

Corrigé de l'épreuve de PHYSIQUE C (ENS Ulm) filière PC, 2018 (p18lp3e).

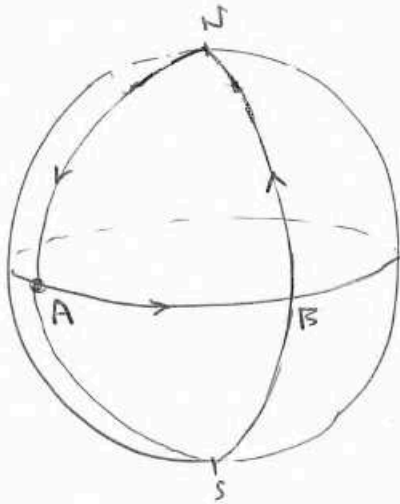
Rédigé par Paul COLIN, lycée Pierre de Fermat TOULOUSE
paul-andre.colin@ac-toulouse.fr

Le corrigé n'est pas tout à fait complet, avis aux amateurs.

Je suis preneur de toute remarque, complément, merci de me signaler les erreurs repérées.

Détection interférométrique d'ondes gravitationnelles. (ENS Ulm, 2018, PC)

Q1)

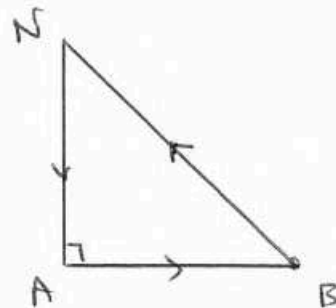


En partant du pôle N, les premiers km sont nécessairement parcourus dans la direction du Sud, donc le long d'un méridien (de N à A - échelle non parfaitement respectée)

Les 1000 km suivants sont parcourus le long d'un parallèle, vers l'est (de A à B). (en fait le long de l'équateur!)

Distance minimale qu'il doit parcourir pour revenir au pôle : 10000 km, direction plein Nord, en suivant le méridien qui le ramène au pôle N (de B à N).

Si la surface avait été plane (au lieu de sphérique) :

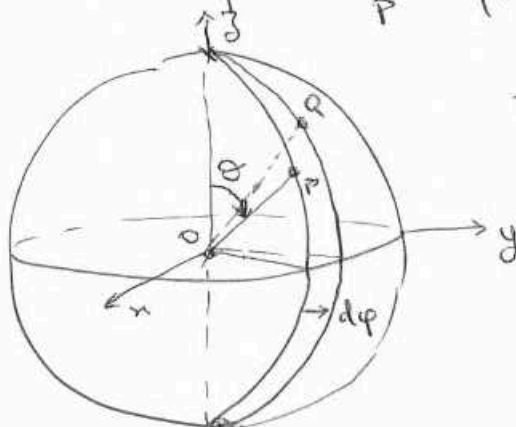


Distance minimale de B à N :

$$1000\sqrt{2} \approx \underline{1,414 \cdot 10^4 \text{ km.}}$$

($\sqrt{2}$ fois plus).

Q2) Prenons deux points infiniment proches sur la sphère, de coordonnées respectives $P(\theta, \varphi)$ et $Q(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$:



Il nous faut la distance PQ

$$\text{Or } \vec{PQ} = r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\text{D'où } PQ^2 = (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2$$

$$\text{ou encore } PQ = \sqrt{(r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2} \quad \left. \vphantom{\sqrt{(r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2}} \right\} \begin{array}{l} \text{distance entre deux} \\ \text{points infiniment} \\ \text{proches \textit{à} la surface de} \\ \text{la sph\`ere.} \end{array}$$

$$\text{Avec } r=1 \text{ cela donne } PQ = \sqrt{(d\theta)^2 + (\sin \theta d\varphi)^2}$$

$$\text{L'\'enonc\'e propose: } \sqrt{(\vec{d}\vec{r}) \cdot (g \vec{d}\vec{r})}$$

$$\text{Or } g(\vec{d}\vec{r}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\theta \\ \sin^2 \theta d\varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } (\vec{d}\vec{r}) \cdot (g \vec{d}\vec{r}) = (d\theta)^2 + (\sin \theta d\varphi)^2$$

$$\text{ou encore } \sqrt{(\vec{d}\vec{r}) \cdot (g \vec{d}\vec{r})} = \sqrt{(d\theta)^2 + (\sin \theta d\varphi)^2}$$

On a donc bien la m\^eme expression.

Par int\'egration le long de n'importe quelle courbe $\mathcal{C}$ trac\'ee sur la surface de la sph\`ere, on a donc bien sa longueur

$$\text{qui est } \boxed{L = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{(\vec{d}\vec{r}) \cdot (g \vec{d}\vec{r})} \quad \text{avec } g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \text{et } \vec{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} .}$$

Q3) Ondes transverses: par exemples les ondes \textit{\'electromagn\`etiques} dans le vide.

$$Q4) \quad g = \begin{pmatrix} 1+h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & 1+h_{yy} \end{pmatrix}$$

$$g \vec{dr} = \begin{pmatrix} (1+h_{xx})dx + h_{xy}dy \\ h_{yx}dx + (1+h_{yy})dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\vec{dr}) \cdot (g \vec{dr}) &= (1+h_{xx})(dx)^2 + h_{xy}dx dy + h_{yx}dx dy \\ &\quad + (1+h_{yy})(dy)^2 \\ &= \underbrace{(dx)^2 + (dy)^2}_{\nearrow \text{le terme dominant,}} + h_{xx}(dx)^2 + h_{yy}(dy)^2 \\ &\quad + (h_{xy} + h_{yx})dx dy \end{aligned}$$

le terme dominant,
que l'on va mettre en facteur.

$$(\vec{dr}) \cdot (g \vec{dr}) = [(dx)^2 + (dy)^2] \left(1 + \frac{h_{xx}(dx)^2 + h_{yy}(dy)^2 + (h_{xy} + h_{yx})dx dy}{(dx)^2 + (dy)^2} \right)$$

Jusque là on n'a pas fait d'approximation.

On obtient dl en prenant la racine carrée de cette expression.

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \left(1 + \frac{h_{xx}(dx)^2 + h_{yy}(dy)^2 + (h_{xy} + h_{yx})dx dy}{2[(dx)^2 + (dy)^2]} + O(h^2) \right)$$

$$\text{Or } (\vec{dr}) \cdot (h \vec{dr}) = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{xx}dx + h_{xy}dy \\ h_{yx}dx + h_{yy}dy \end{pmatrix}$$

$$= h_{xx}(dx)^2 + h_{xy}dx dy + h_{yx}dx dy + h_{yy}(dy)^2$$

C'est justement le numérateur du quotient ci-dessus.

On a donc bien

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} + \frac{(\vec{dr}) \cdot (h \vec{dr})}{2\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} + O(h^2)$$

Q5) $L = \int_x^{x+L_0} dl$ Tous les dy sont nuls donc $dl = dx + dx \frac{h_{xx}}{2}$
 h_{xx} est indépendant de x , d'où $L = \int_x^{x+L_0} \left(1 + \frac{h_{xx}}{2}\right) dx$.

(à l'ordre 1 en h)

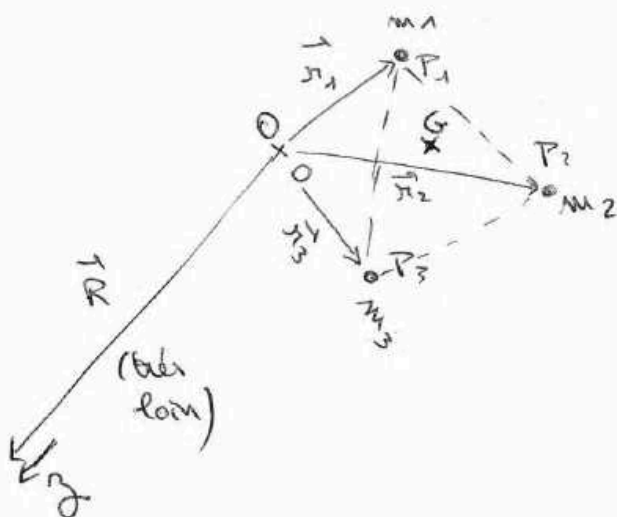
$$L = L_0 \left(1 + \frac{h_{xx}}{2}\right)$$

Q6) Il s'agit d'une équation de d'Alembert tout à fait classique -

$$\left[\nabla \varphi(\omega) = \nabla g(\omega) = -c \quad \forall \omega \right] \text{ (pulsation notée ici } \Omega)$$

Et donc $\left[\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\Omega} \right]$, tout à fait "classiquement".

Q7) M est tout simplement la masse totale du système -



$$\vec{D} = \sum m_m \vec{OP}_m = (\sum m_m) \vec{OG}$$

où G est le centre de masse du système.

Donc $\left[\frac{\vec{D}}{M} = \vec{OG} \right]$

Quant à Q , d'après son expression, I est homogène à un moment d'inertie.

$$Q8) \left(\vec{g}(\vec{R}) = - \sum_{m=1}^N \underset{\substack{\uparrow \\ \text{c}^{\text{u}} \text{ universelle} \\ \text{de la gravitation}}}{G} \frac{m_m}{\|\vec{R} - \vec{r}_m\|^3} (\vec{R} - \vec{r}_m) \right) \quad \begin{array}{l} \text{(sans aucune} \\ \text{approximation,} \\ \text{par superposition)} \end{array}$$

(Il s'agit bien ici d'un champ statique - si toutes les masses étaient immobiles, dans un calcul "classique" et non en relativité générale).

Pour simplifier, calculons le seul terme d'indice m (on rajoutera la somme sur m à la fin) :

$$- G \frac{m_m}{\|\vec{R} - \vec{r}_m\|^3} (\vec{R} - \vec{r}_m) = - G m_m \frac{1}{R^3} \left(1 - 2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}_m}{R^2} + \frac{r_m^2}{R^2} \right)^{-3/2} (\vec{R} - \vec{r}_m)$$

(expression exacte)

$$\text{On } (1 + \varepsilon)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{15}{8} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

D'où

$$- G \frac{m_m}{\|\vec{R} - \vec{r}_m\|^3} (\vec{R} - \vec{r}_m) = - \frac{G m_m}{R^3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(-2 \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}_m}{R^2} + \frac{r_m^2}{R^2} \right) + \frac{15}{8} \times 4 \frac{(\vec{R} \cdot \vec{r}_m)^2}{R^4} \right) (\vec{R} - \vec{r}_m)$$

(à l'ordre 2 en $\frac{r_m}{R}$)

Nous avons aussi que $\vec{R} \cdot \vec{r}_m = R r_m \cos \theta_m$

On arrive donc à :

$$\begin{aligned}
- G \frac{m_m}{\|\vec{R} - \vec{r}_m\|^3} (\vec{R} - \vec{r}_m) &= - \frac{G m_m}{R^3} \left(1 + 3 \frac{z_m}{R} - \frac{3}{2} \frac{r_m^2}{R^2} + \frac{15}{2} \frac{z_m^2}{R^2} \right) (\vec{R} - \vec{r}_m) \\
&= - \frac{G m_m}{R^2} \left(1 + 3 \frac{z_m}{R} - \frac{3}{2} \frac{r_m^2}{R^2} + \frac{15}{2} \frac{z_m^2}{R^2} \right) \left(\vec{e}_z - \frac{\vec{r}_m}{R} \right) \\
&= - \frac{G m_m}{R^2} \left(\vec{e}_z + 3 \frac{z_m}{R} \vec{e}_z + \left(\frac{15}{2} \frac{z_m^2}{R^2} - \frac{3}{2} \frac{r_m^2}{R^2} \right) \vec{e}_z \right. \\
&\quad \left. - \frac{z_m}{R} - 3 \frac{z_m}{R^2} \vec{r}_m \right) \quad \text{(toujours en ne gardant que les termes d'ordre 2)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\vec{g}(\vec{R}) = \sum_{m=1}^N \left\{ - \frac{G m_m}{R^2} \left(\underbrace{\vec{e}_z}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{\left(3 \frac{z_m}{R} \vec{e}_z - \frac{\vec{r}_m}{R} \right)}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\left(\left(\frac{15}{2} \frac{z_m^2}{R^2} - \frac{3}{2} \frac{r_m^2}{R^2} \right) \vec{e}_z - 3 \frac{z_m}{R^2} \vec{r}_m \right)}_{\text{ordre 2}} \right) \right\}$$

Q9) On a donc :

$$\begin{aligned}
g_x &= \sum_{m=1}^N \left\{ + \frac{G m_m}{R^2} \left(+ \frac{x_m}{R} + 3 \frac{x_m z_m}{R^2} \right) \right\} \\
&= \sum_{m=1}^N \left(\frac{G m_m x_m}{R^3} + \frac{3 G m_m x_m z_m}{R^4} \right)
\end{aligned}$$

Et on vérifie bien $\boxed{g_x = \frac{G D_{xx}}{R^3} + \frac{3 G Q_{xyz}}{R^4}}$.

