

Interaction laser plasma à haut éclairement

Filière MP

Mohamed Afekir (cpgeafek@yahoo.fr)

Mes remerciements à Mr :

Thami Elhalkouj : Lydex Ben Guerir
pour la lecture du corrigé

I. – Génération d'harmoniques dans les gaz

I.A – Champ laser et champ coulombien

- 1– La force électrique coulombienne subie par l'électron :

$$\vec{F}_c = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

$\vec{F}_c$ est colinéaire à $\vec{r} \Rightarrow$ force centrale !

$$\vec{F}_c = -\vec{\text{grad}} W_p = -\frac{dW_p(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \frac{dW_p(r)}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow W_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} ; \quad \left(\lim_{r \rightarrow \infty} W_p(r) = 0 \right)$$

- 2– L'énergie mécanique :

$$W_m = W_c + W_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron ; avec $\vec{v} = v\hat{u}_\theta$:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \left(\frac{dv}{dt} \hat{u}_\theta - \frac{v^2}{r} \hat{u}_r \right) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

$$\Rightarrow m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow W_c = -\frac{W_p}{2}$$

Soit :

$$W_m = \frac{W_p}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$mvr = n\hbar \Rightarrow \frac{n^2 \hbar^2}{mr^3} = \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} n^2 = a_o n^2 \quad \text{avec} \quad a_o = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = \frac{\epsilon_o \hbar}{\pi m e^2}$$

Lorsque l'électron est dans son état fondamental : $n = 1$ et $r_1 = a_o \simeq 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

$$-W_o = \frac{W_p}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_o} \simeq 13,4 \text{ eV}$$

- 3– On donne $a_o = \frac{1}{2} 10^{-10} \text{ m}$

$$\vec{F}_c = -e \vec{E}_c \Rightarrow E_c = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_o^2} \simeq 5,7 \cdot 10^{11} \text{ V.m}^{-1}$$

La puissance P de l'impulsion laser :

$$P = \frac{W_T}{T} = \begin{cases} P_{\text{gaz}} = \frac{10^{-3}}{50 \cdot 10^{-15}} = 20,0 \text{ GW} & \text{sur une cible gazeuse} \\ P_{\text{solide}} = \frac{1}{30 \cdot 10^{-15}} = 33,3 \cdot 10^3 \text{ GW} & \text{sur une cible solide} \end{cases}$$

L'amplitude du champ électrique laser :

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{\pi R^2} = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E^2 \Rightarrow E(z) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2P}{c \varepsilon_0 \pi}} = \frac{1}{R_o} \sqrt{\frac{2P}{c \varepsilon_0 \pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_o}\right)^2}} \quad (\text{Au voisinage du foyer } O)$$

Soient :

$$E_\ell = E(z = -f') = \sqrt{\frac{2P}{c \varepsilon_0 \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}} = \frac{2}{D} \sqrt{\frac{2P}{c \varepsilon_0 \pi}} \quad \text{et} \quad E_f = E(z = 0) = \frac{1}{R_o} \sqrt{\frac{2P}{c \varepsilon_0 \pi}}$$

Application numérique : on a $\tan \alpha = \frac{D}{2f'} = \frac{\lambda_o}{\pi R_o}$ et $P = P_{\text{gaz}} = 20 \text{ GW}$;

$$\Rightarrow E_f = \frac{\pi D}{2f' \lambda_o} \sqrt{\frac{2P_{\text{gaz}}}{c \varepsilon_0 \pi}} \simeq 5,1 \cdot 10^{11} \text{ V.m}^{-1}$$

$$\frac{E_c}{E_f} \simeq 1,1 \Rightarrow E_c \simeq E_f !$$

La focalisation du faisceau laser a, donc, permet l'ionisation de la matière.

I.B – Un mécanisme en trois étapes

□ 4– Sous l'action de $\vec{E}(z, t)$, l'électron se déplace suivant x ; le mouvement suivant x est, donc, négligeable !

