de réduire le transfert thermique à travers les fenêtres. C'est beaucoup plus efficace que d'augmenter l'épaisseur de la vitre

Question 12°) Flux $\phi = \frac{\Delta T}{R_{th}} = G_{th} \Delta T$ avec $\Delta T = 10K$

Pour $1m^2$ de surface vitrée $\phi = U_w \Delta T$ avec U_w fourni par le document 2

Energie consommée $E = \phi \Delta t$ avec $\Delta t = 5,5 \text{ mois} = 4000h$

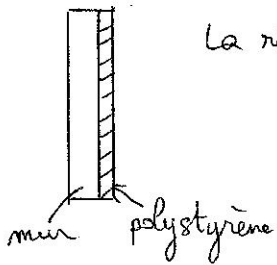
Coût annuel = énergie consommée $\times$ prix du kWh

	$\phi (W)$	$E (kWh)$ sur l'année	Coût annuel (€)
Simple vitrage	60	240	36
Double vitrage	30	120	18

Question 13°)

	$\phi (kW)$	$E (kWh)$ sur l'année	Coût annuel (€)
Mur	$20 \cdot 10^{-3}$	80	12
Mur isolé	$4 \cdot 10^{-3}$	16	2,4

$\Rightarrow$ économie de 9,6€ grâce à l'isolant



La résistance thermique de l'ensemble: $R_{th \text{ tot}} = R_{th \text{ mur}} + R_{th \text{ poly}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{G_{th \text{ tot}}} = \frac{1}{G_{th \text{ mur}}} + \frac{1}{G_{th \text{ poly}}}$$

Pour une surface de $1m^2$: $U_{w \text{ tot}} = \frac{U_{w \text{ mur}} \cdot U_{w \text{ poly}}}{U_{w \text{ mur}} + U_{w \text{ poly}}} = \frac{2,0 \times 0,5}{2,0 + 0,5}$

$$U_{w \text{ tot}} = 0,4 \text{ Wsi}$$

Calcul de l'économie: coût sans isolant - coût avec isolant

Notons P le prix du kWh

$$\text{économie} = (\phi_{\text{sans}} - \phi_{\text{avec}}) \Delta t \times P$$

$$\text{économie} = (U_{w \text{ mur}} - U_{w \text{ tot}}) \Delta T \cdot \Delta t \cdot P$$

AN: économie = $(20 - 0,4) \times 10 \times 10^{-3} \times 4000 \times 0,15 = \underline{9,6 \text{ €}}$

L'isolation permet une économie conséquente

Question 14°) a/ Dans un bâtiment, le côté Nord, moins exposé au Soleil, est plus froid que le côté Sud

Ainsi, les petites fenêtres côté Nord permettent de limiter la déperdition de chaleur. Les grandes fenêtres côté Sud permettent d'avoir une luminosité suffisante, et la perte énergétique est plus faible que celle du côté Nord (ΔT inférieur). Les arbres apportent de l'ombre en été, et l'hiver, ils laissent passer la lumière du Soleil (ce qui réchauffe la façade Sud).

14b/ Le métal est moins bon isolant thermique que le bois. Il est donc préférable d'avoir des volets en bois.

2^e partie : Chauffage d'un appartement

Question 15°) Surface au sol $S = 100 \text{ m}^2$; hauteur sous plafond $h = 2,5 \text{ m}$

Volume d'air sec $V = S \times h = 250 \text{ m}^3$

Masse d'air sec $m = \rho V = 1,2 \times 250 = 300 \text{ kg}$

Question 16°) a/ $C = m c_{pm} = 300 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$

16b/ Transfert thermique à fournir $Q = C \Delta T = P \Delta t$ avec $P = 5 \text{ kW}$, $\Delta T = 10 \text{ K}$

soit $\Delta t = \frac{C \Delta T}{P} = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 10}{5 \cdot 10^3} = 600 \text{ s} = 10 \text{ min}$

16c/ Ce gain de 1°C par minute de chauffage est bien supérieur à ce que l'on peut obtenir dans une situation réelle

question 17°) a/ Simple vitrage $G_{th} = 2,5 \times 6,0 = 15 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$

Double vitrage $G_{th} = 2,5 \times 3,0 = 7,5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$

17b/ Les 4 fenêtres constituent une association en parallèle puisqu'elles séparent toutes l'intérieur de l'appartement de l'extérieur

17c/ $G_{th \text{ tot}} = 4 G_{th}$ donc pour un simple vitrage $G_{th \text{ tot simple}} = 60 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$
pour un double vitrage $G_{th \text{ tot double}} = 30 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$