On admet que pour g_y ça "marche" aussi, de manière similaire. —

$$\text{Or } g_z = \sum_{n=1}^N \left\{ -\frac{Gm_m}{R^2} \left(1 + \left(\frac{3z_m}{R} - \frac{z_m}{R} \right) + \left(\frac{15}{2} \frac{z_m^2}{R^2} - \frac{3}{2} \frac{x_m^2}{R^2} - 3 \frac{y_m^2}{R^2} \right) \right) \right\}$$

$$g_z = \sum_{n=1}^N \left\{ -\frac{Gm_m}{R^2} \left(1 + 2 \frac{z_m}{R} + \frac{9}{2} \frac{z_m^2}{R^2} - \frac{3}{2} \frac{x_m^2}{R^2} \right) \right\}$$

$$= \frac{9z_m^2 - 3(x_m^2 + y_m^2 + z_m^2)}{2R^2}$$

$$= \frac{6z_m^2 - 3x_m^2 - 3y_m^2}{2R^2} = \frac{3}{2R^2} (2z_m^2 - x_m^2 - y_m^2)$$

$$\text{Donc } g_z = -\frac{G}{R^2} \sum_{n=1}^N m_n - \frac{2G}{R^3} \sum_{n=1}^N m_n z_n - \frac{3G}{2R^4} \sum_{n=1}^N m_n (2z_n^2 - x_n^2 - y_n^2)$$

$$\text{On a bien } \boxed{g_z = -\frac{GM}{R^2} - \frac{2GD_z}{R^3} - \frac{3GQ_{zz}}{2R^4}}$$

Q10) C'est le principe même d'un développement limité...

$$\text{Par exemple } g_z = -\frac{GM}{R^2} \left(1 + 2 \frac{D_z}{MR} + \frac{9}{2} \frac{Q_{zz}}{MR^2} \right)$$

ordre 0
ordre 1
ordre 2

ordre 2 $\ll$ ordre 1 $\ll$ ordre 0 en ordres de grandeur.
(en $\frac{x}{R}$)

Si $R \gg x$, le terme prédominant est $g_z = -\frac{GM}{R^2}$
(et on peut négliger g_x et g_y)

$\Rightarrow$ on pourra souvent négliger les termes dipolaires et quadrupolaires devant $-\frac{GM}{R^2} \vec{e}_z$, ce qui revient

"suivant", à savoir le moment dipolaire, qui va intervenir dans le rayonnement. On peut même pressentir que c'est sa dérivée seconde par rapport au temps qui va jouer car on sait que seules les charges accélérées rayonnent une onde électromagnétique.

Q12) Si on a à faire localement à une onde plane de champ électrique $\vec{E}$, alors le vecteur de Poynting est

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} \right) = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \vec{e}_z = \epsilon_0 c E^2 \vec{e}_z$$

on note $\vec{e}_z$ la direction et le sens de propagation, conformément aux notations de cette partie I.2).

La puissance totale émise par la source s'obtient par intégration sur une très grande sphère de centre O de rayon R :

$$P = 4\pi R^2 \epsilon_0 c E^2$$

À un facteur numérique K près, on a donc :

$$4\pi R^2 \epsilon_0 c E^2 = K \frac{1}{\epsilon_0 c^3} \left(\frac{d^2 D_q}{dt^2} \right)^2$$

Et on a donc bien le champ $\vec{E}$ qui se comporte, à grande distance, comme

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2 R} \frac{d^2 D_q}{dt^2}$$

(le $\frac{1}{R}$ traduit seulement la dilution géométrique de la puissance de l'onde)

Q13) Il est "évident" que $M = c^{\infty}$ (indépendante de t).

Donc $\frac{dM}{dt} = 0$ et $\boxed{\frac{d^2M}{dt^2} = 0}$.

$$\text{Or } \frac{d^2 \vec{D}}{dt^2} = \sum_{n=1}^N m_n \vec{a}_n = M \vec{a}(G)$$

On énonce) "on suppose que le système est isolé"

$\Rightarrow \vec{a}(G) = \vec{0}$ (D'après le théorème de la quantité de mouvement).

D'où $\boxed{\frac{d^2 \vec{D}}{dt^2} = \vec{0}}$.

Q14) Relativité (restreinte ou générale) $\rightarrow$ on fait intervenir G et c

(à la place de E_0 pour l'électromagnétisme).

Par analogie avec les ondes électromagnétiques, l'amplitude de l'onde va décroître avec R . (en $\frac{1}{R}$ comme dans (14) ?

$\ddot{M}$ et $\ddot{D}$ étant nuls, il semble à voir...
Q15).

"naturel" que ce soit $\ddot{Q}$ qui intervienne...

Q15) On cherche l'analogue de l'équation (14).

$[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$ (par exemple à partir de $\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}$)

$[R] = L$

$[c] = L T^{-1}$

$[\ddot{Q}] = T^{-2} M L^2$

10/

h est sans dimension.

On veut donc former une grandeur sans dimension proportionnelle à $\ddot{Q}$, donc de la forme:

$$\ddot{Q} G^\alpha R^\beta c^\gamma$$

$$[\ddot{Q} G^\alpha R^\beta c^\gamma] = T^{-2} M L^2 M^{-\alpha} L^{3\alpha} T^{-2\alpha} L^\beta L^\gamma T^{-\gamma}$$

$$\text{on a donc } \begin{cases} 1 - \alpha = 0 \\ -2 - 2\alpha - \gamma = 0 \\ 2 + 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

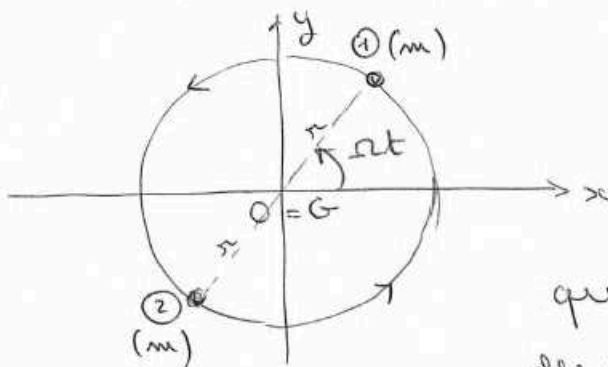
$$\text{D'où } \begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \gamma &= -4 \\ \beta &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{h \sim \frac{G \ddot{Q}}{R c^4}}$$

(en fait "donnée" plus bon par l'énoncé : cf (15)).

(on pourra consulter la page "onde gravitationnelle" sur wikipedia, c'est la "formule du quadripôle" d'Einstein).

(Q16)



Question en toute rigueur hors-programme, mais on est à l'ENS Ulm, et cette

question était aussi la première du problème X-ESPCI 2018 !)

→ il vaut mieux savoir la traiter!

Le PFD appliqué à un des 2 objets s'écrit, en projection sur $\vec{e}_r$:

$$-m\pi\Omega^2 = -G\frac{m^2}{4\pi^2}$$

$$\text{D'où } \left[\pi^3 = \frac{Gm}{4\Omega^2} \right]$$

$$\text{Et } \left[\|\vec{v}\| = \pi\Omega = \left(\frac{Gm\Omega}{4} \right)^{1/3} \right]$$

$$\text{on a aussi } \Omega^2 = \frac{Gm}{4\pi^3}$$

$$\|\vec{v}\| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Gm}{\pi}}$$

Mouvement non relativiste si $\frac{\|\vec{v}\|}{c} \ll 1$

$$\text{c'est-à-dire } \left[\frac{Gm\Omega}{c^3} \ll 1 \right] \text{ ou plutôt } \left[\frac{Gm}{\pi c^2} \ll 1 \right]$$

$$\text{Q17) } \left[E_c = 2 \times \frac{1}{2} m v^2 = m \frac{1}{4} \frac{Gm}{\pi} = \frac{Gm^2}{4\pi} \right]$$

$$\left[E_p = -\frac{Gm^2}{2\pi} \right]$$

$$\text{Rq: } E_{\text{méca}} = E_c + E_p = -\frac{Gm^2}{4\pi} < 0 \quad (\text{Normal: système lié!})$$

Pour un système non relativiste:

$$\frac{\frac{Gm^2}{\pi}}{mc^2} \xrightarrow{\text{pour } E_c, \text{ ou } E_p, \text{ ou } E_{\text{méca}}} \text{ (calculs en ordres de grandeur).} = \frac{Gm}{\pi c^2} = \frac{\|\vec{v}\|^2 \times 4}{c^2} \ll 1$$

$\searrow$ pour E_m

Très logiquement, pour un système non relativiste, les énergies E_c , E_p , $E_{\text{méca}}$ sont négligeables par rapport à l'énergie de masse du système -

$$Q_{18}) \text{ On a } Q = \sum_{m=1}^2 \frac{m}{3} \begin{pmatrix} 2x_m^2 - y_m^2 & 3x_m y_m & 0 \\ 3x_m y_m & 2y_m^2 - x_m^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x_m^2 - y_m^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } x_1(t) = r \cos(\Omega t) = -x_2(t)$$

$$y_1(t) = r \sin(\Omega t) = -y_2(t)$$

$$\begin{aligned} 2x_1^2 - y_1^2 &= r^2 (2\cos^2(\Omega t) - \sin^2(\Omega t)) = r^2 (\cos^2(\Omega t) + \cos(2\Omega t)) \\ 2x_2^2 - y_2^2 &= 2x_1^2 - y_1^2 = r^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos(2\Omega t) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y_1^2 - x_1^2 &= r^2 (2\sin^2(\Omega t) - \cos^2(\Omega t)) = r^2 (\sin^2(\Omega t) - \cos(2\Omega t)) \\ 2y_2^2 - x_2^2 &= 2y_1^2 - x_1^2 = r^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos(2\Omega t) \right) \end{aligned}$$

$$3x_1 y_1 = 3r^2 \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) = \frac{3}{2} r^2 \sin(2\Omega t)$$

$$3x_2 y_2 = 3x_1 y_1$$

$$-x_1^2 - y_1^2 = -r^2$$

$$-x_2^2 - y_2^2 = -r^2$$

En réalité on voit que la matrice $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ est la même pour $n=1$ et pour $n=2$, ce qui simplifie le calcul!

