

1 Propagation du son

1.1 Équation de propagation

1.1.1 Modélisation isotherme de la propagation du son

1. $P_n V_n = NRT_0 = P_0 V_0$.
2. En projection sur (Ox) , seules interviennent les forces de pression $+P_s S \vec{e}_x$ et $-P_{n+1} S \vec{e}_x$ exercées sur la paroi mobile donc $m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = NRT_0 S \left(\frac{1}{V_n} - \frac{1}{V_{n+1}} \right)$ qui prend la forme demandée si on pose $c_{\text{iso}} = \sqrt{\frac{NRT_0}{m}}$.
3. $V_n = S(a + \xi_n - \xi_{n-1}) = Sa \left[1 + \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{a} \right]$ donc à l'ordre le plus bas $\frac{1}{V_n} = \frac{1}{Sa} \left[1 - \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{a} \right]$; de même $\frac{1}{V_{n+1}} = \frac{1}{Sa} \left[1 - \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{a} \right]$ par simple translation des indices donc après substitution et simplification $\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = \frac{c_{\text{iso}}^2}{a^2} [2\xi_n - \xi_{n-1} - \xi_{n+1}]$.
4. Avec les nouvelles notations, $\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ et, en effectuant un développement jusqu'au second ordre en a , $\xi_{n+1} = \xi(x+a, t) = \xi(x, t) + a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ tandis que $\xi_{n-1} = \xi(x-a, t) = \xi(x, t) - a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$. Après simplification, on obtient effectivement l'équation de propagation (dite de d'Alembert) $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_{\text{iso}}^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$.
5. Ici $m = NM$ donc $c_{\text{iso}} = \sqrt{\frac{RT}{M}} = 280 \text{ m/s}$; cette valeur ne coïncide pas avec celle (bien connue) que rappelle l'énoncé, ce qui justifie une amélioration du modèle de la propagation.

1.1.2 Modélisation adiabatique

6. $PV^\gamma = \text{cte}$ lors d'une évolution adiabatique et réversible d'un gaz parfait pour lequel le rapport γ des capacités thermiques est constant.
7. Ici $P_n V_n^\gamma = P_0 V_0^\gamma$ où $V_0 = Sa$; on en déduit $P_n = P_0 \left[\frac{V_0}{V_0 + S(\xi_n - \xi_{n+1})} \right]^\gamma$ ou, au premier ordre, $P_n = P_0 \left[1 - \frac{\gamma S}{V_0} (\xi_n - \xi_{n+1}) \right]$. On peut donc encore écrire $m \ddot{\xi}_n = -\frac{\gamma P_0 S^2}{V_0} [2\xi_n - \xi_{n+1} - \xi_{n-1}]$. En effectuant les mêmes développements que ci-dessus, on parvient à $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\gamma P_0 S^2 a^2}{m V_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ et, avec $Sa = V_0$ et $P_0 V_0 = NRT_0$, on trouve $c_{\text{ad}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$ ou $c_{\text{ad}} = c_{\text{iso}} \sqrt{\gamma}$.
8. Numériquement, on trouve $c_{\text{ad}} = 340 \text{ m/s}$ qui coïncide bien avec la valeur mesurée et valide donc le modèle adiabatique.
9. L'analyse en ordre de grandeur des phénomènes de diffusion thermique permet de relier la longueur caractéristique λ et la durée associée τ par $D = \frac{\lambda^2}{\tau}$ ou $\tau = \frac{\lambda^2}{D}$.
10. On peut considérer que les phénomènes de diffusion thermique n'ont pas le temps de réaliser l'équilibre isotherme si $\tau \gg T = \frac{1}{f}$ où par ailleurs $\lambda = \frac{c_{\text{ad}}}{f}$ ou enfin $f \ll \frac{c_{\text{ad}}^2}{D}$.
11. Numériquement cette condition impose $f \ll 4,5 \text{ GHz}$, toujours vérifiée dans le domaine audio (borné supérieurement vers 20 kHz).