Puissance traversant les 4 fenêtres $\phi = G_{th \text{ tot}} \cdot \Delta T$ avec $\Delta T = 10 \text{ K}$

Soit pour du simple vitrage $\phi_{\text{simple}} = 600 \text{ W}$

pour du double vitrage $\phi_{\text{double}} = 300 \text{ W}$

17d/ $\phi = 0,2 P_0$ donc $P_0 = \frac{\phi}{0,2} \Rightarrow P_{0 \text{ simple}} = 3,0 \text{ kW}$
 $P_{0 \text{ double}} = 1,5 \text{ kW}$

Soit, sur une année, une énergie $E = P_0 \Delta t$

$E_{\text{simple}} = \frac{3,0 \times 3 \cdot 10^7}{36 \cdot 10^2} = 25 \cdot 10^3 \text{ kWh/an}$

$E_{\text{double}} = \frac{1,5 \times 3 \cdot 10^7}{36 \cdot 10^2} = 12,5 \cdot 10^3 \text{ kWh/an}$

Le document 1 donne une fourchette entre $10 \cdot 10^3 \text{ kWh/an}$ et $37,5 \cdot 10^3 \text{ kWh/an}$ pour une surface de 100 m^2

Les résultats trouvés sont donc cohérents avec le document 1.

Question 18°) Coût supplémentaire relatif $= \frac{\text{Coût}(\Delta T = 11^\circ\text{C}) - \text{Coût}(\Delta T = 10^\circ\text{C})}{\text{Coût}(\Delta T = 10^\circ\text{C})} = \frac{1}{10}$

Augmenter la température de la pièce de 1°C conduit à un surcoût de 10%.

3^e partie: Géothermie et PAC air / eau

question 19^a) D'après la question 7, le temps caractéristique pour atteindre le régime permanent s'écrit $\tau = \frac{L^2}{D}$ soit $L = \sqrt{\tau D}$

Pour pouvoir s'affranchir des variations de température de l'air en surface il faut considérer $\tau \approx 1 \text{ an}$

$$\text{Soit } L = \sqrt{3 \cdot 10^7 \times 0,2 \cdot 10^{-6}} = \sqrt{6} = \boxed{2,4 \text{ m}}$$

question 20^a) a/ Volume élémentaire d'eau froide injectée sur la durée dt :

$$dV = V_{(t+dt)} - V(t) = \pi r_{(t+dt)}^2 H - \pi r_{(t)}^2 H \quad \text{avec } r_{(t+dt)} = r(t) + dr$$

$$\text{soit } dV = \pi H [(r+dr)^2 - r^2] \quad \text{d'où } \boxed{dV = 2\pi r H dr} \quad \text{en se limitant au 1^{er} ordre en } dr$$

$$20b/ \text{ Utilisons le débit volumique } D_v = \frac{dV}{dt} = \frac{2\pi r H dr}{dt}$$

$$\text{Par séparation des variables et intégration } \int_0^t D_v dt = \int_0^r 2H\pi r dr$$

$$D_v t = \pi H r^2 \quad \text{soit } \boxed{r(t) = \sqrt{\frac{D_v t}{\pi H}}}$$

20c/ On cherche l'instant t tel que $r(t) = H' = 1 \text{ km}$

$$\boxed{t = \frac{\pi H \cdot H'^2}{D_v}}$$

$$\underline{AN} \quad t \approx \frac{3,14 \times 100 \times (10^3)^2}{100} = 3,14 \cdot 10^6 \text{ h} \approx \boxed{360 \text{ ans}}$$

L'installation est donc pérenne sur environ 10 générations humaines

20d/ La hauteur de la nappe rocheuse étant $H = 100 \text{ m}$, on a donc 15 m^3 d'eau chaude par mètre carré

Le différentiel thermique de l'eau est $\Delta T = 60^\circ \text{C}$

L'énergie récupérable par unité de surface de la nappe est donc

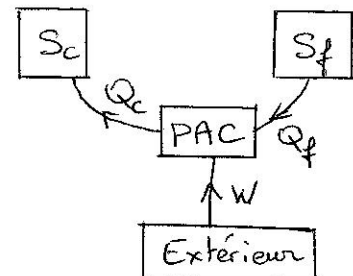
$$Q = m_{\text{eau}} C_{p,\text{eau}} \Delta T = 15 \cdot 10^3 \times 1,0 \times 60 = \boxed{9,0 \cdot 10^5 \text{ kcal/m}^2 \text{ de nappe}}$$

Pour 1 m^3 d'eau de la roche, l'énergie récupérable est

$$Q' = 1,0 \cdot 10^3 \times 1,0 \times 60 = \boxed{6,0 \cdot 10^4 \text{ kcal}} = 60 \text{ Mcal}$$