$$\text{Donc } Q = \frac{2mr^2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1+3\cos(2\Omega t)}{2} & \frac{3}{2}\sin(2\Omega t) & 0 \\ \frac{3}{2}\sin(2\Omega t) & \frac{1-3\cos(2\Omega t)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ou, encore plus simple :

$$Q = m r^2 \begin{pmatrix} \frac{1+3\cos(2\Omega t)}{3} & \sin(2\Omega t) & 0 \\ \sin(2\Omega t) & \frac{1-3\cos(2\Omega t)}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\ddot{Q} = m r^2 \begin{pmatrix} -4\Omega^2 \cos(2\Omega t) & -4\Omega^2 \sin(2\Omega t) & 0 \\ -4\Omega^2 \sin(2\Omega t) & 4\Omega^2 \cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{Q} = -4 m r^2 \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) & 0 \\ \sin(2\Omega t) & -\cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_{19}) \quad h = \frac{2G}{Rc^4} \times (-4 m r^2 \Omega^2) \begin{pmatrix} \cos(2\Omega(t - \frac{R}{c})) & \sin(2\Omega(t - \frac{R}{c})) \\ \sin(2\Omega(t - \frac{R}{c})) & -\cos(2\Omega(t - \frac{R}{c})) \end{pmatrix}$$

$$h = -2 \frac{G^2 m^2}{R c^4 r} \begin{pmatrix} \cos(2\Omega(t - \frac{R}{c})) & \sin(2\Omega(t - \frac{R}{c})) \\ \sin(2\Omega(t - \frac{R}{c})) & -\cos(2\Omega(t - \frac{R}{c})) \end{pmatrix}$$

Δ à ne pas confondre r (rayon des orbites des objets ponctuels) et R (distance d'"observation").

$$\text{D'où } \left[h = h_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + h_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{avec } h_+ = -2 \frac{G^2 m^2}{R c^4 r} \cos\left(2\Omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\right)$$

$$\left[\text{ou } h_- = -2 \frac{G^2 m^2}{R c^4 r} \sin\left(2\Omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\right) \right]$$

Q20) La fréquence de l'onde gravitationnelle est très clairement le DOUBLE de la fréquence de rotation de chacun des 2 objets :

$$\nu = 2 \times \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\Omega}{\pi}$$

Ceci provient évidemment du fait que les 2 masses sont identiques : chaque fois que le système a fait $\frac{1}{2}$ tour, on se retrouve dans une configuration absolument identique.

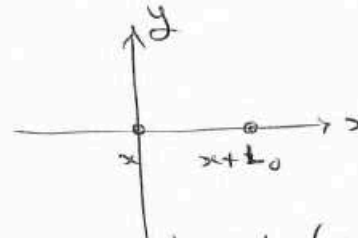
Q21) D'après Q19), les amplitudes $\bar{h}_+$ et $\bar{h}_x$ sont égales.

Résultat prévisible sans calcul car, intuitivement, toutes les directions transverses (c'est-à-dire dans le plan Oxy) sont équivalentes dans ce système.

C'est toutefois pas totalement trivial...

Il faudrait en fait reprendre la question 5 dans une configuration différente.

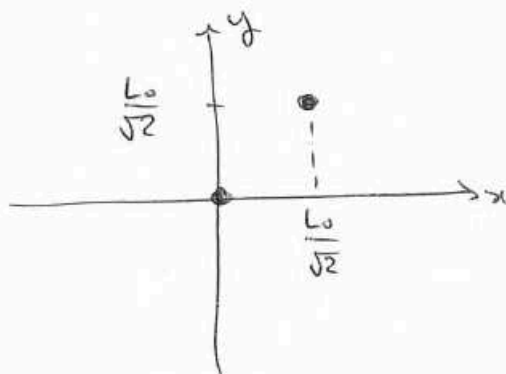
À la question 5 on a montré :



$$L = L_0 \left(1 + \frac{h_{xx}}{2} \right)$$

$$\text{d'où } dL = L_0 \frac{h_{xx}}{2} = L_0 \frac{h_+}{2}$$

Si maintenant on prend :



↗ valeur de Q4)

$$L = L_0 + \frac{1}{2L_0} \left(h_{xx} \frac{L_0^2}{2} + h_{xy} \frac{L_0^2}{2} + h_{yx} \frac{L_0^2}{2} + h_{yy} \frac{L_0^2}{2} \right)$$

$$L = L_0 + \frac{L_0}{4} (h_{xx} + h_{xy} + h_{yx} + h_{yy})$$

$$L = L_0 + \frac{L_0}{4} (h_+ + h_x + h_x - h_+)$$

$$L = L_0 + \frac{L_0}{2} h_x$$

$$\text{d'où } dL = L_0 \frac{h_x}{2}$$

La direction $\vec{e}_x$ et la direction $\frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$ étant équivalentes, on doit bien avoir les amplitudes des déformations dans ces deux directions qui doivent être égales : $\overline{h_+} = \overline{h_x}$.

(Avec n'a pas $h_+ = h_x$ car ces deux déformations sont déphasées).

$$Q22) \left[\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{\pi c}{\Omega} \right] = \frac{\pi c}{\sqrt{Gm}} 2\pi^{3/2}$$

On a une équation de d'Alembert.

$$= 2\pi \frac{c\sqrt{\pi}}{\sqrt{Gm}} \pi$$

Si le mouvement est non relativiste, on a

$$\frac{Gm}{\pi c^2} \ll 1 \quad \text{ou encore} \quad \frac{\sqrt{Gm}}{\sqrt{\pi} c} \ll 1.$$

$$\text{d'où} \quad \frac{c\sqrt{\pi}}{\sqrt{Gm}} \gg 1$$

$$\text{Et donc} \quad \boxed{\lambda \gg r}$$

On peut donc négliger le temps de propagation du champ gravitationnel à travers la source pour calculer les trajectoires des constituants (chacun des 2 objets ressent "instantanément" le champ gravitationnel créé par l'autre).

Ceci correspond à l'ARQS en électrocinétique (dimensions du système $\ll \lambda$).

$$Q23) \text{ D'après Q16), } \Omega^2 \text{ est en } \frac{1}{\pi^3}$$

$$\rightarrow \text{Si } \Omega \nearrow, \pi \downarrow \text{ et } \frac{1}{\pi} \nearrow.$$

$$\text{Or d'après Q19), l'amplitude est en } \frac{1}{\pi}.$$

$$\text{Donc, si } \Omega \nearrow, \frac{1}{\pi} \nearrow$$

L'augmentation de la fréquence de l'onde est tout à fait cohérente avec celle de l'amplitude

$$\Omega \nearrow, \text{ le rayon } \pi \text{ de l'orbite } \downarrow$$

$$\text{Et donc } \left(E_{\text{méca}} = E_c + E_p = - \frac{G m^2}{4\pi} \right) \downarrow$$

Rq: La situation est très similaire au satellite artificiel de la Terre qui, à cause du frottement sur l'atmosphère résiduelle, "spiral" vers la Terre: $r \downarrow$, $\Omega \uparrow$, $E_{\text{méca}} \downarrow$, $\|\vec{v}\| \uparrow$, $E_c \uparrow$ etc...

Ici la perte d'énergie mécanique n'est pas due à un frottement, mais, "tout simplement", à l'émission par le système d'ondes gravitationnelles, qui emportent de l'énergie.

Interruption du signal: car les deux trous noirs ont fusionné, n'en formant plus qu'un seul, pour lequel $\ddot{Q} = 0$ (il n'y a plus d'asymétrie de la répartition des masses).

$$Q24) \quad \overline{h_{+, \text{max}}} = \overline{h_{-, \text{max}}} = \frac{2 G^2 m^2}{R c^4 r_{\text{min}}}$$

$$m = 30 M_{\odot} = 30 \times 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$R = 440 \text{ Mpc} = 440 \times 3,09 \cdot 10^{22} \text{ m}$$

Plus que vaut r_{min} ? (juste avant la fusion des 2 trous noirs).

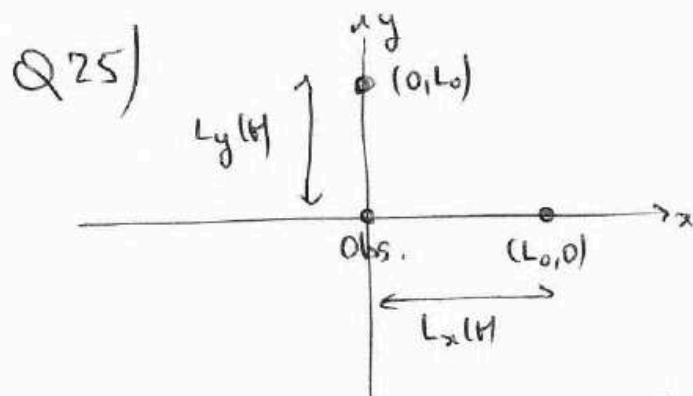
$$\text{On a } \Omega^2 = \frac{G m}{4 r^3} \quad r_{\text{min}} = \left(\frac{G m}{4 \Omega_{\text{max}}^2} \right)^{1/3}$$

$$\text{D'où } \overline{h_{+, \text{max}}} = \overline{h_{-, \text{max}}} = \frac{2^{5/3} G^{5/3} m^{5/3} \Omega_{\text{max}}^{2/3}}{R c^4}$$

$$\text{Avec } \Omega_{\text{max}} = \pi \times 150 \text{ rad.s}^{-1} \text{ (évacué)} \quad \left(\Delta \text{ par } \frac{2\pi \nu_{\text{max}}}{\text{voir Q20}} \right) \quad 18/$$

On arrive à $\boxed{\overline{h_{+,max}} = \overline{h_{x,max}} \approx 1,75 \cdot 10^{-21}}$

l'ordre de grandeur 10^{-21} est correct, on observe sur la figure 3 $h_{max} \approx 1 \cdot 10^{-21}$.



On a déjà $\boxed{\delta L_x(H) = \frac{L_0}{2} h_+(H)}$
(d'après Q5)).