2 Transmission de l'onde sonore à l'oreille

2.1 Préliminaires

12. On appelle OPPS une onde (propagation d'une grandeur physique par couplage spatio-temporel), plane (ne dépendant que d'une seule variable d'espace cartésienne, ici x), progressive (se propageant dans un seul sens de

l'axe (Ox) et sinusoïdale de pulsation ω , ce qui justifie le choix de la notation complexe.

13. Il suffit de reporter l'expression proposée dans l'équation de propagation pour obtenir $\omega^2 = c^2 k^2$. Compte tenu du sens de propagation le long de l'axe (Ox), on a donc aussi $k = +\frac{\omega}{c}$.

14. En notations complexes on trouve $\rho_0 i \omega \bar{v} = i k \bar{p}$ donc $\bar{p} = \bar{Z} \bar{v}$ avec $\bar{Z} = \rho_0 c$.

15. On trouve numériquement $Z_{\text{air}} = 340 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ et $Z_{\text{eau}} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

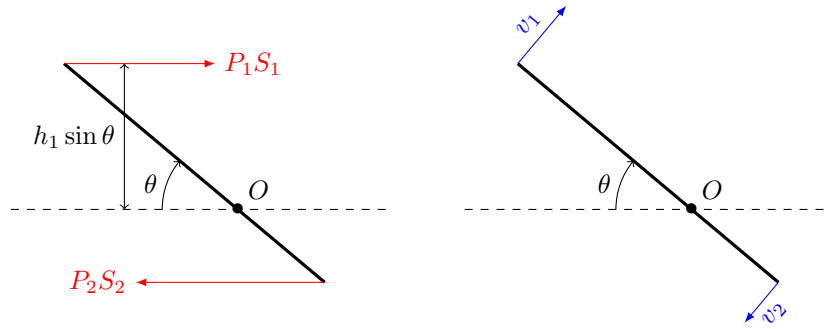
16. À l'interface, l'onde incidente transporte la puissance $\mathcal{P}_{\text{inc}}$ qui se partage en puissance absorbée (éventuellement), puissance transmise $\mathcal{P}_{\text{tr}}$ au-delà de l'interface et puissance réfléchie $\mathcal{P}_{\text{ref}}$ par l'interface. Les coefficients demandés sont $R = \frac{\mathcal{P}_{\text{ref}}}{\mathcal{P}_{\text{inc}}}$ et $T = \frac{\mathcal{P}_{\text{tr}}}{\mathcal{P}_{\text{inc}}}$.

17. En admettant l'absence d'absorption des ondes à l'interface, $R + T = 1$ donc $R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$. Ici $Z_2 \gg Z_1$

donc $T \simeq 9 \cdot 10^{-4} \ll 1$ tandis que $R \simeq 1$: il n'y a pas de transmission et il sera ici difficile d'entendre dans l'eau un signal produit dans l'air.

2.2 Utilité de l'oreille moyenne

18. Si on suppose l'ensemble formé de la barre (de longueur $h_1 + h_2$) et des deux pistons de masse négligeable, le théorème du moment cinétique permet d'écrire l'annulation des moments des forces (schéma ci-dessous à gauche) par rapport au point d'articulation, $P_1 S_1 h_1 \sin \theta = P_2 S_2 h_2 \sin \theta$ donc $\frac{P_{\text{tym}}}{P_{\text{coch}}} = \frac{h_2 S_2}{h_1 S_1} = \frac{1}{30}$.



19. De même on voit (schéma ci-dessus à droite) que $v_1 = h_1 \dot{\theta}$ donc en projection horizontale $v_{\text{tym}} = h_1 \dot{\theta} \sin \theta$ et de même $v_2 = h_2 \dot{\theta}$ donc $v_{\text{coch}} = h_2 \dot{\theta} \sin \theta$. Finalement, $\frac{v_{\text{tym}}}{v_{\text{coch}}} = \frac{h_1}{h_2} = 1,5$.