À l'échelle atomique, z est de l'ordre de $1 \text{ \AA}$:

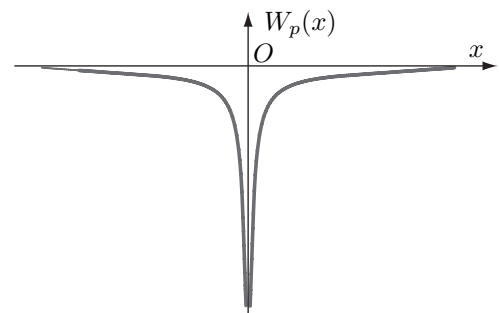
$$k_o z = \frac{2\pi}{\lambda_o} z \simeq 7,85 \cdot 10^{-4} \ll 1 \Rightarrow \vec{E}(z, t) \simeq E_f \cos(\omega_o t) \hat{u}_x$$

□ 5– Énergie potentielle d'interaction :

$$W_p(x) = -\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_o |x|} + C$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} W_p(x) = 0 = C$$

Elle correspond bien à l'allure donnée sur la figure II.a



□ 6–

○ Force de Lorentz :

$$\vec{f}_{\text{lor}} = -e \left(\vec{E}(z, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(z, t) \right)$$

○ Relation de structure :

$$\vec{B}(z, t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}(z, t)}{\omega}$$

○ La force de Lorentz $\vec{f}_{\text{lor}}$ est conservative si la contribution magnétique est négligeable !

- L'énergie potentielle $W_{p,\text{las}}(x, t)$:

$$\delta W(\vec{f}_{\text{lor}}) = \vec{f}_{\text{lor}} \cdot d\vec{r} = -e\vec{E}(z, t) \cdot \hat{u}_x dx = -eE_f dx \cos(\omega_o t) = -dW_{p,\text{las}}(x, t)$$

Soit :

$$\boxed{W_{p,\text{las}}(x, t) = exE_f \cos(\omega_o t)} \quad (\text{on prend l'origine de l'énergie potentielle en } x = 0)$$

- L'énergie potentielle totale :

$$\boxed{W_{p,\text{tot}}(x, t) = exE_f \cos(\omega_o t) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o|x|}}$$

D'après la figure **II.b**, le champ électrique est suivant le sens des x décroissant !

□ **7-** Dans la figure **II.b**, la courbe en pointillés correspond à $W_{p,\text{las}}(x, t)$ qui est une droite de pente négative : le terme $eE_f \cos(\omega_o t)$ est, alors, négatif ! L'énergie potentielle totale est :

$$W_{p,\text{tot}}(x, t_o) = -exE_f - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o|x|} \quad \text{tel que} \quad \cos(\omega_o t_o) = -1 \quad \text{ou} \quad \boxed{t_o = \frac{\pi}{\omega_o}}$$

L'autre instant possible est celui où le champ électrique laser change de sens. L'énergie potentielle totale est :

$$W_{p,\text{tot}}(x, t_1) = +exE_f - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o|x|} \quad \text{tel que} \quad \cos(\omega_o t_1) = +1 \quad \text{ou} \quad \boxed{t_1 = \frac{2\pi}{\omega_o}}$$

- À l'instant $t_o = \frac{\pi}{\omega_o} = \frac{T_o}{2}$, l'électron, accéléré par le champ laser, s'éloigne du noyau !
- À l'instant $t_1 = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2t_o = T_o$, l'électron, décéléré par le champ laser, se rapproche du noyau !

La position $\tilde{x}_o$ correspondant au maximum de $W_{p,\text{tot}}(x, t)$:

- À l'instant t_o où ($\tilde{x}_o > 0$) :

$$W_{p,\text{tot}}(x) = -exE_f - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o|x|}$$

$$\left(\frac{dW_{p,\text{tot}}(x)}{dx} \right)_{x=\tilde{x}_o} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{x}_o^2 = \frac{e}{4\pi\epsilon_o E_f}, \quad \text{ou} \quad \boxed{\tilde{x}_o = \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_o E_f}}}$$

- Condition d'ionisation : $W_{p,\text{tot}}(\tilde{x}_o) = -W_o$ et $E_f = E_{f,i}$

$$-W_o = W_{p,\text{tot}}(\tilde{x}_o) = -eE_f \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_o E_{f,i}}} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_o E_{f,i}}{e}} = -2\sqrt{\frac{E_{f,i}e^3}{4\pi\epsilon_o}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{E_{f,i} = \frac{\pi\epsilon_o}{e^3} W_o^2 \simeq 3, 2 \cdot 10^{10} \text{ Vm}^{-1}}$$

La valeur trouvée n'est pas loin de celle de E_c : possibilité d'ionisation de la matière pour $E_f = E_{f,i}$.