Reprenons la question 5 pour la direction y :
(dx=0, dy=L0)

$$L_y = L_0 + \frac{h_{yy} L_0^2}{2 L_0} = L_0 \left(1 + \frac{h_{yy}}{2} \right)$$

d'où $\boxed{\delta L_y(H) = -\frac{L_0}{2} h_+(H)}$

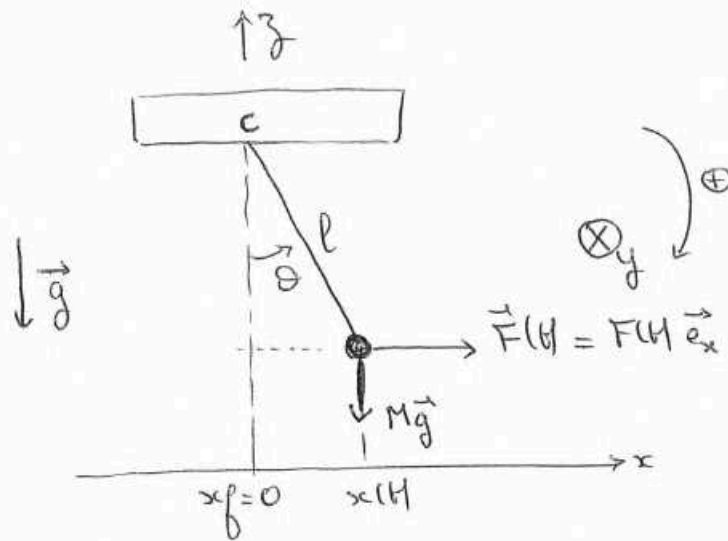
$\delta L_x(H)$ et $\delta L_y(H)$ sont en opposition de phase -

$\boxed{(\delta L_x)_{max} = \frac{L_0}{2} \overline{h_{+,max}} \approx 3,49 \cdot 10^{-18} \text{ m}}$ (sur 4 km !!!)

soit 1000 fois moins que la taille d'un noyau atomique

Il va falloir un détecteur performant !

Q26)



On a ici

$$x(t) = -l \sin \theta(t)$$

$$\boxed{x(t) \approx -l \theta(t)} \quad (\text{petits angles})$$

Le théorème du moment cinétique, appliqué dans le référentiel (galiléen) d'étude, au miroir, par rapport à l'axe fixe C_y , s'écrit :

$$M l^2 \ddot{\theta} = -M g l \sin \theta - F(t) l \cos \theta$$

$$\text{D'où } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = -\frac{F(t)}{M l} \cos \theta \quad \forall t.$$

Pour les petits angles ($|\theta| \ll 1$), on a $\sin \theta \approx \theta$ (à l'ordre 2) et $\cos \theta \approx 1$ en θ .

$$\text{D'où } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = -\frac{F(t)}{M l}$$

$$\text{et donc } \boxed{\ddot{x} + \frac{g}{l} x = \frac{F(t)}{M}} \quad \forall t. \quad \text{Posons } \left[\omega_0^2 = \frac{g}{l} \right]$$

En régime sinusoïdal forcé (pulsation ω) :

$$-\omega^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = \frac{F}{M} \quad (\text{en complexes})$$

$$\text{D'où } \boxed{x_0 = \frac{F}{M(\omega_0^2 - \omega^2)}}$$

Il y a résonance lorsque $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ (très classique --)

20/

Si $\omega \gg \omega_0$, $\left| x_0 \simeq -\frac{F}{M\omega^2} \right.$ (le - indique une opposition de phase entre $x(t)$ et $F(t)$).

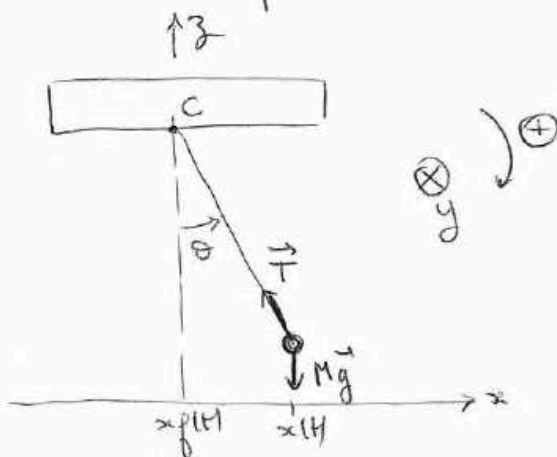
exactement comme si on avait un système de masse M soumis à la seule force $\vec{F}(t)$: $M\ddot{x}(t) = F(t)$

d'où en complexes $-M\omega^2 x_0 = \bar{F}$

Q27) On a maintenant $\vec{F}(t) = \vec{0}$ $\forall t$ mais $x_f(t) = a e^{i\omega t}$.

On pourrait se placer dans le référentiel (non galiléen) lié au point C de suspension du fil et en translation par rapport à $\mathcal{R}_0$ (terrestre).

On peut aussi rester dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ (terrestre, galiléen). Il est délicat (et hors-programme) d'appliquer alors un théorème du moment cinétique, car on ne dispose pas de point/d'axe fixe dans $\mathcal{R}_0$.



On a maintenant

$$x(t) - x_f(t) = -l \sin \theta(t)$$

d'où $\underline{x(t) - x_f(t) \simeq -l \theta(t)}$

Le PFD appliqué au point M s'écrit $M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{T}$

On projette sur x : $M\ddot{x} = T_x$

$$T_x = \|\vec{T}\| \sin \theta \simeq \|\vec{T}\| \theta$$

z : $M\ddot{z} = -Mg + T_z$

$$T_z = \|\vec{T}\| \cos \theta \simeq \|\vec{T}\|$$

Or $z = z_c - l \cos \theta \simeq z_c - l \Rightarrow \ddot{z} \simeq 0$

d'où $T_z = \|\vec{T}\| = Mg$

Et l'équation devient $M\ddot{x} = Mg\theta = Mg \frac{x_f - x}{l}$

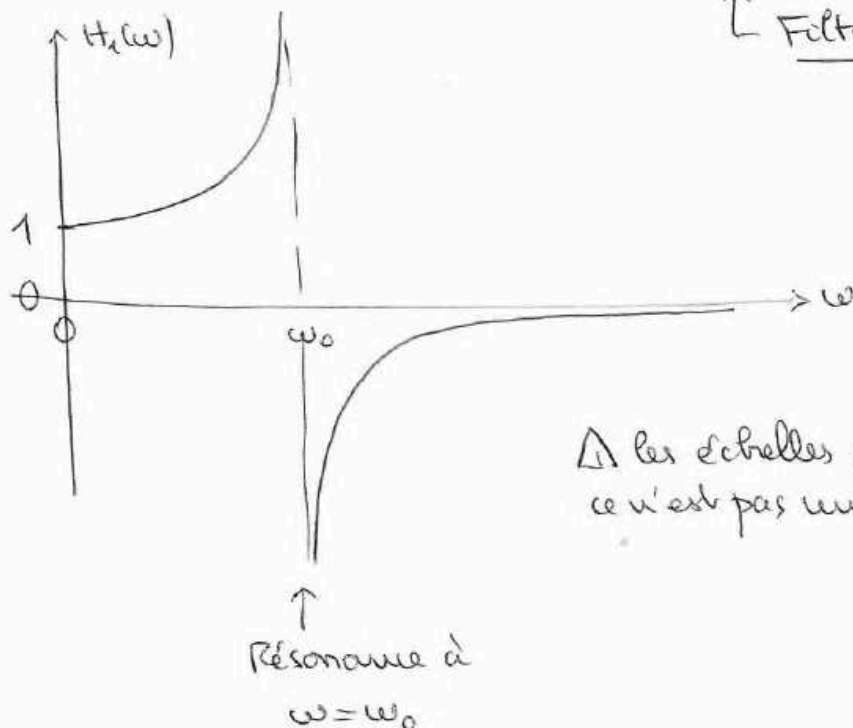
$\Rightarrow \underline{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_f(t)}$ $\forall t$.

L'équation est la même que au cas précédent, à condition de remplacer $\vec{F}(t)$ par $+M\omega_0^2 x_f(t) \vec{e}_x$.

Q28) En complexes : $-\omega^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = \omega_0^2 a$

$$\Rightarrow \boxed{H_1(\omega) = \frac{x_\omega}{a} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = - \frac{1}{1 + \left(i \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

↑ Filtre passe-bas d'ordre 2



Δ les échelles sont ici linéaires :
ce n'est pas un diagramme de Bode -

On peut facilement interpréter ces cas limites :

voir <https://vimeo.com/203776385>
de 4'00" à 4'30"

$$\omega \rightarrow 0 \quad H_1 \rightarrow 1 \quad x(t) = x_f(t)$$

↑
Mouvement des
cent du support

↑ le pendule "suit" le
support sans osciller.

$$\omega \rightarrow +\infty \quad H_1 \rightarrow 0 \quad x(t) \approx 0$$

↑
Mouvement très
rapide du support.

↑ la masse M ne bouge plus.

Pour filtrer efficacement les vibrations du support,
il faut que ω_0 soit $\ll$ à la pulsation ω de vibration
du support (plus exactement, à TOUTES les pulsations ω
de vibration du support — on peut grâce à Fourier décomposer
une vibration quelconque du support en superposition de
vibrations harmoniques).

Si on met N filtres de ce type en cascade, on s'attend à
 $H_N(\omega) \approx \frac{1}{\omega^{2N}}$ (pour $\omega \gg \omega_0$).

(on multiplie les N fonctions de transfert).
(apparemment $N=4$ pour LIGO)

2.2) Résonateurs optiques

$$\mathcal{E}(x,t) = E\left(t \pm \frac{x}{c}\right) e^{-i(\omega t \pm kx)}$$

On voit que, comme parfois en optique, la notation complexe
choisie ici est en $\exp[-i\omega t]$.

Q29) $\underline{\underline{E_i(x,t) = E_i e^{-i(\omega t - kx)}}$

L'onde E_i a donc une amplitude / une intensité constantes
 (que dire de f ?) $\rightarrow$ il s'agit d'une onde monochromatique (rapport du jury)
 Or $\left[k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \right]$ (on est dans le vide).

Q30) Le miroir ME étant infiniment mince, on a directement, par les amplitudes complexes:

$$\begin{cases} E_o(t) = r E_i + t' E_b(t) \\ E_c(t) = t E_i + r' E_b(t) \end{cases}$$

(toutes les ondes sont prises en $x=0$)
 Les $e^{-i\omega t}$ se simplifient,
 les $e^{\pm ikx}$ valent 1.

Q31) Le miroir ME étant "sans pertes", la puissance incidente se répartit entre l'onde réfléchie et l'onde transmise.

Donc, par l'onde qui arrive de $x = -\infty$: $\boxed{t^2 + r^2 = 1}$
 et, ————— de $x = +\infty$: $\boxed{t'^2 + r'^2 = 1}$

Par ailleurs il arrive sur le miroir E_i et E_b , il en repart E_c et E_o .

La conservation de l'énergie en valeurs moyennes s'écrit alors:

$$\langle E_i^2(t) + E_b^2(t) \rangle = \langle E_c^2(t) + E_o^2(t) \rangle \quad (\text{moyennes sur une période})$$

$$\text{soit } E_i^2 + E_b^2 = t^2 E_i^2 + 2tr' E_i E_b + r'^2 E_b^2 + r^2 E_i^2 + 2rt' E_i E_b + t'^2 E_b^2$$

($E_b(t)$ varie lentement et est $\sim$ constant sur une période)
 Avec $t^2 + r^2 = 1$ et $t'^2 + r'^2 = 1$ il reste:

$$2(tr' + r t') E_i E_b = 0 \text{ qui doit \u00eatre valable } \forall E_i \text{ et } \forall E_b.$$

$$\Rightarrow tr' + r t' = 0 \text{ soit (comme } t \text{ et } t' > 0): r' \sqrt{1-r^2} + r \sqrt{1-r'^2} = 0$$

$$\text{ou encore } r'^2(1-r^2) = r^2(1-r'^2) \Rightarrow r^2 = r'^2 \text{ (et donc } t^2 = t'^2)$$

$$\text{Comme on sait que } t \text{ et } t' \text{ sont } > 0, \text{ seule solution: } \boxed{t = t' \text{ et } r = -r'}$$

29/

Or donc

$$\begin{cases} E_o(t) = \rho E_i + \tau E_b(t) \\ E_c(t) = \tau E_i - \rho E_b(t) \end{cases}$$

Q 32) L'onde met θ temps $t_L = 2 \frac{L(t)}{c}$ pour faire un aller retour dans la cavité.