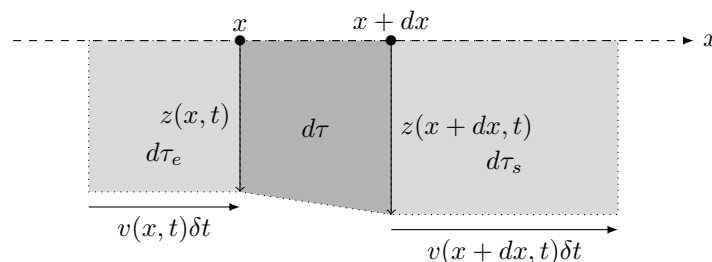
20. Avec $Z_{\text{tym}} = \frac{P_{\text{tym}}}{v_{\text{tym}}}$ et $Z_{\text{coch}} = \frac{P_{\text{coch}}}{v_{\text{coch}}}$ on trouve facilement $Z_{\text{tym}} = Z_{\text{coch}} \frac{S_2 h_2^2}{S_1 h_1^2}$ ou $Z_{\text{tym}} = \frac{Z_{\text{coch}}}{45}$.

21. On peut maintenant écrire un nouveau coefficient de transmission, $T = \frac{4Z_{\text{air}}Z_{\text{eau}}/45}{Z_{\text{air}} + Z_{\text{eau}}/45}$ qui vaut numériquement $T = 7,5\%$: il y a une forte augmentation de la transmission vers l'oreille interne par adaptation d'impédance.

3 Modèle de l'onde cochléaire

3.1 Équation de propagation

22. Le fluide est incompressible dont l'écoulement se traduit par la conservation du volume d'eau. Considérons une tranche de longueur dx , de hauteur $z(x) \simeq h$ et de profondeur (constante) ℓ .



Ce volume $d\tau(t) = \ell dx z(x, t)$ varie de t à $t + dt$ de $d\tau(t)$ à $d\tau(t + \delta t) = \ell dx z(x, t + \delta t)$ où $z(x, t + \delta t) = z(x, t) + u(x, t)\delta t$ donc $\delta d\tau = \ell u(x, t)dx \delta t$.

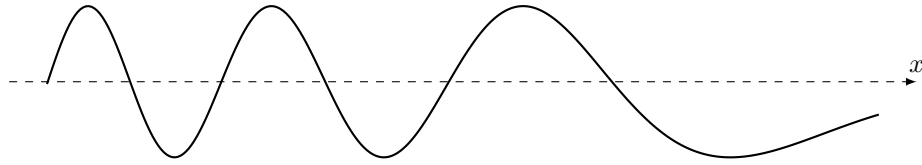
Cette variation de volume est la différence du volume d'eau entrant $\delta\tau_e$ et du volume d'eau sortant $\delta\tau_s$ pendant la même durée, avec $\delta\tau_e = \ell z(x, t)v(x, t)\delta t$ et de même $\delta\tau_s = \ell z(x + dx, t)v(x + dx, t)\delta t$. Toutefois dans ces deux expressions on ne va considérer que le premier ordre : le terme $v(x, t)$ étant d'ordre 1 on doit développer $z(x, t)$ à l'ordre zéro en écrivant $z(x, t) = z(x + dx, t) = h$ donc aussi $\delta\tau_e - \delta\tau_s = -\ell h \frac{\partial v}{\partial x} dx \delta t$.

Finalement la conservation du volume impose $u(x, t) = -h \frac{\partial v}{\partial x}$.

23. Comme par ailleurs $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ on peut écrire $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$ (au prix d'une permutation des dérivées partielles) donc aussi $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{h} \frac{\partial u}{\partial t}$.

24. Il suffit de reporter la forme complexe de l'OPPS dans l'équation proposée pour obtenir l'équation de dispersion, $-k^2 \bar{p} = \frac{\rho_0}{h} i\omega \bar{v}$ ou $k^2 = -\frac{i\omega \rho_0}{h \bar{Z}_m}$.

25. Avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, si $k(x)$ est décroissant la longueur d'onde est une fonction croissante de x :



3.2 Réponse de la membrane

3.2.1 Modélisation mécanique

26. La projection du principe fondamental de la dynamique sur l'axe du mouvement s'écrit $M\ddot{x} = F - Kx - \alpha\dot{x}$.
27. En notations complexes, $\bar{F} = Mi\omega\bar{v} + \alpha\bar{v} + \frac{K}{i\omega}\bar{v}$ donc $\bar{Z} = i\omega M + \alpha + \frac{K}{i\omega}$.
28. L'identification de la pression à une force par unité de surface permet d'identifier la masse surfacique $\mu = M/S$, le terme de frottement $\gamma(x) = \alpha/S$ et le terme élastique $\kappa(x) = K/S$.

3.2.2 Détection d'une onde le long de la membrane basilaire

29. $|\bar{Z}_m(x)| = \sqrt{\gamma^2(x) + \left(\omega\mu - \frac{\kappa(x)}{\omega}\right)^2}$.
30. La résonance de vitesse se traduit par $|\bar{Z}_m(x)|$ minimal pour une certaine valeur de ω ; c'est celle qui annule la partie imaginaire de $\bar{Z}_m$ donc $\omega_r(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x)}{\mu}}$.
31. Il est possible d'obtenir des résonances pour les différentes fréquences du spectre audio en différentes abscisses de la membrane, ce qui permet la détection séparée des graves et des aigus. Comme les fréquences audibles varient d'un facteur 10^3 (de 20 Hz à 20 kHz), $\kappa(x)$ varie comme ω_r^2 donc d'un facteur 10^6 .
32. $\omega_r(x)$ est décroissante (sons graves donc ω_r faible pour de grande valeurs de x) alors $\kappa(x)$ est décroissante en fonction de x .
33. On a vu que $k^2 = -\frac{\rho_0 i\omega}{h} \frac{1}{i\omega\mu + \frac{\kappa(x)}{i\omega}}$ soit après calculs l'expression (réelle) $k^2(x) = \frac{k_0^2}{\frac{\omega_r^2(x)}{\omega^2} - 1}$ où $k_0^2 = \frac{\rho_0}{h\mu}$.

3.3 Cas limites de l'équation

34. On a ici $\frac{\kappa(x)}{\omega} \gg \frac{\omega}{\mu}$ soit $\omega \ll \omega_r(x)$ (limite basse fréquence) donc $k^2 \simeq k_0^2 \frac{\omega^2}{\omega_r^2(x)}$ ou, pour une onde se propageant dans le sens des c croissants, $k(x) = k_0 \frac{\omega}{\omega_r(x)}$. La vitesse de propagation des ondes est alors $v_\varphi = \frac{\omega_r(x)}{k_0}$; elle décroît avec x et l'onde se propage de moins en moins vite, jusqu'à s'arrêter (on le verra plus loin) en point de résonance où son amplitude prend sa valeur maximale (on le verra aussi plus loin).

35. Dans le cas limite des hautes fréquences, $\omega \gg \omega_r(x)$ donc $k^2 = -k_0^2$ qui a deux solutions mathématiques $k(x) = \pm ik_0$. Avec $k(x) = +ik_0$ on obtient $\bar{P} = P_0 e^{i\omega t} e^{k_0 x}$, solution non physique avec une croissance indéfinie de l'amplitude de l'onde. On écrira donc $k(x) = -ik_0$ conduisant à une onde évanescence, $\bar{P}(x) = P_0 e^{i\omega t} e^{-k_0 x}$.
36. Puisque ω_r est décroissante, le domaine $x < x_r$ correspond au domaine de propagation avec décroissance de $\kappa(x)$ jusqu'à la résonance, tandis que pour $x > x_r$ l'onde disparaît rapidement après son point de résonance.
37. ici on doit prendre $\bar{Z}_m = \gamma$ donc $k^2 = -\frac{\rho_0 i \omega_r}{\gamma h}$ donc $k = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho_0 \omega_r}{h \gamma}}$ avec toujours le signe devant k imposé par le caractère atténué de l'onde.