- **8-** La RFD appliquée à l'électron dans les hypothèses d'étude :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -eE_f \cos(\omega_o t) \hat{u}_x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) = \frac{-eE_f}{m} \cos(\omega_o t)$$

Solutions :

$$\dot{x}(t) = \frac{-eE_f}{m\omega_o} \sin(\omega_o t) + K_1 \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{eE_f}{m\omega_o^2} \cos(\omega_o t) + K_1 t + K_2$$

Conditions initiales : $\dot{x}(t = t_i) \simeq 0$ et $x(t = t_i) \simeq x_o \simeq 0$. Soient :

$$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{-eE_f}{m\omega_o} [\sin(\omega_o t) - \sin(\omega_o t_i)]} \quad \text{et} \quad \boxed{x(t) = \frac{eE_f}{m\omega_o^2} [\cos(\omega_o t) - \cos(\omega_o t_i)] + \frac{eE_f}{m\omega_o} (t - t_i) \sin(\omega_o t_i)}$$

□ 9-

- L'énergie cinétique W_c lors de la recombinaison :

$$W_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{e^2 E_f^2}{2m\omega_o^2} [\sin^2(\omega_o t) - 2 \sin(\omega_o t) \sin(\omega_o t_i) + \sin^2(\omega_o t_i)]$$

- Valeur moyenne :

$$\langle W_c \rangle = \frac{e^2 E_f^2}{2m\omega_o^2} \left[\frac{1}{2} + \sin^2(\omega_o t_i) \right]$$

Aux instants privilégiés t_o et t_1 , $\sin^2(\omega_o t_i) = 0$:

$$\Rightarrow \langle W_c \rangle = \frac{e^2 E_f^2}{4m\omega_o^2}$$

- Durée de l'impulsion :

$$W_{c,\max} + W_o = h\nu \simeq \frac{h}{\delta T} \Rightarrow \delta T \simeq \frac{h}{W_{c,\max} + W_o} = \frac{h}{3,2 \langle W_c \rangle + W_o} = 0,022 \text{ fs}$$

□ 10- Le signal étant périodique, il pourra être décomposé en somme de signaux trigonométriques ! (Fourier).

$$s_+(x, t) = s_+(0, t - x/c) = S_o \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \quad \text{et} \quad s_-(x, t) = -s_-(0, t - x/c) = -S_o \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x - \frac{\omega_o T_o}{2}\right)$$

$$s(x, t) = s_+(x, t) + s_-(x, t) = -2S_o \sin\left(\frac{\omega T_o}{4}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x - \frac{\omega T_o}{4}\right)$$

Le signal est d'amplitude maximale pour :

$$\sin\left(\frac{\omega T_o}{4}\right) = +1 \Leftrightarrow \frac{\omega T_o}{4} = \frac{\pi\omega}{2\omega_o} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = (2n+1)\omega_o \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Le spectre du train d'impulsions est un spectre de raies.