20e/ Ce procédé fournit la même énergie (rapportée à 1 m^3 d'eau) que le pétrole. Il est donc rentable[⊗] et a l'avantage d'être renouvelable contrairement au pétrole. [⊗] en supposant les coûts d'exploitation identiques.

question 21^a) Une pompe à chaleur (PAC) puise un transfert thermique (Q_f) à la source froide grâce à un travail (W) extérieur, afin de fournir de l'énergie thermique (Q_c) à la source chaude



21a/ La source froide est généralement l'air extérieur à la pièce à chauffer et la source chaude correspond à l'eau du circuit de chauffage (dans le cadre d'une PAC air/eau)

21b/ Le fluide reçoit un travail extérieur W (travail électrique) ainsi qu'un transfert thermique en provenance de la source froide

donc $\boxed{W > 0}$ et $\boxed{Q_f > 0}$

Il cède de la chaleur à la source chaude soit $\boxed{Q_c < 0}$

21c/
$$\text{COP} = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur coûteuse}} = \frac{-Q_c}{W}$$

Pour un fonctionnement réversible on a

• d'après le 1^{er} principe appliqué au fluide sur un cycle $\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0$

$$\Leftrightarrow W = -Q_c - Q_f$$

• d'après le 2^e principe appliqué au fluide sur un cycle $\Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$$

Ainsi
$$\text{COP} = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} \Leftrightarrow \frac{1}{\text{COP}} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{T_c - T_f}{T_c}$$

$$\boxed{\text{COP} = \frac{T_c}{T_c - T_f}}$$

Question 22°) a/ Point 2 ($P_2 = 50 \text{ bar}$; vapeur saturante) $\boxed{h_2 \approx 416 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$

Point 3 ($P_3 = 5,0 \text{ bar}$; $s_3 = 1900 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) $\boxed{h_3 \approx 431 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$

Point 4 ($P_4 = 20 \text{ bar}$; $s_4 = 1900 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) $\boxed{h_4 \approx 475 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$

Point 5 ($P_5 = 20 \text{ bar}$; liquide saturant) $\boxed{h_5 \approx 250 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$

22b/ cf annexe

22c/ Le condenseur fait passer le fluide de la PAC de l'état vapeur à liquide

Il y a donc une diminution d'entropie $\Delta s_{\text{cond}} < 0$

Or $q_{\text{cond}} = T \Delta s_{\text{cond}}$ donc $q_{\text{cond}} < 0$: de l'énergie thermique est libérée par le fluide vers l'extérieur qui doit donc être la source chaude.

22d) Appliquons le 1^{er} principe industriel au fluide à chaque étape en négligeant les variations d'énergie cinétique et potentielle: $\Delta h = w + q$

Etape 1 $\rightarrow$ 2: $\Delta h_{1 \rightarrow 2} = w_{1 \rightarrow 2} + q_{1 \rightarrow 2}$

0 (pas de parties mobiles)

$$\boxed{q_{1 \rightarrow 2} = h_2 - h_1 \approx 176 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

Etape 2 $\rightarrow$ 3. De la même façon $\Delta h_{2 \rightarrow 3} = w_{2 \rightarrow 3} + q_{2 \rightarrow 3}$

$$\boxed{q_{2 \rightarrow 3} = h_3 - h_2 \approx 15 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

Etape 3 → 4 : $\Delta h_{3 \rightarrow 4} = w_{3 \rightarrow 4} + q_{3 \rightarrow 4}$
 0 (car isentropique)

$$w_{3 \rightarrow 4} = h_4 - h_3 \approx 44 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Etape 4 → 5 $\Delta h_{4 \rightarrow 5} = w_{4 \rightarrow 5} + q_{4 \rightarrow 5}$
 0 (pas de parties mobiles)

$$q_{4 \rightarrow 5} = h_5 - h_4 \approx -225 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Etape 5 → 6 De la même façon $\Delta h_{5 \rightarrow 6} = w_{5 \rightarrow 6} + q_{5 \rightarrow 6}$
 0

$$q_{5 \rightarrow 6} = h_6 - h_5 \approx -10 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

22 f/ $\text{COP} = \frac{-(q_{4 \rightarrow 5} + q_{5 \rightarrow 6})}{w_{3 \rightarrow 4}} = \frac{235}{44} \approx 5,3 = \text{COP}$