3.4 Solution approchée pour $x < x_r$

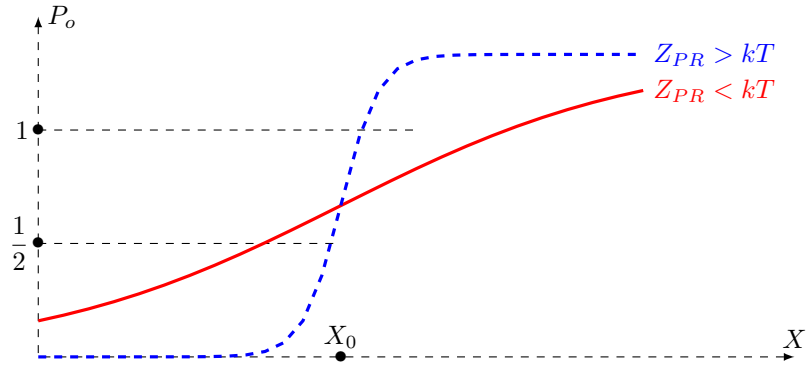
38. Par deux dérivations successives, on trouve d'abord $\bar{p}(x) = A(x) e^{i\varphi(x)}$ puis $\bar{p}'(x) = e^{i\varphi(x)} [A'(x) + i\varphi'(x)A(x)]$ et $\bar{p}''(x) = e^{i\varphi(x)} [A''(x) + 2i\varphi'(x)A'(x) + i\varphi''(x)A(x) - \varphi'^2(x)A(x)]$. Comme $\bar{p}''(x) = k^2(x)A(x)e^{i\varphi(x)}$ où $k^2(x)$ est réel, on identifie les parties réelle et imaginaire et on obtient d'une part $A''(x) - \varphi'^2(x)A(x) = -k^2(x)A(x)$ et d'autre part $2A'(x)\varphi'(x) = -\varphi''(x)A(x)$.
39. L'intégration de $\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} = -2\frac{A'(x)}{A(x)}$ mène à $\ln|\varphi'| = \text{cte} - 2\ln A(x)$ donc $\varphi'(x) = \frac{\alpha}{A^2(x)}$.
40. On peut négliger A'' devant $k^2 A$ si la distance caractéristique de variation de l'amplitude $A(x)$ est nettement plus grande que la longueur d'onde ; on a alors $A(x)\varphi'^2(x) = k^2(x)A(x)$ soit $\varphi'(x) = -k(x)$ puisque $\varphi'(x) < 0$ car $\alpha < 0$; on peut aussi reconnaître la solution limite où $k(x)$ est constant comme $\varphi(x) = -kx$ donc $\varphi'(x) < 0$.
41. On a vu que $A(x) = \sqrt{\frac{-\alpha}{k(x)}}$ tandis que $\varphi'(x) = -k(x)$ s'intègre en $\varphi(x) = \varphi_0 - \int_0^x k(x')dx'$ d'où l'expression complexe de l'onde de pression, $\bar{p}(x) = \sqrt{\frac{-\alpha}{k(x)}} \exp \left[i \left(\varphi_0 - \int_0^x k(x')dx' \right) \right]$.
42. Si $\omega \rightarrow \omega_r(x)$, $k(x) \rightarrow \infty$: il n'est plus possible ici de négliger le terme d'amortissement dans l'expression de k .
43. La relation $\bar{p} = Z\bar{u}$ s'écrit aussi $\bar{p} = \frac{-\rho_0 i \omega}{h k^2} i \omega \bar{z}$ ou encore $\bar{z} = \frac{h}{\rho_0 \omega^2} \sqrt{\frac{-\alpha}{k(x)}} \exp \left[-i \int_0^x k(x')dx' \right]$ donc, en remplaçant $k^2(x)$ par son expression et en revenant aux parties réelles, $z(x, t) = \text{Re}(\bar{z}(x) e^{i\omega t})$ fournit comme demandé $z(x, t) = \frac{1}{\mu \omega^2} \sqrt{\frac{-\alpha}{k_0}} \left(\frac{\omega_r^2(x)}{\omega^2} - 1 \right)^{-3/4} \cos \left(\omega t - \int_0^x \varphi'(x')dx' \right)$.