Ainsi $E_b(x=0^+, t) = E_c(x=0^+, t - t_L) \times (-1)$

$\uparrow$ retard dû à la propagation $\uparrow$ coefficient de réflexion sur HF

ce qui donne d'après (19): (on n'écrit pas les $e^{-i\omega t}$)

$$E_b(t) = E_c(t - t_L) \times (-1) \times \underbrace{e^{+i\omega t_L}}_{\text{terme dû à la propagation}} \quad \forall t$$

$e^{+i\omega t_L}$ car, ici, on a des ondes en $e^{-i\omega t}$.

D'où, après changement d'origine des temps, (on remplace t par $t + t_L$):

$$\boxed{E_c(t) = -E_b(t + t_L) e^{-i\omega t_L}} \quad \text{or} \quad \boxed{t_L = \frac{2L(t)}{c}}$$

Q 33) $L(t) = \underbrace{m \frac{d}{2}}_{L_0} + x(t) \quad m \text{ entier}$

$$|x(t)| \ll d \ll L_0$$

Or les variations temporelles de $E_b(t)$ sont très lentes devant $\frac{L_0}{c}$.

Laissons-nous guider par l'énoncé, qui nous donne vraiment toutes les étapes du calcul...

À l'ordre 0, $t_L = \frac{2L_0}{c}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left(-E_b(t+t_L) \right) &= -E_b(t) - t_L \frac{dE_b}{dt} \quad \text{à l'ordre 1.} \\ &= -E_b(t) - 2 \frac{L_0}{c} \frac{dE_b}{dt} \end{aligned}$$

Pour ailleurs $e^{-i\omega t_L} = e^{-i\omega \frac{1}{c}(nd+2x(t))} = e^{-2ikx(t)}$ car n entier $k = \frac{\omega}{c}$

donc $\left[e^{-i\omega t_L} \simeq 1 - 2ikx(t) \right]$ (car $|kx(t)| \ll 1$ puisque $|x(t)| \ll d$).

Donc $E_c(t) \simeq - \left(E_b(t) + 2 \frac{L_0}{c} \frac{dE_b}{dt} \right) (1 - 2ikx(t))$

$$\left[E_c(t) \simeq -E_b(t) + 2ikx(t)E_b(t) - 2 \frac{L_0}{c} \frac{dE_b}{dt} \right] \quad \text{à l'ordre 1.}$$

Q34)

On en a aussi $E_c(t) = \tau E_i - \rho E_b(t)$

d'où, en reportant (je salue 2-3 lignes de calcul):

$$\begin{aligned} \frac{dE_b}{dt} &= - \frac{c}{2L_0} \left\{ \tau E_i + (1 - \rho - 2ikx(t)) E_b(t) \right\} \\ &= - \frac{c}{2L_0} (1 - \rho) \left\{ \frac{\tau}{1 - \rho} E_i + \left(1 - \frac{2ikx(t)}{1 - \rho} \right) E_b(t) \right\} \end{aligned}$$

qui on peut effectivement écrire:

$$\left[\frac{dE_b}{dt} = -K \left\{ \frac{\tau}{1 - \rho} E_i + \left(1 - \frac{ix(t)}{\Lambda} \right) E_b(t) \right\} \right] \quad 26/$$

en posant $\boxed{K = \frac{c(1-\rho)}{2L_0}}$ et $\boxed{\Lambda = \frac{1-\rho}{2k}}$

Or $\rho = \sqrt{1-T} \simeq 1 - \frac{T}{2}$ si $T \ll 1$.

$\Rightarrow 1-\rho \simeq \frac{T}{2}$

et donc $\boxed{K \simeq \frac{cT}{4L_0}}$ et $\boxed{\Lambda \simeq \frac{T}{4k}}$

Q35) $\forall t, \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ (il n'y a aucune onde gravitationnelle).
 $LH = L_0 = n \frac{\lambda}{2}$ (nombre entier de demi longueurs d'onde).

Alors $\frac{dE_b}{dt} = 0$ (solution stationnaire)

et $E_b = \frac{-\frac{T}{1-\rho} E_i}{1}$ $\boxed{E_b = \frac{-T}{1-\rho} E_i}$

$T = 1,4 \cdot 10^{-2} = \tau^2$ $1-T = 0,986 = \rho^2$

$\boxed{\frac{P_{b,max}}{P_i} = \frac{E_b^2}{E_i^2} = \frac{\tau^2}{(1-\rho)^2} \simeq 284}$ $Rq: \frac{P_{b,max}}{P_i} \simeq \frac{T}{(\frac{T}{4})} = \frac{4}{T}$
 plus simplement

Si $P_i = 100 \text{ W}$, $\boxed{P_{b,max} \simeq 2,84 \cdot 10^4 \text{ W}}$

Concrètement: le miroir ME réfléchit beaucoup, transmet peu, les photons restent "piégés" longtemps entre ME et MF, ce qui augmente la puissance lumineuse.

Q36) On a donc pour $t > 0$:

$$\frac{dE_b}{dt} = -K E_b(t)$$

et donc, tout simplement : $E_b(t) = E_b(0) \exp(-Kt)$

$$\text{D'où } \boxed{P_b(t) = P_{b,\max} \exp(-2Kt)}$$

(les photons "quittent" le résonateur en sortant par ME).

Q37) Maintenant $x(t) = x_0$ constant (mais $\ll \lambda$) :

il n'y a pas d'onde gravitationnelle, mais la cavité n'est pas parfaitement réglée sur une résonance.

Solution stationnaire ($\frac{dE_b}{dt} = 0$) :

$$E_b = \frac{-\frac{\tau}{1-\rho} E_i}{1 - i \frac{x_0}{\Lambda}} = \frac{-\tau}{(1-\rho)(1 - i \frac{x_0}{\Lambda})} E_i$$

$$P_b = |E_b|^2 \quad P_i = |E_i|^2 \quad (\text{modules nécessaires maintenant})$$

$$\boxed{\frac{P_b}{P_i} = \frac{\tau^2}{(1-\rho)^2 \left(1 + \left(\frac{x_0}{\Lambda}\right)^2\right)}}$$

On aura $P_b = \frac{P_{b,\max}}{2}$ lorsque

$$\frac{1}{2} = \frac{\cancel{\tau^2} (1-\rho)^2}{(1-\rho)^2 \left(1 + \left(\frac{x_0}{\Lambda}\right)^2\right) \cancel{\tau^2}}$$

donc lorsque $\boxed{x_0 = \Lambda} \approx \frac{T}{4k}$

D'où $\boxed{x_0 = \frac{T}{4} \times \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1,4 \cdot 10^{-2} \times 1064 \cdot 10^{-9}}{8\pi} \approx 0,593 \text{ nm}}$
 $\quad \quad \quad = 5,6 \cdot 10^{-4} \lambda$

Il faut que la longueur de la cavité ne varie pas de plus de 0,6 nm environ si l'on veut qu'elle reste à résonance -

(sinon, la puissance lumineuse dans la cavité diminuera trop).

Q38) $x(t) = x_0 \cos(\Omega t)$ Il y a une onde gravitationnelle !

$$\Lambda = \frac{T}{4k} = 0,593 \text{ nm}$$

$$x_0 \approx 4 \cdot 10^3 \times 10^{-21} = 4 \cdot 10^{-18} \text{ m}$$

Donc on a bien $\boxed{\frac{x_0}{\Lambda} \ll 1} !$ (environ 10^{-8})

Récrivons l'équation (21) :

$$-i\Omega E_b^{(+)} e^{-i\Omega t} + i\Omega E_b^{(-)} e^{i\Omega t} = -K \left[\frac{T}{1-\rho} E_i + \left(1 - \frac{i(x_0 \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2})}{\Lambda} \right) \left(E_b^{(0)} + E_b^{(+)} e^{-i\Omega t} + E_b^{(-)} e^{i\Omega t} \right) \right]$$

$\forall t$

Il "suffit" alors d'identifier les termes indépendants de t , ceux en $e^{+i\Omega t}$ et ceux en $e^{-i\Omega t}$ (en négligeant, comme indiqué par l'énoncé, les produits entre les petites quantités. —) :

$$0 = \frac{\tau}{1-\rho} E_i + E_b^{(0)} \Rightarrow \boxed{E_b^{(0)} = -\frac{\tau}{1-\rho} E_i}$$

Pour les termes en $e^{+i\Omega t}$:

$$i\Omega E_b^{(+)} = -K \left[E_b^{(+)} - \frac{i x_0}{2\Lambda} E_b^{(0)} \right]$$

$$\text{Soit } (i\Omega + K) E_b^{(+)} = i \frac{K x_0}{2\Lambda} \frac{(-\tau)}{1-\rho} E_i$$

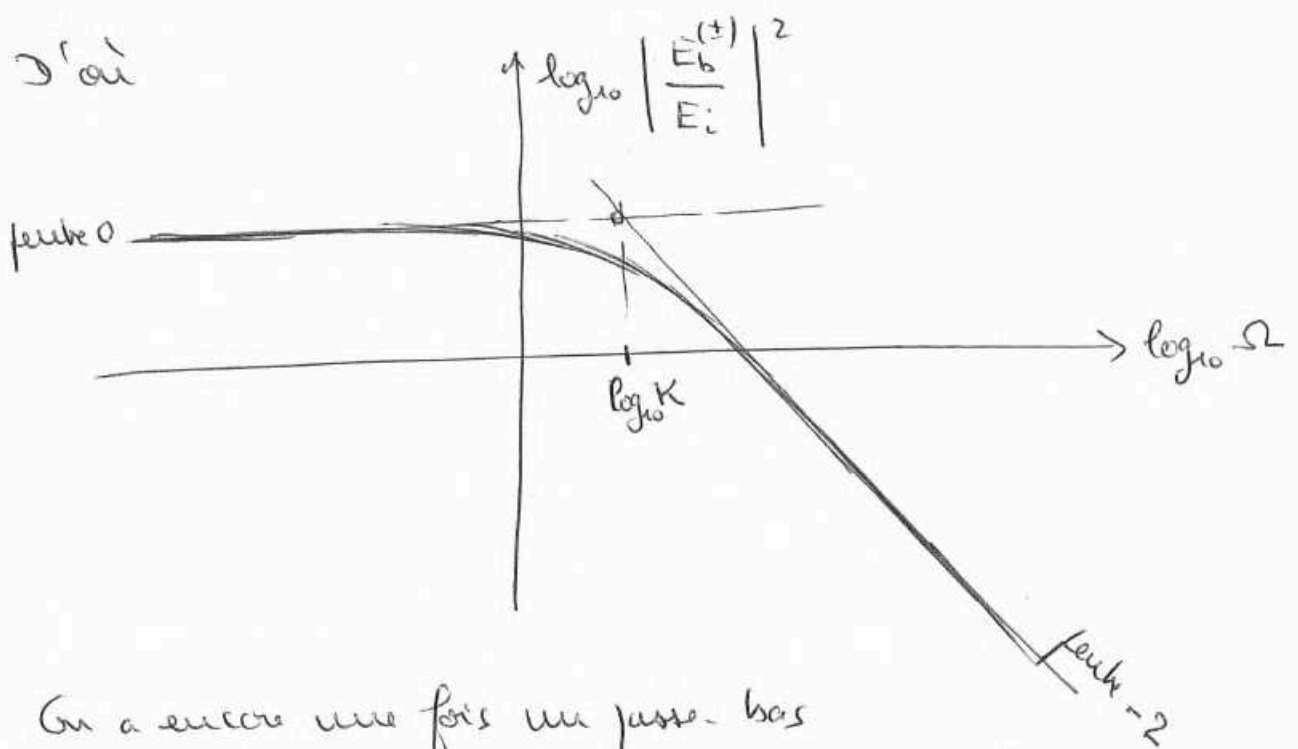
$$\boxed{E_b^{(+)} = -i \frac{\tau}{1-\rho} \frac{x_0}{2\Lambda} \frac{1}{1+i\frac{\Omega}{K}} E_i}$$

ce qui est exactement la formule demandée.