II. – Génération d'harmoniques sur un miroir plasma

II.A Pulsation propre

□ 11-

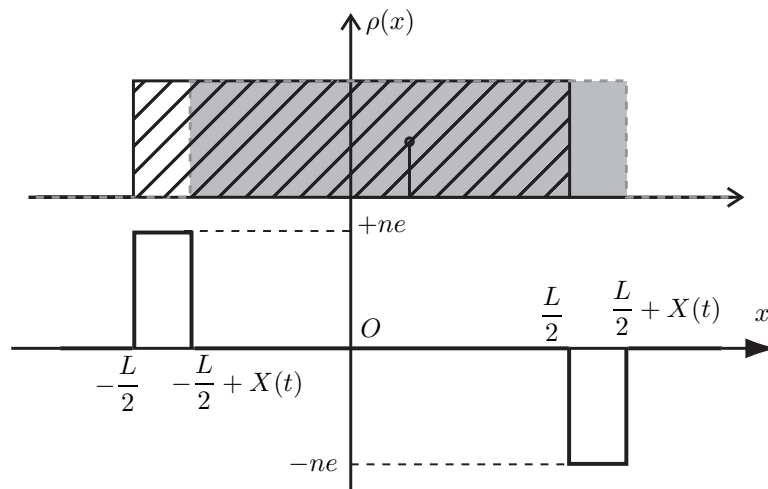
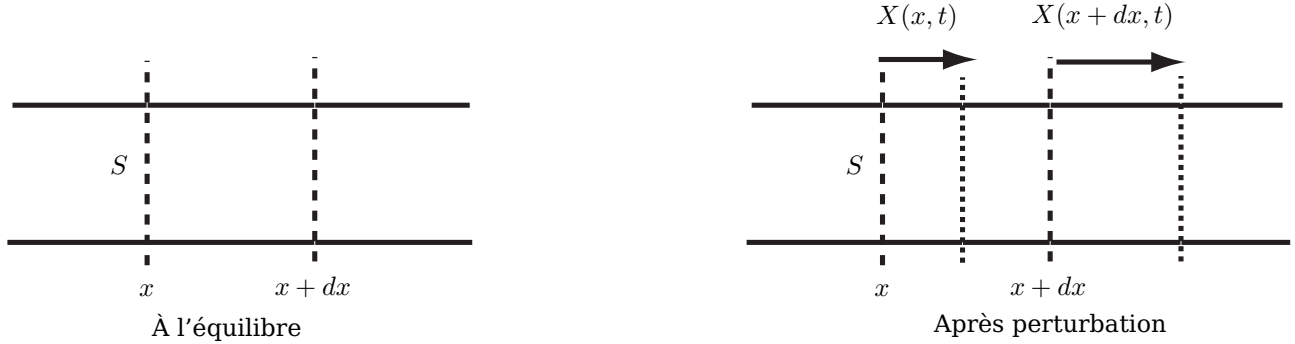


Figure 1 Profil de la densité de charge $\rho(x)$

- Densité de charges $\rho(x)$:

Considérons une tranche élémentaire dx du plasma, délimitée par une section S , de volume $V_o = Sdx$.



Après perturbation, le volume de la tranche est :

$$V = S[(X(x+dx, t) + x + dx) - (X(x, t) + x)] = V_o \left(1 + \frac{\partial X}{\partial x}\right) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial X}{\partial x} \ll 1$$

La densité de charge est :

$$\rho(x) = n_+(+e) + n_-(-e) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_-(-e)V = n(-e)V_o & \text{conservation de la charge électrique} \\ n_+ = n & \text{plasma neutre initialement} \end{cases}$$

Soit :

$$n_- = n \frac{V_o}{V} \simeq n \left(1 - \frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

$$\text{D'où : } \rho(x) = n(+e) + n(-e) \left(1 - \frac{\partial X}{\partial x}\right) = ne \frac{\partial X}{\partial x}$$

◦ Champ électrique : $\vec{E} = E(x, t)\hat{u}_x$

$$\text{L'équation de Maxwell : } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_o} \Rightarrow \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{ne}{\varepsilon_o} \frac{\partial X}{\partial x} \quad \text{ou} \quad E(x, t) = \frac{ne}{\varepsilon_o} X(x, t) + K(t)$$

$$\text{Conditions initiales : } X(0) = X_o \quad \text{et} \quad E(x, 0) = 0 \Rightarrow K(t) = -X_o$$

$$\Rightarrow E(x, t) = \frac{ne}{\varepsilon_o} (X(x, t) - X_o)$$

◦ Équation du mouvement et pulsation propre : La RFD appliquée à un électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow \frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial t^2} + \frac{ne^2}{m\varepsilon_o} (X(x, t) - X_o) = 0$$

Le mouvement est oscillatoire à la pulsation

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_o}}$$

la propagation n'est possible dans le plasma si k est complexe ou $k^2 < 0$:

II.B Propagation dans un plasma homogène

□ 12- Équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_o} & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_o \vec{j} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

La conductivité complexe $\underline{\gamma}$ du milieu :

$$\underline{j} = \rho_m \underline{v} = -ne \underline{v} \quad \text{avec} \quad m \frac{d\underline{v}}{dt} = -e \underline{E}$$

on pose $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$:

$$\Rightarrow i m \omega \vec{v} = -e \vec{E} \quad \text{et} \quad \underbrace{\vec{j} = -i \frac{ne^2}{m\omega} \vec{E}}_{\gamma} \Rightarrow \boxed{\gamma = -i \frac{ne^2}{m\omega}}$$