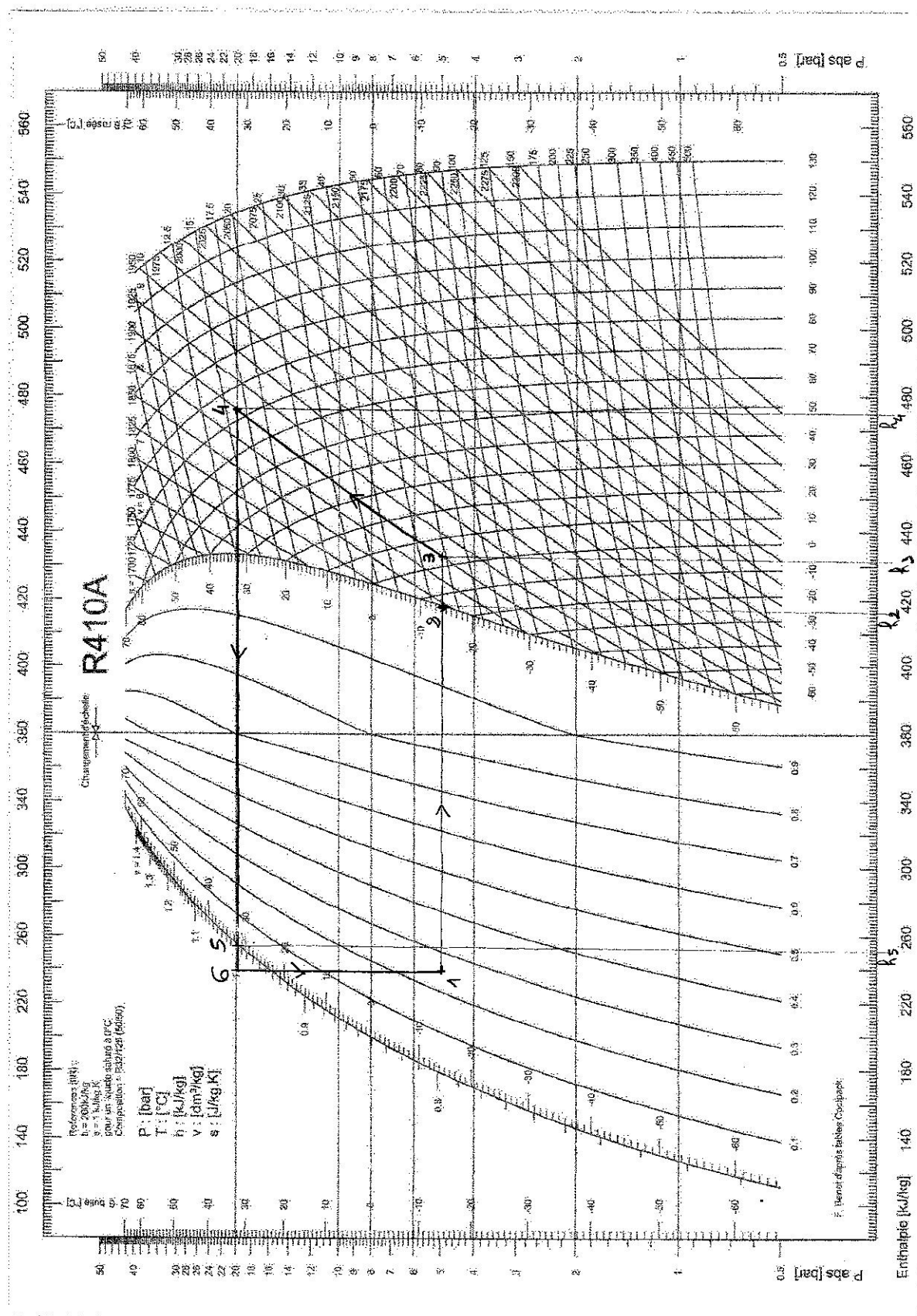
COP idéal $\text{COP}_g = \frac{T_c}{T_c - T_f}$ avec $T_c = 32^\circ\text{C} = 305\text{K}$; $T_f = -14^\circ\text{C}$

$$\text{COP}_g = \frac{305}{46} \approx 6,6 = \text{COP}_g$$

22 g/ En terme de puissance, le 1^{er} principe industriel s'écrit $\dot{D}_m \Delta h + P_i + P_{th} = 0$

Pour le chauffage $\dot{D}_m \Delta h_{4 \rightarrow 6} = -P_{th}$ soit $\dot{D}_m = \frac{P_{th}}{\Delta h_{4 \rightarrow 6}}$

A.N $\dot{D}_m = \frac{5}{235} \approx 21 \cdot 10^{-3} \text{ kg.s}^{-1} \approx \dot{D}_m$



ⓑ