On admettra que, de même, on trouve

$$\boxed{E_b^{(-)} = -i \frac{\tau}{1-\rho} \frac{x_0}{2\Lambda} \frac{1}{1-i\frac{\Omega}{K}} E_i}$$

$$Q39) \left| \frac{E_b^{(\pm)}}{E_i} \right|^2 = \frac{\tau^2}{(1-\rho)^2} \left(\frac{x_0}{2\Lambda} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{\Omega^2}{K^2}}$$



On a encore une fois un passe-bas
d'ordre 1, la pulsation de coupure à -3dB
est $\Omega_c = K$

A.N. $\Omega_c = \frac{cT}{4L_0} \approx 2,63 \cdot 10^2 \text{ rad.s}^{-1}$
(soit une fréquence de 41,8 Hz)

Q40) On a $E_o(t) = \rho E_i + \tau E_b(t)$ (d'après Q31).

D'où $E_o(t) = \rho E_i + \tau \left(E_b^{(0)} + E_b^{(+)} e^{-i\Omega t} + E_b^{(-)} e^{i\Omega t} \right)$

Comme $\Omega \ll \Omega_c$, on a $E_b^{(\pm)} = -i \frac{\tau}{1-\rho} \frac{x_0}{2\Lambda} E_i$

D'où $E_o(t) = E_i \left\{ \rho + \tau \left(\frac{-\tau}{1-\rho} + \frac{-i\tau}{1-\rho} \frac{x_0}{2\Lambda} 2 \cos(\Omega t) \right) \right\}$

$= E_i \left\{ \underbrace{\rho - \frac{\tau^2}{1-\rho}}_{\frac{\rho - \rho^2 - \tau^2}{1-\rho}} - \frac{i\tau^2}{1-\rho} \frac{x_0}{\Lambda} \cos(\Omega t) \right\}$

$\frac{\rho - \rho^2 - \tau^2}{1-\rho} = \frac{\rho - 1}{1-\rho} = -1$

Par ailleurs à l'ordre 1 en T : $\rho = \sqrt{1-T} \approx 1 - \frac{T}{2}$
 $\Rightarrow 1 - \rho \approx \frac{T}{2}$ (où $T^2 = T$)

D'où $-\frac{i\tau^2}{1-\rho} \frac{x_0}{\Lambda} = -i \frac{T}{\frac{T}{2}} \frac{x_0}{\Lambda} = -2i \frac{x_0}{\Lambda}$

On a donc bien
$$E_0(t) = - \left(1 + 2i \frac{x_0}{\Lambda} \cos(\Omega t) \right) E_i \quad (25)$$

Q41) Onde incidente sur le résonateur "x" :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ix}(l_x \vec{e}_x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{E}_0(\vec{0}, t - \frac{l_x}{c}) && \text{(propagation dans le} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\omega(t - \frac{l_x}{c})} && \text{vide sur la distance } l_x \\ &&& \text{depuis 0)} \end{aligned}$$

Or $l_x = d \left(n' + \frac{\theta}{4\pi} \right) \Rightarrow \frac{\omega l_x}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} l_x = 2\pi \left(n' + \frac{\theta}{4\pi} \right) = n' 2\pi + \frac{\theta}{2}$

D'où
$$\mathcal{E}_{ix}(l_x \vec{e}_x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\omega t} e^{i\theta/2}$$

Et pour le résonateur "y" de même :

$$\mathcal{E}_{iy}(l_y \vec{e}_y, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{E}_0(\vec{0}, t - \frac{l_y}{c}) \quad \text{(on remplace } \theta \text{ par } -\theta)$$

$$\mathcal{E}_{iy}(l_y \vec{e}_y, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\omega t} e^{-i\theta/2}$$

Q42) On a donc d'après Q40) :

$$\vec{E}_{0x}(l_x \vec{e}_x, t) = - \left(1 + \frac{2ix_0}{\Lambda} \cos(\Omega t) \right) \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{i\theta/2} e^{-i\omega t}$$

Pour la voie y, il faut faire attention au fait que

$$l_y(t) = l_0 - x_0 \cos(\Omega t)$$



Il convient de remplacer x_0 par $-x_0$ (opposition de phase).

d'où

$$\vec{E}_{0y}(l_y \vec{e}_y, t) = - \left(1 - 2 \frac{ix_0}{\Lambda} \cos(\Omega t) \right) \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\theta/2} e^{-i\omega t}$$

Q43) On "repropage" ces champs de πE_x à SEP
et de πE_y à SEP

$$\vec{E}_{0x}(\vec{O}, t) = - \left(1 + \frac{2ix_0}{\Lambda} \cos(\Omega t) \right) \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{i\theta/2} e^{-i\omega(t - \frac{l_x}{c})}$$

compte tenu de l'indication de l'énoncé,
($\frac{\Omega l_x}{c} \simeq 0$) on ne prend pas en compte la
vitesse, négligeable, de ce terme

On a toujours $e^{i\omega \frac{l_x}{c}} = e^{i\theta/2}$

$$\Rightarrow \vec{E}_{0x}(\vec{O}, t) = - \left(1 + \frac{2ix_0}{\Lambda} \cos(\Omega t) \right) \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\theta} e^{-i\omega t}$$

De même

$$\vec{E}_{0y}(\vec{O}, t) = - \left(1 - \frac{2ix_0}{\Lambda} \cos(\Omega t) \right) \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} e^{-i\omega t}$$

Et donc, d'après (27) :

$$E_D(\vec{0}, t) = \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t} \left[\frac{2i x_0}{\Lambda} \cos(\Omega t) \right] (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\boxed{E_D(\vec{0}, t) = 2 \frac{i x_0}{\Lambda} (\cos \theta) E_0 \cos(\Omega t) e^{-i\omega t}}$$

Q44) D'où $P_D = 4 \frac{x_0^2}{\Lambda^2} \cos^2(\theta) \cos^2(\Omega t) P_0$ ($\cos(\Omega t)$ varie lentement)

Or $x(t) = x_0 \cos(\Omega t)$ donc

$$\boxed{P_D(t) = 4 \frac{x^2(t)}{\Lambda^2} \cos^2(\theta) P_0}$$

Avec $x_0 = \frac{L_0 h_0}{2}$

on a $\boxed{P_D(t) = \frac{L_0^2 h_0^2}{\Lambda^2} \cos^2(\Omega t) \cos^2(\theta) P_0}$

Pour augmenter la sensibilité du détecteur (c'est-à-dire augmenter l'amplitude de $P_D(t)$), on peut donc augmenter la longueur L_0 (mais 4 km, c'est déjà pas mal ! - attention au coût de la construction, à la courbure de la Terre...).
ou diminuer $\Lambda \simeq \frac{T}{4R} \simeq \frac{dT}{8\pi}$, c'est-à-dire diminuer la transmission T des miroirs d'entrée (ou encore diminuer d , mais l'énoncé n'en parle pas).

On rappelle toutefois que $\Omega_c = \frac{cT}{4L_0}$ (pulsation de coupure)

Si l'on $\nearrow L_0$ ou si l'on $\downarrow T$, dans les deux cas, on perd en bande passante, Ω_c va diminuer.

Cela se comprend bien : dans les deux cas, les photons restent plus longtemps dans le résonateur entre ME et MF. Or, pour qu'on puisse détecter l'onde gravitationnelle, il faut qu'elle varie suffisamment lentement.

Si les photons ont le temps de faire un ou plusieurs aller-retours entre ME et MF en une période $\frac{2\pi}{\Omega}$ de l'onde, ils ne "voient" que la longueur moyenne L_0 du résonateur et ne "voient" plus l'onde gravitationnelle.

Rq: on ne voit pas très bien par contre - à ce stade - l'utilité du paramètre θ . Il semble que pour maximiser la sensibilité il faille prendre $\theta = 0 \dots$ (mais voir Q51 ...).

Q45) $\theta = 0$

$$P_0 = 200 \text{ W}$$

$$\boxed{P_{\max} = \frac{L_0^2 h_0^2}{\lambda^2 T^2} 64\pi^2 P_0 \simeq 9,11 \cdot 10^{-15} \text{ W}}$$

$$\boxed{\Phi_{\max} = \frac{P_{\max}}{\frac{hc}{\lambda}} \simeq 4,87 \cdot 10^4 \text{ photons} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Q46) $Q(m, t) = e^{-\phi t} \frac{(\phi t)^m}{m!}$

ϕ flux moyen de photons
(>0 , en photons $\cdot s^{-1}$)

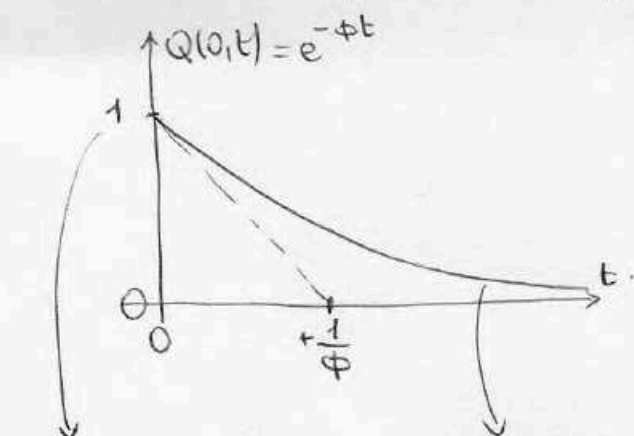
Probabilité de détecter m photons
($m \in \mathbb{N}$) pendant un intervalle de temps
de durée t ($t \in \mathbb{R}^+$, donc).

Il faut essayer de se "familiariser" avec cette expression... (non demandé !)

* $\sum_{m=0}^{+\infty} Q(m, t) = 1$ or $\forall t \in \mathbb{R}^+$: en effet $\sum_{m=0}^{+\infty} Q(m, t) = e^{-\phi t} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\phi t)^m}{m!} = e^{-\phi t} e^{+\phi t} = 1$
(normalisation de la probabilité)
(série de rayon de convergence infini).