Plasma localement neutre et de conductivité complexe γ , les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= 0 & \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 & \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

De l'identité vectorielle $\text{rot} [\text{rot} \vec{E}] = -\Delta \vec{E} + \text{grad}[\text{div} \vec{E}]$, on en déduit l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Relation de dispersion : on remplace $\vec{E}$ dans l'équation

$$-k^2 = \mu_0 \left(-i \frac{ne^2}{m\omega} \right) (i\omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} + k^2 c^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2}$$

La propagation n'est possible dans le plasma tant que k est imaginaire ou $k^2 < 0$:

$$\Rightarrow \omega < \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} \quad \text{ou} \quad \boxed{n > n_c = \frac{m\varepsilon_0 \omega^2}{e^2}}$$

L'onde devient évanescence !!

□ 13- pour $n = n_c$:

$$n_c = n_{\max} \exp(x_c/L) \Rightarrow x_c = L \times \text{Ln} \left(\frac{n_c}{n_{\max}} \right) = L \times \text{Ln} \left(\frac{m\varepsilon_0 \omega^2}{n_{\max} e^2} \right)$$

□ 14- Dans le demi-espace $x < 0$, le champ électrique est la superposition d'un champ incident $\vec{E}_i$ et d'un champ réfléchi $\vec{E}_r$:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{oi} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{E}_r = \vec{E}_{or} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{k}_i = k_{ix} \hat{u}_x + k_{iy} \hat{u}_y \\ \vec{k}_r = k_{rx} \hat{u}_x + k_{ry} \hat{u}_y \end{cases}$$

Dans le demi-espace $x > 0$, le champ électrique est nul. La continuité de la composante tangentielle du champ électrique au voisinage de l'interface ($x = 0$) se traduit par :

$$(\vec{E} \cdot \hat{u}_y)(x = 0) = 0 \Rightarrow E_{oiy} e^{i(\omega t - y k_{iy})} + E_{ory} e^{i(\omega t - y k_{ry})} = 0$$

l'égalité est vraie si les deux phases sont en accord, soit : $k_{iy} = k_{ry}$, on a, donc, invariance de la composante k_y qui est égale à $k \sin \beta$.

Cette invariance permet d'écrire : $k_y = k_{vide} \sin \beta = \frac{\omega}{c} \sin \beta$:

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + c^2(k_x^2 + k_y^2) = \omega_p^2 + c^2 k_x^2 + k_{vide}^2 c^2 \sin^2 \beta \quad \text{ou} \quad \omega^2 \cos^2 \beta = \omega_p^2 + k_x^2 c^2$$

La nouvelle densité critique n_r est telle que $\omega \cos \beta < \omega_p$ ou $n_e > n_r = \frac{m\varepsilon_0 \omega^2}{e^2} \cos^2 \beta$.

Pour $n_e = n_r$:

$$\begin{aligned} n_r &= n_{\max} \exp(x_r/L) \quad \text{et} \quad n_r = n_c \cos^2 \beta \\ \Rightarrow \quad \boxed{x_r &= x_c + 2 \text{Ln} \cos \beta} \end{aligned}$$

II.C Excitation d'ondes plasma à la surface

- 15- Expression de $t_o(x)$: $\vec{v} = v\hat{u}_x$

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \Rightarrow \quad x(t) = vt - 3L \quad (x(t=0) = -3L)$$

$$t_o(x) = \frac{x + 3L}{v}$$

Expression de la phase :

$$\text{on a : } X(x, t) = X_o \cos \phi(x, t) \quad \text{et} \quad \ddot{X}(x, t) + \omega_p^2(x)(X(x, t) - X_o) = 0$$

$$\Rightarrow -\ddot{\phi}(x, t) \sin \phi(x, t) - \omega_p^2(x) = 0 \quad \text{et} \quad \phi^2(x, t) = \omega_p^2(x)$$

$$\Rightarrow \phi(x, t) = \omega_p(x)t + K \quad \text{et} \quad \phi(x, t_o(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = -\omega_p(x)t_o(x)$$