3.5 Comparaison aux données de simulation

44. Le point de résonance est en $x_r = 16 \text{ mm}$.
45. On voit que l'amplitude de l'onde augmente en même temps qu'à la résonance en même temps que $\omega \rightarrow \omega_r$, $k \rightarrow \infty$ donc $\lambda \rightarrow 0$.
46. La résonance fait que la totalité de l'onde est absorbée en ce point.
47. Pour $x > x_r$, $\omega > \omega_r$ donc l'onde est rapidement atténuée.

4 Oscillations de la touffe ciliaire

48. $\vec{f}_f = -\kappa X \vec{e}_x$ et $\vec{f}_o = -\kappa(X - d) \vec{e}_x$.
49. De même on a $E_f = \epsilon_f + \frac{1}{2} \kappa X^2$ et $E_o = \epsilon_o + \frac{1}{2} \kappa (X - d)^2$.
50. $\Delta E = \epsilon_o - \epsilon_f + \frac{1}{2} \kappa d^2 - \kappa X d$ qui prend la forme demandée si on pose $Z_{PR} = \kappa d$ et $X_0 = \frac{d}{2} + \frac{\epsilon_o - \epsilon_f}{2\kappa d}$.
51. $P_o = C \exp(-E_o/kT)$ et $P_f = C \exp(-E_f/kT)$ avec $P_o + P_f = 1$ donc $P_o = \frac{\exp(-E_o/kT)}{\exp(-E_o/kT) + \exp(-E_f/kT)}$ qui s'écrit encore $P_o = \frac{1}{1 + \exp(\Delta E/kT)}$.
52. On écrit encore $P_o = \frac{1}{1 + \exp(-\frac{Z_{PR}}{kT}(X - X_0))}$ donc $P_o \rightarrow 1$ si $X \gg X_0$ et $P_o \rightarrow 0$ si $X \ll X_0$; l'allure de la courbe est tracée ci-après dans deux cas limites.



53. $\langle \vec{f} \rangle = P_o \vec{f}_o + P_f \vec{f}_f = -\kappa [P_o(X - d) + (1 - P_o)X] \vec{e}_x$ ou, après calculs, $\langle \vec{f} \rangle = -\kappa(X - dP_o) \vec{e}_x$.
54. La somme des forces exercées sur les N ressorts est aussi égale à N fois la valeur moyenne de la force exercée par un ressort, d'où le résultat.
55. Si $X \gg d$ alors $X \gg dP_o$; si de plus $X \gg X_t$ alors $F \simeq -(N\kappa + \kappa_t)X$: la réponse est linéaire.
56. Ici $\exp(\Delta E/kT) = \exp\left(-Z_{PR} \frac{X - X_0}{kT}\right) \simeq 1 - Z_{PR} \frac{X - X_0}{kT}$ à l'ordre le plus bas, d'où $P_o = \frac{1}{2 - Z_{PR} \frac{X - X_0}{kT}}$
ou, toujours à l'ordre le plus bas, $P_o = \frac{1}{2} + Z_{PR} \frac{X - X_0}{4kT}$.
57. La stabilité impose $\frac{\partial F}{\partial x} < 0$.
58. Ici $F \simeq -\kappa N \left[X - d \left(\frac{1}{2} + Z_{PR} \frac{X - X_0}{4kT} \right) \right] - \kappa_t(X - X_t)$ qui s'écrit aussi $F = - \left(N\kappa \left[1 - \frac{Z_{PR}}{4kT} \right] + \kappa_t \right) X + \text{cte}$
donc il y a instabilité si $Z_{PR} > 4kT \left(1 + \frac{\kappa_t}{N\kappa} \right)$ en $X = 0$.
59. On retrouve bien pour Z_{PR} faible une position d'équilibre stable, unique, en $X = X_0$ tandis que pour Z_{PR} plus élevé cette position d'équilibre devient instable et est entourée de deux autres, stables, décalées symétriquement par rapport à la précédente.