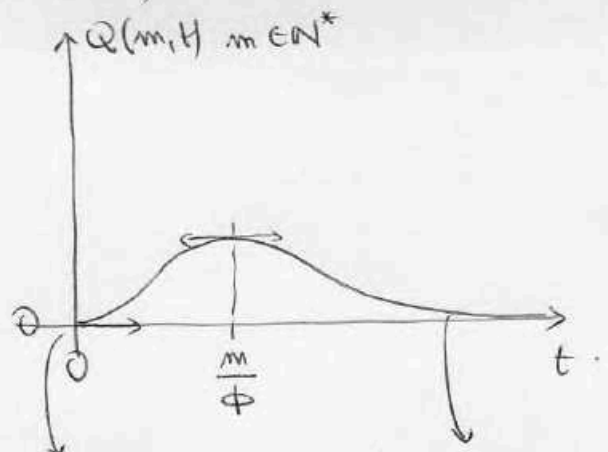
* $\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\phi^m}{m!} e^{-\phi t} [-\phi t^m + m t^{m-1}] = \frac{\phi^m t^{m-1}}{m!} e^{-\phi t} [m - \phi t]$

(à $m \in \mathbb{N}$ fixé) (le calcul n'est valable ainsi que pour $m \in \mathbb{N}^*$ mais on vérifie a posteriori que pour $m=0$ l'expression est valable)



En un intervalle de durée nulle, il est certain qu'on aura 0 photon.

quand $t \nearrow$, il est de moins en moins probable qu'on ait 0 photon



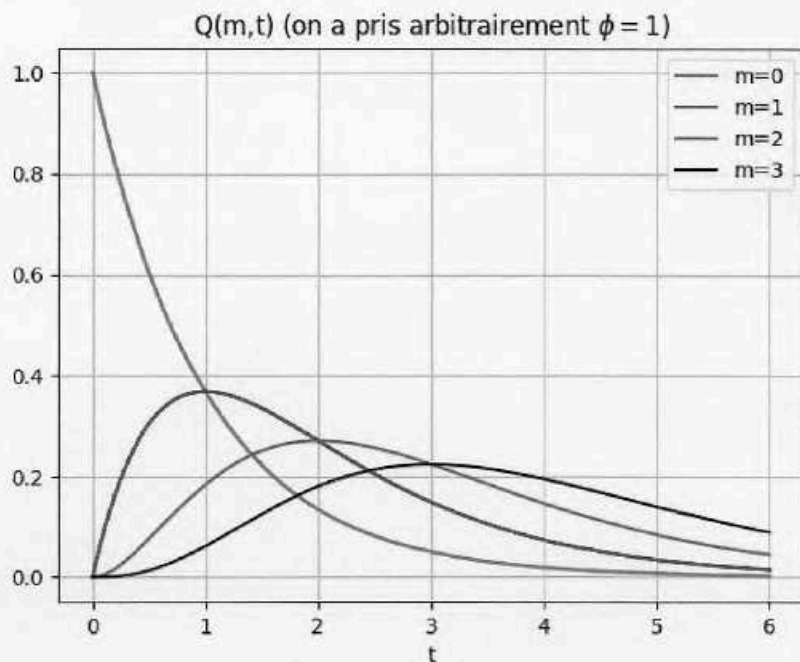
Impossible d'avoir m photons ($m > 0$) en un temps nul!

En un temps très long, on aura en général PLUS que m photons...

(Rq: pour $m=1$, la tangente à l'origine n'est pas horizontale).

(voir figures page suivante).

On a bien sûr $\boxed{P = \phi \times \frac{hc}{\lambda}}$
 ϕ (n.b de photons par s, en moyenne) s^{-1} J (énergie d'1 photon)



(on vérifie bien que $Q(m,t)$ a son maximum en $t = \frac{m}{\phi}$).

$$\langle m \rangle = \sum_{m=0}^{+\infty} m Q(m,t) \quad (t \text{ est fixé, } > 0)$$

ou 1, cela revient au même.

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} m e^{-\phi t} \frac{(\phi t)^m}{m!} = \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\phi t} \frac{(\phi t)^{m-1}}{(m-1)!} \times \phi t$$

$$= \phi t e^{-\phi t} \times \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\phi t)^m}{m!}}_{e^{+\phi t}}$$

J'ai on a bien

$$\boxed{\langle m \rangle = \phi t}$$

(valable aussi pour $t=0$)

ϕ est bien le flux moyen de photons : $\left[\phi = \frac{\langle m \rangle}{t} \right]$

Mais, en un intervalle de temps de durée t , on n'aura pas si coup sûr exactement ϕt photons (ne serait-ce d'ailleurs que parce que ϕt n'a aucune raison particulière d'être entier !): le nombre de photons reçus va fluctuer.

Voir la figure ci-dessus : par exemple à $t=3,5$, on aura parfois (rarement) 0 photon,

ou plus souvent 1 —

// // // 2 —

// // // 3 —

etc ... (il faudrait rajouter les autres courbes)

Calculons $\langle m^2 \rangle = \sum_{m=0}^{+\infty} m^2 Q(m, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} m^2 e^{-\phi t} \frac{(\phi t)^m}{m!}$

$$\begin{aligned} \langle m^2 \rangle &= \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-\phi t} m \frac{(\phi t)^m}{(m-1)!} = e^{-\phi t} \sum_{m=1}^{+\infty} (m-1+1) \frac{(\phi t)^m}{(m-1)!} \\ &= e^{-\phi t} \left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} (m-1) \frac{(\phi t)^m}{(m-1)!} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\phi t)^m}{(m-1)!} \right\} \\ &= e^{-\phi t} \left\{ \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(\phi t)^{m-2} (\phi t)^2}{(m-2)!} + \phi t \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\phi t)^{m-1}}{(m-1)!} \right\} \\ &= e^{-\phi t} \left\{ (\phi t)^2 \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\phi t)^m}{m!}}_{e^{\phi t}} + \phi t \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\phi t)^m}{m!}}_{e^{\phi t}} \right\} \end{aligned}$$

$$\langle m^2 \rangle = (\phi t)^2 + \phi t$$

Donc $\Delta m = \sqrt{\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2} = \sqrt{(\phi t)^2 + \phi t - (\phi t)^2}$

$$\Delta m = \sqrt{\phi t} = \sqrt{\langle m \rangle}$$

Q47) $\begin{cases} \phi_T = T \phi \\ \phi_R = (1-T) \phi \end{cases}$ (Flex moyen). ($\phi_T + \phi_R = \phi$ car miroir "sans pertes").

Supposons que l'on a exactement $k+l$ photons ($(k, l) \in \mathbb{N}^2$) incidents. Chacun de ces $(k+l)$ photons a la probabilité T d'être transmis (et $(1-T)$ d'être réfléchi)

Donc la probabilité que k photons soient transmis:

$$\begin{aligned} P(k \text{ photons transmis}) &= \binom{k+l}{k} T^k (1-T)^l \\ &\text{si on en a } (k+l) \text{ incidents.} \end{aligned} \quad \text{(loi binomiale)}$$

Mais le nombre de photons incidents est décrit par la statistique Poissonnienne (28) --

Comment avoir k photons transmis ET l photons réfléchis ?

- en ayant $(k+l)$ photons incidents: probabilité $Q(k+l, t)$

- ET en en ayant, parmi ces $(k+l)$, k transmis (il y en aura alors forcément l réfléchis): probabilité $\binom{k+l}{k} T^k (1-T)^l$

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(k, l, t) &= Q(k+l, t) \times \binom{k+l}{k} T^k (1-T)^l \\ &= e^{-\phi t} \frac{(\phi t)^{k+l}}{(k+l)!} \binom{k+l}{k} T^k (1-T)^l \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \text{transmis} \\ P(k, l, t) = e^{-\phi t} \frac{(\phi t)^{k+l}}{k! l!} T^k (1-T)^l \\ \text{réfléchi} \end{matrix}}$$

Statistique des photons transmis:

$$\begin{aligned} P(k, t) &= \sum_{l=0}^{+\infty} P(k, l, t) = \sum_{l=0}^{+\infty} e^{-\phi t} \frac{(\phi t)^{k+l}}{k! l!} T^k (1-T)^l \\ &= e^{-\phi t} \frac{(\phi t)^k}{k!} T^k \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(\phi t)^l}{l!} (1-T)^l \\ &= e^{-\phi t} \frac{(\phi t)^k}{k!} T^k \underbrace{\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{[(1-T)\phi t]^l}{l!}}_{e^{(1-T)\phi t}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \text{transmis} \\ \text{Donc } P(k, t) = \frac{(\phi t)^k}{k!} T^k e^{-T\phi t} = e^{-T\phi t} \frac{(T\phi t)^k}{k!} \end{matrix}}$$

// c'est bien une loi Poissonnienne pour le flux moyen de photons égal à $T\phi$.

Statistique du faisceau réfléchi:

$$P(l_{\text{réfléchi}}, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k, l, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\phi t} \frac{(\phi t)^{k+l}}{k! l!} T^k (1-T)^l$$

(le calcul est exactement du même type)

On arrive à

$$P(l_{\text{réfléchi}}, t) = e^{- (1-T)\phi t} \frac{[(1-T)\phi t]^l}{l!}$$

(c'est bien une loi Poissonienne pour le flux moyen de photons égal à $(1-T)\phi$.)

Q48) $\Delta m = \sqrt{\phi t}$ donc $\frac{\Delta m}{\langle m \rangle} = \frac{\sqrt{\phi t}}{\phi t} = \frac{1}{\sqrt{\phi t}} = \frac{1}{\sqrt{\langle m \rangle}}$

Donc si $\langle m \rangle \gg 1$, alors $\frac{\Delta m}{\langle m \rangle} \ll 1$: $\Delta m \ll \langle m \rangle$.

(Traduction : plus le nombre de photons est important, plus les fluctuations relatives sont faibles.)

On a $\sqrt{m} = \sqrt{\langle m \rangle + m - \langle m \rangle}$ (incontestable !)

$$= \sqrt{\langle m \rangle} \left(1 + \frac{m - \langle m \rangle}{\langle m \rangle} \right)^{1/2}$$

si $\langle m \rangle \gg 1$ alors cette quantité sera $\ll 1$ (voir ci-dessus)

D'où $\sqrt{m} \simeq \sqrt{\langle m \rangle} \left(1 + \frac{m - \langle m \rangle}{2 \langle m \rangle} \right)$ (DL à l'ordre 1 en $\frac{\Delta m}{\langle m \rangle}$).

quantité nulle en valeur moyenne, par définition de $\langle m \rangle$.