Finalement :

$$\phi(x, t) = \omega_p(x)[t - t_o(x)]$$

D'autre part :

$$\omega_p^2(x) = \frac{n_e(x)e^2}{m\varepsilon_o} = \underbrace{\frac{n_{\max}e^2}{m\varepsilon_o}}_{\omega_{\max}^2} \exp(x/L) \quad \Rightarrow \quad \omega_p(x) = \omega_{\max} \exp(x/2L)$$

Soit :

$$\phi(x, t) = \omega_{\max}[t - t_o(x)]e^{x/2L} = \omega_{\max} \left[t - \frac{x + 3L}{v} \right] e^{x/2L}$$

- 16-

$$\vec{k}_p = -\vec{\text{grad}}\phi(x, t) = -\left(\frac{\partial\phi(x, t)}{\partial x}\right)\hat{u}_x \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_p \cdot \hat{u}_x = -\left(\frac{\partial\phi(x, t)}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial\phi(x, t)}{\partial x} = \frac{\omega_{\max}}{2L} e^{x/2L} \left[t - \frac{x + 3L}{v} - \frac{2L}{v} \right] = \frac{\omega_{\max}}{2L} e^{x/2L} \left[t - \frac{x + 5L}{v} \right] \neq 0 \quad \text{pour } t = t_o(x)$$

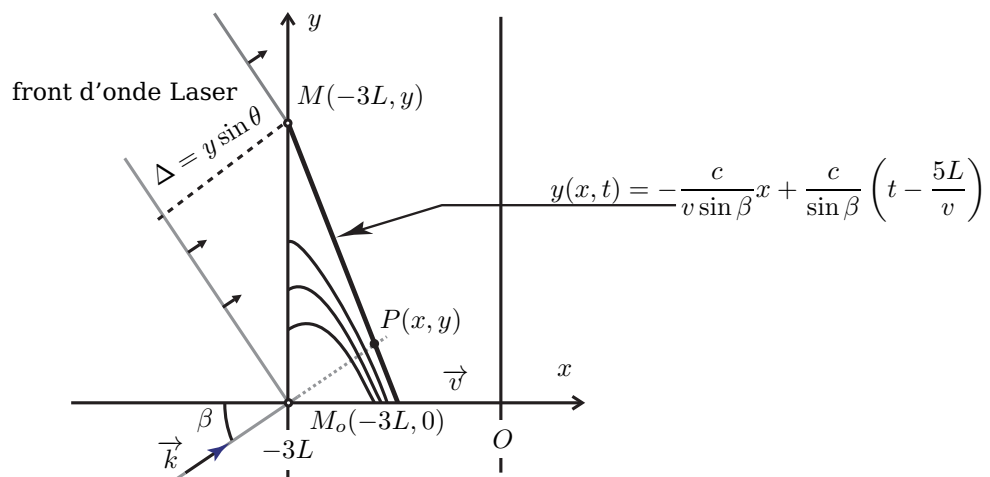
Voyons voir s'il existe un instant t_e tel que $\left(\frac{\partial\phi(x, t)}{\partial x}\right)_{t_e}$ est nul...

$$\left(\frac{\partial\phi(x, t)}{\partial x}\right)_{t_e} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_e = \frac{x + 5L}{v} > 0 \quad \text{donc il existe.}$$

Plus précisément : $t_e = t_o + \frac{2L}{v} > 0 \quad \Rightarrow \quad t_e > t_o$. D'où possibilité d'émission de rayonnement par les oscillations plasma !

Si l'excitation parvient d'un paquet d'électrons qui se déplace dans le sens contraire : v sera négative, il n'y aura, donc, pas de possibilité d'émission de rayonnement par les oscillations plasma.

- 17-



- Le décalage temporel Δt entre les arrivées des fronts d'onde laser aux points M_o et M est tel que :

$$\begin{aligned}\omega \Delta t &= \vec{k} \cdot \overrightarrow{M_o M} \quad ; \quad k = \frac{\omega}{c} (\cos \beta \hat{x} + \sin \beta \hat{y}) \\ &= ky \sin \beta \\ &= \frac{\omega}{c} y \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{y \sin \beta}{c} = \frac{\Delta}{c}\end{aligned}$$

- Le temps du passage du paquet d'électron en $P(x, y)$ (dans la zone hétérogène de surface) :

$$t_o(x, y) = \Delta t + \frac{x + 3L}{v} = \frac{y \sin \beta}{c} + \frac{x + 3L}{v}$$