D'où on a bien $\langle \sqrt{m} \rangle \simeq \sqrt{\langle m \rangle}$ (29)

Pour le second calcul, il va falloir pousser le D.L. de $\sqrt{m}$ à l'ordre 2... (sinon on trouve 0...)

$$\text{On a } (\sqrt{m})^2 = m \Rightarrow \underline{\langle (\sqrt{m})^2 \rangle = \langle m \rangle}$$

Et par ailleurs,

$$\sqrt{m} \approx \sqrt{\langle m \rangle} \left(1 + \frac{m - \langle m \rangle}{2 \langle m \rangle} - \frac{1}{8} \frac{m^2 - 2m \langle m \rangle + \langle m \rangle^2}{\langle m \rangle^2} \right) \quad (D.L. 2)$$

$$\text{Soit } \langle \sqrt{m} \rangle = \sqrt{\langle m \rangle} \left(1 + 0 - \frac{1}{8} \times \frac{\langle m^2 \rangle - 2 \langle m \rangle^2 + \langle m \rangle^2}{\langle m \rangle^2} \right)$$

$$= \sqrt{\langle m \rangle} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2}{\langle m \rangle^2} \right)$$

$$= \sqrt{\langle m \rangle} \left(1 - \frac{(\Delta m)^2}{8 \langle m \rangle^2} \right)$$

$$= \sqrt{\langle m \rangle} \left(1 - \frac{\langle m \rangle}{8 \langle m \rangle^2} \right)$$

$$= \sqrt{\langle m \rangle} \left(1 - \frac{1}{8 \langle m \rangle} \right)$$

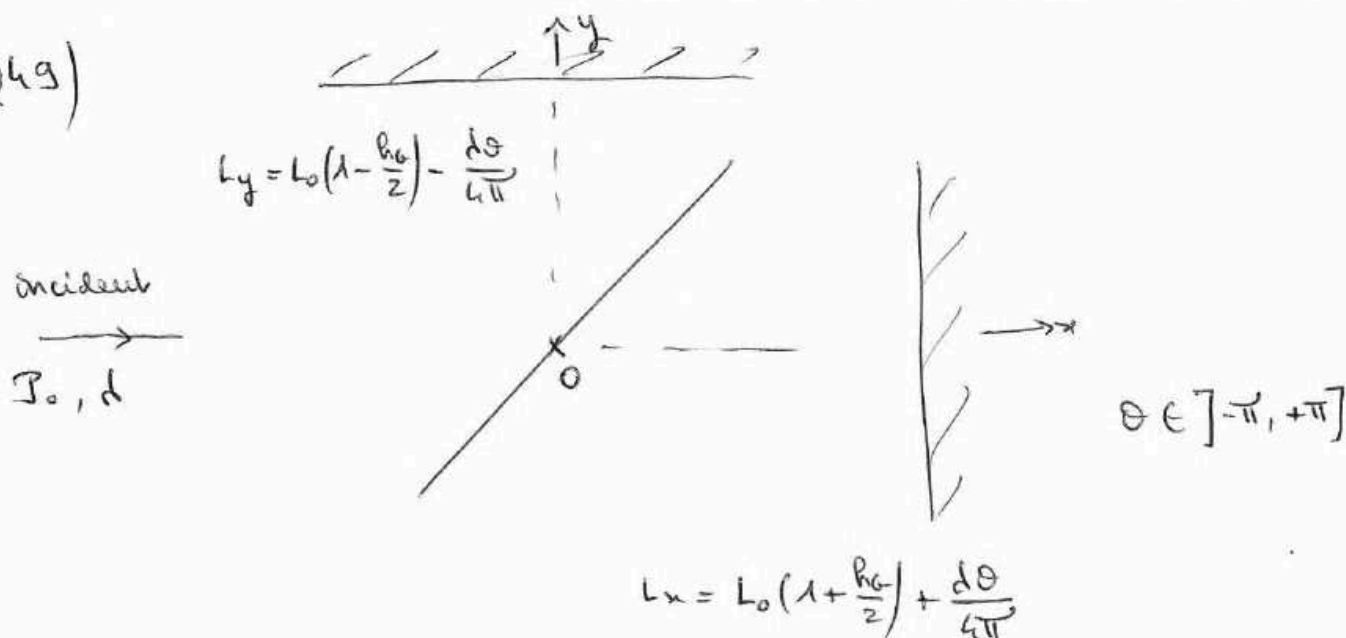
$$\text{Soit } \langle \sqrt{m} \rangle^2 = \langle m \rangle \left(1 - \frac{1}{4 \langle m \rangle} \right)$$

$$\text{Et donc } \Delta \sqrt{m} = \sqrt{\langle (\sqrt{m})^2 \rangle - \langle \sqrt{m} \rangle^2} \approx \sqrt{\langle m \rangle - \langle m \rangle + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\Delta \sqrt{m} = \frac{1}{2}} \quad (30)$$

(écart-type pour $\sqrt{m}$).

Q49)



$$E_{0y}(\vec{O}, t) = \frac{E_0(\vec{O}, t)}{\sqrt{2}} \times e^{ik2L_y} \times (-1)$$

ce qui revient dans le bras y

retard dû à l'aller-retour dans le bras y.

réflexion sur le miroir.

De même $E_{0x}(\vec{O}, t) = \frac{E_0(\vec{O}, t)}{\sqrt{2}} \times e^{ik2L_x} \times (-1)$

on a bien
 $\hat{u} \left[k = \frac{2\pi}{\lambda} \right]$

$$\begin{aligned} \text{Donc } E_D(\vec{O}, t) &= -\frac{E_0(\vec{O}, t)}{2} \left(e^{ik2L_y} - e^{ik2L_x} \right) \\ &= -\frac{E_0(\vec{O}, t)}{2} \left(e^{i2k \left[L_0(1 - \frac{h_0}{2}) - \frac{\lambda\theta}{4\pi} \right]} - e^{i2k \left[L_0(1 + \frac{h_0}{2}) + \frac{\lambda\theta}{4\pi} \right]} \right) \\ &= -\frac{E_0(\vec{O}, t)}{2} e^{i2kL_0} \left(e^{-i2k \left[L_0 \frac{h_0}{2} + \frac{\lambda\theta}{4\pi} \right]} - e^{i2k \left[L_0 \frac{h_0}{2} + \frac{\lambda\theta}{4\pi} \right]} \right) \\ &= -\frac{E_0(\vec{O}, t)}{2} e^{i2kL_0} \times (-2i) \sin \left(2k \left(L_0 \frac{h_0}{2} + \frac{\lambda\theta}{4\pi} \right) \right) \end{aligned}$$

$$E_D(\vec{O}, t) = +i E_0(\vec{O}, t) e^{i2kL_0} \sin \left(kL_0 h_0 + \theta \right)$$

Donc $I_D = I_0 \sin^2(kL_0 h_0 + \theta)$

ce qui varie entre 0 et I_0 ,
 ce qui semble physiquement satisfaisant

Q50) D'où $\boxed{\Phi_D = \Phi_0 \sin^2(kL_0 h_G + \theta)}$ (flux moyen).

Pendant une durée t , on a donc

$\boxed{\langle m_D \rangle = \Phi_D t}$ (voir Q.46).

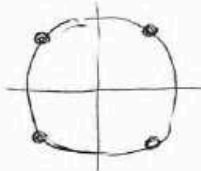
ou $\boxed{\Delta m_D = \sqrt{\Phi_D t}}$

Q51) $\frac{\partial \langle m_D \rangle}{\partial h_G} = \frac{\partial \Phi_D}{\partial h_G} \times t = \Phi_0 2 \sin(kL_0 h_G + \theta) kL_0 \cos(kL_0 h_G + \theta) t$
 $= \Phi_0 kL_0 t \sin[2(kL_0 h_G + \theta)]$

D'où la sensibilité $\boxed{\left| \frac{\partial \langle m_D \rangle}{\partial h_G} \right| = \Phi_0 kL_0 t \left| \sin(2(kL_0 h_G + \theta)) \right|}$.

Si $h_G \rightarrow 0$, cette sensibilité est maximale pour $\sin(2\theta) = \pm 1$.

4 valeurs possibles pour θ_1



soit $2\theta \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

soit $\boxed{\theta_1 \equiv \frac{\pi}{4} \quad \left[\frac{\pi}{2}\right]}$

Et alors $\Phi_D \approx \Phi_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\Phi_0}{2}$ (même valeur quel que soit le choix de θ_1 parmi ces 4 valeurs possibles)

d'où $\boxed{\langle m_D \rangle = \frac{1}{2} \Phi_0 t}$ (la moitié des photons émis parviennent au détecteur)

Q52) $\frac{1}{\Delta m_D} \left| \frac{\partial \langle m_D \rangle}{\partial h_G} \right| = \frac{\Phi_0 kL_0 t \left| \sin(2(kL_0 h_G + \theta)) \right|}{\sqrt{\Phi_0} \left| \sin(kL_0 h_G + \theta) \right| \sqrt{t}}$

$\boxed{\frac{1}{\Delta m_D} \left| \frac{\partial \langle m_D \rangle}{\partial h_G} \right| = \sqrt{\Phi_0} t kL_0 2 \left| \cos(kL_0 h_G + \theta) \right|}$

Pour $h_G \rightarrow 0$, cette grandeur est maximisée lorsque $\cos \theta = \pm 1$
 c'est-à-dire $\boxed{\theta_2 \equiv 0 \quad [\pi]}$

On peut noter que, alors, $\langle m_D \rangle = 0$ (dans la limite $\hbar_G \rightarrow 0$)

// (on se place dans une situation d'interférences
destructives en direction du détecteur).

On choisit cette valeur de Θ_2 car ...

$$Q53) \quad \Phi_D = \Phi_0 (k L_0 \hbar_G)^2 \quad \left(\frac{\hbar_G L_0}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow k L_0 \hbar_G \ll 1 \right).$$

$$\Rightarrow \frac{\langle m_D \rangle}{t} = \Phi_0 k^2 L_0^2 \hbar_G^2 \quad \text{d'où} \quad |\hbar_G| = \sqrt{\frac{\langle m_D \rangle}{\Phi_0 k^2 L_0^2 t}}.$$

$$|\hbar_G| = \frac{1}{k L_0} \sqrt{\frac{\langle m_D \rangle}{\Phi_0 t}}$$

$$\text{D'où sans doute} \quad \Delta \hbar_G^{(D)} = \frac{1}{k L_0} \times \frac{1}{\sqrt{\Phi_0 t}} \times \frac{1}{2} \quad (\text{d'après Q48})$$

Q54) Il y a un flux moyen de photons de $\frac{\Phi_0}{2}$ dans chacun des 2 bras (pour simplifier, dans cette partie, on n'a pas pris en compte les résonateurs).

$$\text{D'où} \quad \left[\langle m_x \rangle = \frac{\Phi_0}{2} t \quad \langle m_y \rangle = \frac{\Phi_0}{2} t \right]$$

$$\left[\Delta m_x = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2} t} \quad \Delta m_y = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2} t} \right]$$

D'après la fin de la question Q47, ces fluctuations statistiques seraient décorrélées ? -

Q55) Quantité de mouvement d'un photon : $\boxed{\vec{p} = \hbar \vec{k}}$

S'il est réfléchi sur un miroir :

$$\begin{aligned} \hbar \vec{k} &= \vec{p}_{\text{avant}} \\ -\hbar \vec{k} &= \vec{p}_{\text{après}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{p}_{\text{photon}} &= \vec{p}_{\text{après}} - \vec{p}_{\text{avant}} \\ &= -2\hbar \vec{k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{p}_{\text{miroir}} = +2\hbar \vec{k}} \quad \text{pour 1 photon.}$$

D'où une force moyenne exercée sur les miroirs :

$$\boxed{\frac{\langle m_x \rangle}{t} = \Phi_0 \hbar k}$$

(qui "pousse" le miroir dans la direction d'incidence des photons).

Q56) Entre t_0 et t :

$$\text{quantité de mouvement transférée} = m_x \times 2\hbar k$$

D'où l'écart type de la q.d.m. transférée : $2\hbar k \Delta m_x$.

$$= 2\hbar k \sqrt{\frac{\Phi_0 t}{2}}$$

D'où l'écart type pour les vitesses :

$$\boxed{\frac{2\hbar k}{M} \sqrt{\frac{\Phi_0 t}{2}}}$$

$$\text{D'où } \Delta L_x \text{ et } \Delta L_y = \sqrt{2\Phi_0} \frac{\hbar k}{M} t^{3/2} \dots ?$$