- Expression de $\phi(x, y, t)$:

$$\phi(x, y, t) = \omega(x)[t - t_o(x, y)] = \omega_{\max} e^{x/2L} \left[t - \frac{y \sin \beta}{c} - \frac{x + 3L}{v} \right]$$

$$\vec{k}_p = -\vec{\text{grad}}\phi(x, y, t) = -\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x} \hat{u}_x - \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial y} \hat{u}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_p \cdot \hat{u}_x = -\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\omega_{\max}}{2L} e^{x/2L} \left[t - \frac{y \sin \beta}{c} - \frac{x + 3L}{v} \right] + \omega_{\max} e^{x/2L} \left[-\frac{1}{v} \right] = \frac{\omega_{\max}}{2L} e^{x/2L} \left[t - \frac{y \sin \beta}{c} - \frac{x + 5L}{v} \right]$$

- Points d'émission :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow t - \frac{y \sin \beta}{c} - \frac{x + 5L}{v} = 0 \\ \text{ou} &\quad y(x, t) = -\frac{c}{v \sin \beta} x + \frac{c}{\sin \beta} \left(t - \frac{5L}{v} \right)\end{aligned}$$

Pour β et v donnés, les points d'émission sont, alors, localisés sur la droite d'équation $y = -Ax + f(t)$ de pente négative et d'ordonnée à l'origine négative : ce qui est conforme au réseau représenté dans la zone hétérogène de surface.

La différence de phase entre deux points de la droite est stationnaire : on parle, alors, de l'Emission Cohérente de Sillage (ECS).

La connaissance du spectre permet d'avoir accès à L et, donc, à l'épaisseur de la zone hétérogène.

III. Interaction d'une impulsion avec une feuille mince

□ 18-

- L'énergie cinétique moyenne d'un électron du plasma est estimée à $\frac{3}{2} k_B \theta_e = \frac{1}{2} m (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle)$: isotropie de la direction des vitesses et chaque direction est équiprobable.
- Si la température θ_e est assez élevée, l'énergie de l'électron est purement cinétique. Les interactions entre les électrons sont faibles (distance moyenne grande devant la portée des forces inter-électroniques).
- On pourra, donc, modéliser le plasma comme un gaz parfait.

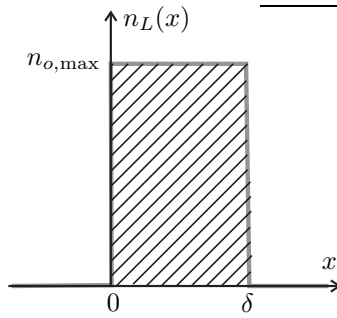
On assimile l'expansion du plasma (hétérogène) dans le vide à une détente d'un gaz parfait dans le vide. Si on suppose que le plasma n'échange ni de l'énergie thermique ni du travail avec l'extérieur alors cette expansion est assimilable à une détente de Joule-Gay Lussac qui est une détente isoénergétique : c'est à dire que l'énergie interne U_{plasma} est constante.

$$\text{Or : } U_{\text{plasma}} = \sum_i \langle \epsilon_i \rangle = \frac{3}{2} \times \underbrace{N_e}_{\substack{\text{nombre} \\ \text{d'électrons} \\ \text{du plasma}}} \times k_B \theta_e = \underline{\text{constante}}, \quad \Rightarrow \quad \theta_e = \underline{\text{constante}}$$

□ 19- Profil de $n_L(x)$

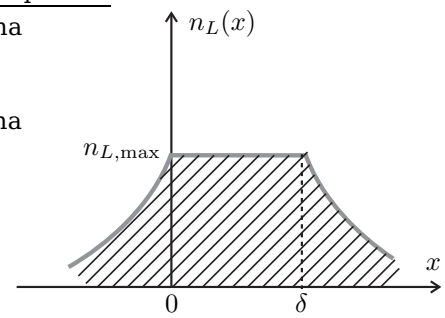
Conservation du nombre de particules du plasma :

Le nombre d'électrons du plasma
avant expansion
||
au nombre d'électrons du plasma
après expansion
||
 N_e



Avant expansion

$$n_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ n_{o,\max} & \text{pour } 0 < x < \delta \\ 0 & \text{pour } \delta < x \end{cases}$$



Après expansion

$$n_L(x) = \begin{cases} n_{L,\max} e^{x/L} & \text{pour } x < 0 \\ n_{L,\max} & \text{pour } 0 < x < L \\ n_{L,\max} e^{-(x-L)/L} & \text{pour } L < x < L+\delta \end{cases}$$

Pour une section Σ du plasma, le nombre d'électrons :

- Avant expansion :

$$N_{e,\text{avant}} = \int_0^\delta n_L(x) \Sigma dx = n_{o,\max} \Sigma \delta$$

- Après expansion :

$$\begin{aligned} N_{e,\text{après}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} n_L(x) \Sigma dx \\ &= \Sigma \left[\underbrace{\int_{-\infty}^0 n_{L,\max} e^{x/L} dx}_{Ln_{L,\max}} + \underbrace{\int_0^\delta n_{L,\max} dx}_{n_{L,\max} \delta} + \underbrace{\int_\delta^{L+\delta} n_{L,\max} e^{-(x-L)/L} dx}_{Ln_{L,\max}} \right] \\ &= n_{L,\max} (2L + \delta) \Sigma \end{aligned}$$

Soit :

$$N_e = n_{o,\max} \Sigma \delta = n_{L,\max} (2L + \delta) \Sigma \Rightarrow \boxed{n_{L,\max} = \frac{n_{o,\max} \delta}{2L + \delta}}$$

De même, avec $\omega_p \propto \sqrt{n}$, on a :

$$\boxed{\omega_{L,\max} = \omega_{o,\max} \sqrt{\frac{\delta}{2L + \delta}}}$$

□ 20-

$$L = c_s T = T \sqrt{\frac{Z k_B \theta_e}{m_i}} \Rightarrow \theta_e = \frac{m_i L^2}{T^2 Z k_B} = \frac{m_i L^2}{6 T^2 k_B}$$

$$L = \frac{\delta}{2} \left[\left(\frac{\omega_{o,\max}}{\omega_{L,\max}} \right)^2 - 1 \right] = \frac{\delta}{2} \left[349,69 \left(\frac{\omega_o}{\omega_{L,\max}} \right)^2 - 1 \right] \Rightarrow \theta_e = \frac{m_i \delta^2}{24 T^2 k_B} \left[349,69 \left(\frac{\omega_o}{\omega_{L,\max}} \right)^2 - 1 \right]^2$$

θ_e étant supposée indépendante de δ , on pourra choisir une valeur quelconque de cette épaisseur.

Pour $\begin{cases} \delta = 50 \text{ nm} \\ \omega_{L,\max} = 17,5 \omega_o \end{cases}$ on trouve $\boxed{\theta_e \simeq 3,3 \cdot 10^6 \text{ K}}$

□ 21- En utilisant les résultats des questions □ 18- et □ 19-, on peut écrire :

$$\frac{3}{2} N_e k_B \theta_e = \frac{3}{2} k_B n_{o,\max} \delta \theta_e = \text{constante} \Rightarrow \delta \times \theta_e = \text{constante}$$

La température électronique du plasma θ_e est, donc, inversement proportionnelle à l'épaisseur δ .

Comme $\theta_e = \frac{m_i L^2}{T^2 Z k_B} = \frac{m_i L^2}{6 T^2 k_B}$ (Cf. □ 20-) : L^2 est, alors, inversement proportionnelle à l'épaisseur δ .

$$L^2 \times \delta = \text{constante} = L_o^2 \times \delta_o \quad \Rightarrow \quad L = L_o \sqrt{\frac{\delta_o}{\delta}}$$

Soit (Cf. □ 19-) :

$$\omega_{L,\max} = \omega_{o,\max} \sqrt{\frac{\delta}{2L + \delta}} = \omega_{o,\max} \sqrt{\frac{\delta}{2L_o \sqrt{\frac{\delta_o}{\delta}} + \delta}}$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{\omega_{L,\max}}{\omega_o} \right) \simeq 18,7 \sqrt{\frac{\delta}{2L_o \sqrt{\frac{\delta_o}{\delta}} + \delta}}$$

On constate que lorsque δ augmente, $\left(\frac{\omega_{L,\max}}{\omega_o} \right)$ augmente : résultat en accord avec le spectre de la figure **IV.b**.